EDITORA CLASSICO CIENTIFICA

Elementos de Geometria Analítica

SONNINO

SÃO PAULO, 1944

20.-

Elementos
de
Geometria Analítica

Sergio Sonnino

Elementos de Geometria Analítica

com 450 exercícios

EDITORA CLASSICO CIENTIFICA
SÃO PAULO, 1944

PREFACIO

Nihil novi sub sole: Mais um livro de geometria analítica e por demais em caráter bastante elementar. E se alguma novidade se deve encontrar nestas páginas é a forma e o método com o qual elas foram compiladas. Procuramos, com efeito, manter em têrmos os mais possíveis rigorosos a terminologia matemática, dando em cada parágrafo uma numerosa série de exercícios a resolver.

Isso fizemos em particular modo para os alunos que perdem tempo à procura de livros de exercícios, e dinheiro para adquirí-los. Os exercícios que pusemos são, na sua maioria, de fácil e imediata solução: os mais complicados serão resolvidos com a ajuda dos professores.

Nos complementos temos posto algumas noções de interêsse geral, e no apêndice breves notas para os leitores de mais avançada preparação matemática.

Pedimos desculpas pelas imperfeições que possam ser encontradas no texto, apreciando ao mesmo tempo eventuais conselhos e sujestões.

São Paulo, 15-3-44.

NOTA: Os pontos de geometria analítica para o terceiro ano de Ginasio encontram-se nos cap. I (pág. 11-26); cap. II (pág. 42-43, 51-53); cap. V (pág. 91-94, 100-103); cap. VI (pág. 115, 124); cap. VII (pág. 130-131, 133, 160); cap. VIII (pág. 143-145).

CAPÍTULO I

SISTEMA DE COORDENADAS

Conceito de função — As coordenadas cartesianas — Diagramas.

CAPÍTULO I

SISTEMAS DE COORDENADAS

§ I) *Conceito de função.*

Em todas as ciências é preciso considerar grandezas que variam dependentemente de outras grandezas: assim o círculo varia com o raio, o caminho percorrido por um ponto móvel depende do tempo empregado para percorrê-lo, a temperatura de um dado lugar varia com o tempo, o volume de um gás mantido a temperatura constante varia com a pressão, o número dos nascimentos, das mortes numa cidade varia anualmente. E assim por diante.

Todas as vêzes que se apresenta uma grandeza que varia dependentemente com outra, diz-se que a primeira *é função* da segunda.

Mediante leis estabelecidas, ou raciocínios de caráter lógico dedutivo, pode-se fàcilmente deduzir a *forma* da função.

Por exemplo a pressão dos vapores saturados, como função da temperatura assoluta T, é expressa pela forma:

$$\log p = a - \frac{b}{T} - c \log T \quad (a,\ b,\ c \text{ constantes})$$

A área de um círculo de raio x, é dada pela conhecida fórmula

$$y = \pi x^2$$

e poderíamos multiplicar os exemplos.

A álgebra, por seu lado, nos fornece o modo de construir funções das formas mais diferentes.

Se indicarmos com x o número indeterminado e combinarmos, mediante operações algébricas, x com números determinados, teremos expressões cujo valor varia ao variar x e que são funções de x. Diz-se que x é a *variável independente* da função. Por exemplo a expressão

$$y = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$$

é função de x. A cada valor de x temos um valor de y; Com efeito, para x = 0, 1, 2, etc. temos y = —1, y = 1.

$$y = \frac{12}{3} \ldots\ldots$$

Em geral, para exprimir que uma grandeza y é função de x, escreve-se: $y = f(x)$. (1)

E' claro que a variável independente pode estar sob

radical cabendo neste caso à função o nome de *irracional*, ao passo que uma função que tem a forma (1) diz-se *racional*. As funções irracionais e racionais são pois estudadas sob a única denominação de *funções algébricas*.

Enfim, as funções em que a variável aparece expressa mediante logaritmos ou funções trigonométricas, dizem-se *trascendentes*.

PARTE PRÁTICA N. I)

Caraterizar as seguintes funções:

a) $y = \dfrac{\log x}{x^2 - 1}$; b) $y = 3x^2 - 2$; c) $y = \dfrac{4x^3 - 3x}{2x - 1}$

d) $y = \log \operatorname{sen} \sqrt{x}$; e) $y = \sqrt{x - 1}$; f) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

g) $y = 1^x - \operatorname{sen} x$; h) $y = \log x + \dfrac{1 - x}{1 + x} - \operatorname{sen} x$

§ 2) *As coordenadas cartesianas.*

Por um ponto O do plano traçando-se duas retas x, y escolhendo arbitràriamente sôbre cada uma delas, o sentido positivo. Se conduzirmos dum ponto P do plano as paralelas às x e y, chamando N, M as interseções com as próprias retas y, x, depois de fixada uma arbitrária unidade de medida, ficam individualizados em valor e sinal os dois números.

$$O\,M = m \qquad O\,N = n$$

Por sua vez dados estes dois números, fica identificado o ponto P traçando dos pontos M e N (extremidades dos segmentos O M e O N) as paralelas às x, y.

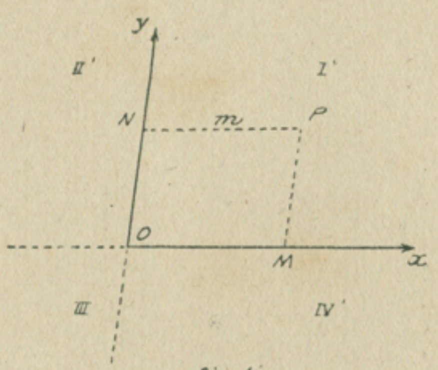


fig 1

Estabelece-se assim entre as duplas ordenadas de números reais os pontos do plano uma correspondência biunívoca e contínua. As retas x, y dizem-se *eixos coordenados,* sendo uma delas (que indicamos com x), chamada eixo das *abcissas,* e a outra, (que indicamos com y) eixo das *ordenadas.* O ponto de encontro das duas retas chama-se *origem.* As MP = m, NP = n, tomadas no sentido que vai dos eixos ao ponto, dizem-se *coordenadas cartesianas.* (1) Os dois eixos dividem o plano em 4 partes, chamadas *quadrantes* (o I quadrante é o superior à direita, podendo-se encontrar os outros rodando-se em sentido contrário aos ponteiros do relógio).

PARTE PRÁTICA N. 2)

Exemplos resolvidos:

O ponto (3, 4) encontra-se no primeiro quadrante
„ „ (O, I) sôbre o eixo y
„ „ (—3, 2) no segundo quadrante
„ „ (O, O) é a origem

Identificar os seguintes pontos:

a) (2,4) ; b) (5,7) ; c) (4,—6) ; d) (—3, —8) ;
e) (I2,—3) ; f) (5,O) ; g) (O,4) ; h) (—I,2) ;
i) (—5,—6) ; l) $(\sqrt{3}, 4)$ 2

§ 3) *Diagramas.*

Do que precede podemos ver como dada uma dupla de números reais, com os seus sinais, existe um único ponto P que os tem como coordenadas, e viceversa, dado no plano um ponto qualquer P, resultam individualizados dois números reais (coordenadas do ponto).

---

(1) Assim chamadas porque foram usadas sistematicamente pela primeira vez pelo matemático e filósofo francês Réné Descartes (1596-1650).

A correspondência estabelecida neste modo entre os pontos e as duplas ordenadas de números reais é biunívoca e contínua.

Suponhamos ter agora uma função $y = f(x)$, que para os valores $x = x_1, x_2 \ldots . x_n$ tome os valores $y_1, y_2 \ldots . y_n$. Fixados os eixos coordenados, que poderemos supor perpendiculares ($xy = 90^{o}$), sem interromper a generalidade do raciocínio (como veremos mais tarde), identificamos os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots . . (x_n, y_n)$ depois de ter prefixada uma unidade de medida. Se os pontos forem bastante próximos entre si, êles determinam uma curva que diz-se *diagrama* da função $f(x)$. Noutras palavras o diagrama da $y = f(x)$ é o lugar geométrico *dos pontos que tem como coordenadas dois valores correspondentes de x e y.*

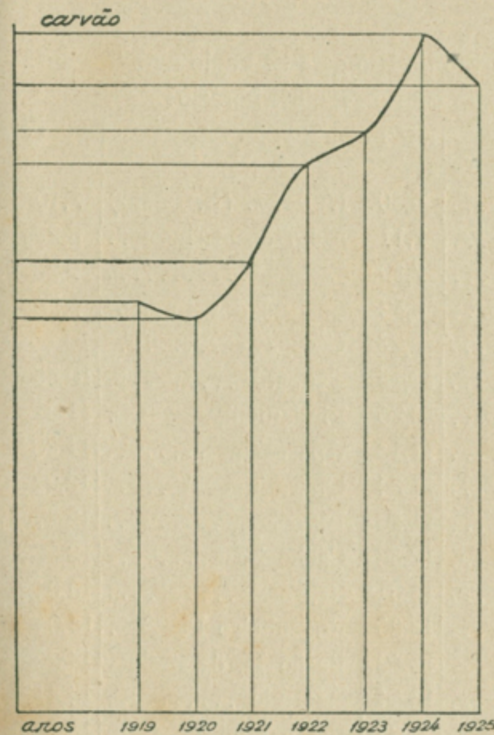
PARTE PRÁTICA N. 3)

Os dois exemplos de construção de diagramas na página que segue, foram tirados do livro de G. Mortara: Perspectivas econômicas e elementos de estatística.

Exemplos a resolver:

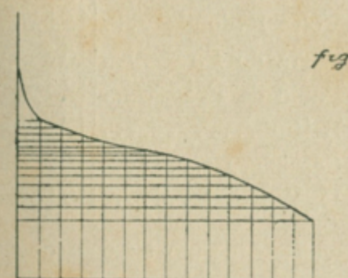
a) Na tabela que segue, é representado o andamento dum trem; traçar o diagrama.

Horas	12;	12,27;	12,51;	13;	13,23;	13.52;	14,35
Km	0	4,35	27	36	53	70,10	110



ano	carvão
1919	7.2
1920	6.9
1921	7.9
1922	9.6
1923	10.2
1924	11.9
1925	11,0

fig 2



edade	viventes	edade	viventes	edade	viventes
0	10 000	25	6 397	50	4 856
5	7 267	30	6 141	55	4 457
10	6 988	35	5 863	60	3 997
15	6 830	40	5 552	65	3 470
20	6 657	45	5 216	70	2 834

fig 3

CAPÍTULO III

A LINHA RETA

§ 1) *Distância de dois pontos*

Suponhamos que sôbre uma reta r, sejam dados dois pontos M, N, que tem respectivamente a abcissa m e n. Vê-se imediatamente que

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} \quad \text{ou} \quad \boxed{MN = n - m}$$

sendo portanto a distância de dois pontos dada pela diferença *entre a abcissa do segundo ponto e a do primeiro.*

Sejam agora dados os dois pontos P (x_1, y_1), N (x_2, y_2).

Procura-se a distância

$$d = PN$$

Observa-se imediatamente que

$$OR = x_1; \quad OS = x_2$$
$$RS = PQ = x_2 - x_1$$
$$PR = y_1; \quad SN = y_2$$
$$NQ = y_2 - y_1$$

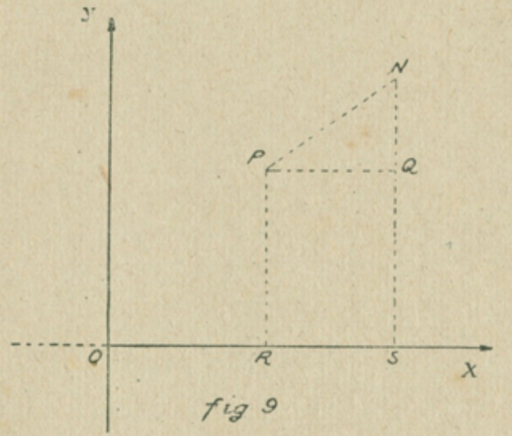


fig 9

Logo do triângulo retângulo PNQ deduziremos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ ou}$$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \qquad 1)$$

Notamos que a igualdade é sempre verdadeira, quaisquer seja o quadrante em que se encontram os pontos.

PARTE PRÁTICA N. 7)

Achar a distância entre os pontos

a) (3, 2) (4, —1) b) (1, 3); (6, 15) c) (m, n), (—m, —n); d) (0, 3), (3, 0); e) (a, —b), (—a, b).

N.B. f) A distância entre dois pontos é 9 e as coordenadas dum ponto P são (—2, 3). Achar as coordenadas do outro ponto.

g) Achar o comprimento dos lados dum triângulo sabendo que os vértices tem por coordenadas (2, 3), (4, —5), (—3, —6).

h) mesmo para (0, —M), (0, 0), (—M, 0).

§ 2) *Ponto que divide um segmento numa relação dada.*

Vamos resolver o seguinte problema:

Dados dois pontos P, Q de coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) e o valor $\frac{m}{n}$ da relação em que um terceiro ponto R da reta que une P e Q divide o segmento PQ, achar as coordenadas de R.

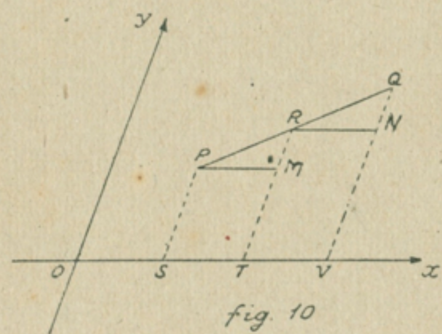


fig. 10

Sendo R o ponto procurado tem-se logo:

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{m}{n}$$

Sendo os triângulos PRM, RQN semelhantes, logo tem-se:

$$\frac{PM}{RN} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n} = \frac{RM}{QN}$$

Mas, sendo R (x, y) deduz-se imediatamente

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n} \quad e \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}$$

donde

$$\boxed{x = \frac{m\,x_2 + n\,x_1}{m + n} \qquad y = \frac{m\,y_2 + n\,y_1}{m + n}} \quad (2)$$

Em particular o ponto médio do segmento P Q tem por coordenadas:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \quad (2')$$

PARTE PRÁTICA N. 8)

Exercício resolvido: a) O ponto médio do segmento PQ em que P = (1, 2) Q (3, 4) é

$$x = \frac{1 + 3}{2} = 2 \qquad y = \frac{4 + 2}{2} = 6$$

b) Achar as coordenadas do ponto que divide o segmento PQ, em que P (—1, 2) Q (3, 2), na relação $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{3 - 2}{3} = \frac{1}{3} \qquad y = \frac{2 + 4}{3} = 2$$

Exercícios a resolver:

a) Os vértices dum triângulo são (2, 3), (4, —5), (—3, —6). Procurar o ponto meio dos lados.

C b) Demonstrar que o ponto meio da h ipotenusa dum triângulo retângulo é equidistante dos três vértices.

c) Quais são as coordenadas do ponto que divide o segmento PQ [em que P (2, 3) e Q (5, —3)] na razão $\frac{2}{3}$?

d) Ponto meio entre os pontos (5, 2); (4, 3)

e) (2, —1); (1, —2)

f) (—3, —2); (7, 1)

15) Achar a reta paralela à reta que passa pelos pontos (x_1y_1), (x_2y_2) e que passa ulteriormente por (x, y).

16) Mesma questão para os pontos $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(1, -1)$

17) Achar a distância do ponto $(1, 0)$ à reta $y = mx + \frac{1}{m}$

$$\left\{ \pm \frac{1}{m} \sqrt{1 + l^2} \right\}$$

18) Achar a distância da interseção das duas linhas $3x + 2y = -4$ $2x + 5y = -8$, à reta $y - 5x = -6$.

$$\left\{ -31 \ , \ \frac{126}{43} \right\}$$

19) Distância das duas retas paralelas

$$\begin{matrix} 3x - 2y - 4 = 0 \\ 3x - 2y - 6 = 0 \end{matrix} \qquad \left\{ \frac{2}{13} \right\}$$

20) Equação da dupla das retas que saem da origem perpendicularmente às retas da dupla $3x^2 + 2xy - 2y^2 = 0$

21) Reta por $(1, 2)$ e inclinada de 60° sôbre a reta

$$2x - 3y + 1 = 0$$

22) Demonstrar que para que três retas formem feixo, é necessário e suficiente que existam três números, não todos nulos, tais que multiplicando ordenadamente por êles, os primeiros membros das três retas e somando os resultados a soma seja identicamente nula.

CAPÍTULO IV

AREAS DE FIGURAS PLANAS

Notações sôbre o sinal da area dum triângulo — Area do triângulo — Area dum poligono plano.

CAPÍTULO IV

AREAS DE FIGURAS PLANAS

§ 1) *Notações sôbre o sinal da área de um triângulo.*

Suponhamos de ter escolhido num plano um sentido positivo (conforme as convenções formuladas noutro lugar). Nesta hipótese convencionamos medir as áreas das figuras planas mediante números com sinais positivos ou negativos conforme que o sentido em que se imagina venha percorrido o contôrno da área seja positivo ou negativo.

Assim para um triângulo que tem por vértices os três pontos A, B, C, e uma área que chamaremos Δ, cujo contôrno seja percorrido a partir de A passando por B e seguidamente por C, para depois voltar em A, teremos:

$$ABC = BCA = CAB = -ACB = -CBA = -BAC$$

O que foi observado para o triângulo vale para uma qualquer área plana.

§ 2) *Área do triângulo.* (eixos ortogonais) (fig. n.º 18)

Queremos calcular agora a área do triângulo ABC conhecendo as coordenadas dos três vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Indicando com r, s as retas (orientadas) que contêm os lados AB e AC do triângulo, teremos por notas fórmulas de trigonometria:

$$\text{Área de } ABC = \frac{1}{2} AB.AC \text{ sen } \widehat{rs} \qquad (1)$$

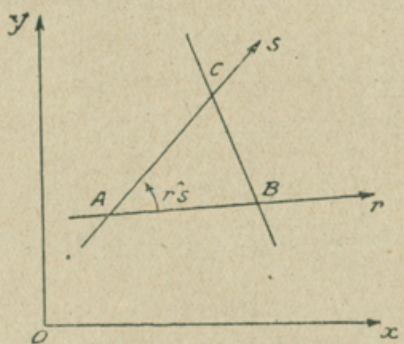


fig. 18

A fórmula (1) é válida em valor absoluto e em sinal. Com efeito, traduzindo trigonomètricamente o semiproduto do lado AB pela relativa altura, a (1) exprime, em valor absoluto a área do triângulo ABC. Quanto ao sinal, suponhamos primeiramente que os sentidos prefixados sôbre as retas r, s, sejam os que vão respetivamente de A para B e para C como na figura. Neste caso, dizer que o segundo membro da (1) é positivo equivale a dizer que o ângulo r s é menor de 180º e neste caso a reta saindo da posição em que se encontra AB e rodando positivamente até alcançar a reta s, cobre todo o triângulo, verificando dêste modo que também o primeiro membro é positivo como o segundo.

Se o segundo membro for negativo, o ângulo $\widehat{rs}$ será maior que 180º o triângulo cairá fora dêle, resultando negativo também o primeiro membro da (1). Enfim se invertimos o sinal positivo sôbre r, mudam evidentemente os sinais sôbre AB e sen rs ficando ainda uma vez imutados os sinais nos dois membros da (1).

Ora, lembrando a fórmula do problema IV do capítulo precedente

$$\text{sen } \widehat{rs} = \cos \widehat{xr} \cos \widehat{ys} - \cos \widehat{yr} \cos \widehat{xs}$$

a (1) torna-se

$$ABC = \frac{1}{2} AB.AC \begin{vmatrix} \cos\widehat{xr} & \cos\widehat{yr} \\ \cos\widehat{xs} & \cos\widehat{ys} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} AB\cos\widehat{xr} & AB\cos\widehat{yr} \\ AC\cos\widehat{xr} & AC\cos\widehat{ys} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Que exprime justamente a área de um triângulo em coordenadas cartesianas ortogonais. A fórmula no caso que os eixos sejam oblíquos é:

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{sen } \widehat{xy} \qquad (2')$$

PARTE PRÁTICA N. 18)

a) Achar a área do triângulo cujos vértices têm como coordenadas (0, 0) (1, 1) (2, 2)

b) Mesma questão para (1, 2) (3, 1) (—2, 4)

c) „ „ „ (3, 1) (4, 3) (0, —5)

d) „ „ „ (0, 0) (3, 1) (—2, —3)

e) „ „ „ (4, 3) (—2, —1) (2, 1)

f) „ „ „ (1, —1) (2, —2) (3, —3)

g) „ „ „ (1, 1) (1, —1) (a, b) (1, —1)

h) Achar a área do triângulo formado pelo ponto A (3, 4) e pelos pontos B e C, em que a reta $x + y = 1$ encontra os eixos coordenados.

i) Achar a área do triângulo que tem por lados $x = y$; $2x + y = 1$; $x + y = -5$.

l) Mesma questão para o triângulo de lados: $x = 0$; $x = y$; $x + y = 0$.

m) Achar a área do triângulo que tem os vértices expressos mediante as coordenadas polares:

$A(\rho_1, \alpha_1)$; $B(\rho_2, \alpha_2)$; $C(\rho_3, \alpha_3)$.

n) Achar a área do triângulo limitado entre as retas $y = 0$; $x = 0$; $y = mx + b$.

o) Mesma questão $x = 0$; $y = 0$; $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

p) Mesma questão $x = 0$; $y = 0$; $Ax + By + C = 0$

§ 3) *Área de um polígono plano qualquer.*

A área de um polígono plano determina-se em modo muito simples como determinava-se na eometria elementar.

E' necessário porém demonstrar o seguinte:

Teorema: Se $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n$ é um poligono de n vértices qualquer e P é um ponto do seu plano, a soma das áreas triangulares $A_1 A_2 P$, $A_2 A_3 P \ldots\ldots A_{n-1}, A_n P$ não depende da posição do ponto P.

A demonstração é imediata, quando expressas as coordenadas dos pontos sucessivamente com (x_1, y_1) (x_2, y_2) $\ldots\ldots(x_n\ y_n)$ e as áreas dos sucessivos triângulos mediante a fórmula (2) ou (2') do precedente parágrafo. Desenvolvidos os determinantes, verifica-se fàcilmente que nas expressões assim deduzidas não aparecem as coordenadas do ponto P.

PARTE PRÁTICA N. 19)

a) Dado um quadrângulo de vértices (1, 2); (0, 0); (—1, 3); (1, 1), achar a relação que passa entre a sua área e a área do quadrilátero obtido unindo os pontos meios do quadrilátero dado.

b) Achar a área do pentágono de vértices (0, 0) ; (1, 1) ; (2, 2) ; (3, 3) ; (4, 4).

c) Achar a área do exágono de vértices (1, 1) ; (—1, —1) ; (2, 2) ; (3, 3).

d) A mesma questão para o quadrângulo que tem por vértices (0, 0) ; (5, 0) ; (9, 11) ; (0, 3).

e) Achar a área da figura limitada entre as retas $x = 0$; $y = 0$; $x = 4$.

f) A mesma questão para $x = y$; $x = 0$; $x - 3 = y$; $x - y = 4$.

g) A mesma questão para $x = y$; $x = -y$; $x = a + y$; $x = b - y$.

h) A mesma questão para $y = 3x$; $y = 7x$; $y = 3a$; $y = c$; $y = 0$.

CAPÍTULO V

LUGARES GEOMÉTRICOS

Equação natural — Bisetriz dum ângulo — Notas sôbre a equação duma curva — O círculo — Problemas sôbre o círculo.

CAPÍTULO V

LUGARES GEOMÉTRICOS

§ 1) *Equação natural de um lugar geométrico.*

Na geometria elementar já foi definido o lugar geométrico como a figura cujos pontos gozavam todos da mesma propriedade.

Noutras palavras, o lugar geométrico vem definido enunciando uma propriedade caraterística dos seus pontos. Assim, a perpendicular conduzida no ponto meio dum segmento A B era definido como o lugar geométrico dos pontos que são igualmente distantes das extremidades A, B do segmento, a bisetriz dum ângulo como lugar geométrico dos pontos que são igualmente distantes das retas que determinam o ângulo e enfim o círculo como o lugar geométrico dos pontos que são igualmente distantes dum ponto interno (o centro).

E' agora nossa intenção estudar novamente êstes lugares geométricos (e mais alguns), traduzindo a propriedade geométrica caraterística de todos os pontos numa correspondente propriedade analítica. Ao passo que, como já temos visto precedentemente, dada uma equação, chegamos a definir o lugar que lhe corresponde.

Assim podemos definir *tôda reta como o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a uma equação de primeiro grau*. Porém, procurando dar a equação dum lugar geométrico, tem capital importância que os eixos coordenados sejam escolhidos oportunamente. Para isso, caso por caso, deverá analisar-se o problema escolhendo sempre como elemento de referências os pontos e as retas que gozem de propriedades particulares.

Assim, por exemplo, no caso citado de achar o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes de duas retas que se encontram, será oportuno escolher como eixos coordenados as próprias retas.

Leis gerais pela escolha do sistema mais oportuno, não existem.

PARTE PRÁTICA N. 20)

a) Exercício resolvido.

Lugar geométrico do vértice A de um triângulo dada a base $BC = 2c$ e a soma $2S^2$ dos quadrados dos outros dois lados. Tomemos a reta que contém BC como eixo x, e a origem no ponto meio de BC.

Imediatamente temos:

$$AC^2 + AB^2 = 2S^2 \quad \text{ou}$$
$$(x - c)^2 + y^2 + [(x + c)^2 + y^2] = 2S^2$$

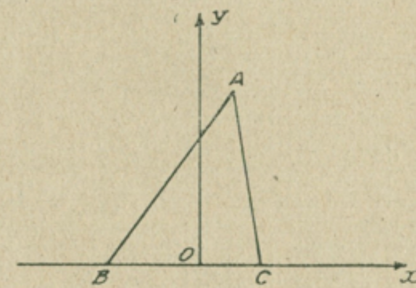


fig. 19

Desenvolvendo

$$x^2 + c^2 - 2xc + y^2 + x^2 + c^2 + y^2 + 2xc = 2S^2$$
$$2x^2 + 2y^2 = 2s^2 - 2c^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = S^2 - c^2$$

b) Mesmo problema, conhecendo o produto p dos lados.

c) Dado o segmento que tem como extremidades os pontos $M(0, 1)$, $N(-1, 2)$, achar o lugar geométrico dos pontos que o vê sob um ângulo de 45°. [Origem no ponto meio de MN.]

d) Sôbre um sistema de eixos ortogonais x, y desloca-se, apoiando às extremidades, um segmento de comprimento constante 2c. Da origem O conduza-se a perpendicular. Achar o lugar do pé determinado pela perpendicular. [Coordenadas polares.]

e) Lugar geométrico dos pontos tais que a diferença das suas distâncias de duas retas fixas, que formam um ângulo seja constante. [Assuma-se as retas como eixos coordenados. Tem-se uma reta.]

f) Lugar geométrico dos pontos que equidistam das extremidades dum segmento dado. [Origem do ponto meio do segmento.]

g) Lugar geométrico representado por um ponto que se desloca de modo que a sua distância das retas $2x - y + 1 = 0$ $[2x - 3y - 5 = 0]$

§ 2) *Bisetriz de um ângulo.* (fig. 20)

O problema a resolver é o seguinte:

Achar o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes dos lados dum triângulo.

Se as retas forem expressas na forma normal

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = p$$
$$x \cos \beta_1 + y \operatorname{sen} \beta_1 = p_1$$

o próprio enunciado do problema nos fornece imediatamente, (supondo ser x, y, as genéricas coordenadas sôbre a reta que divide o ângulo em duas partes iguais):

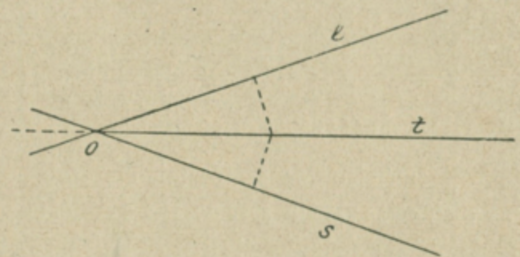


fig. 20

$$\boxed{\begin{array}{c} x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = \\ = x \cos \beta_1 + y \operatorname{sen} \beta_1 - p_1 \\ \hline x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = \\ = - x \cos \beta_1 + y \operatorname{sen} \beta_1 - p_1 \end{array}}$$

(ângulo bissetor que contém a origem)

Se as equações das retas forem dadas na forma

$$Ax + By + C = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

lembrando as fórmulas que fornecem a distância dum ponto a uma reta, temos:

$$\boxed{\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1 + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}}$$

PARTE PRÁTICA N. 21)

a) Exercício resolvido.

Dadas as retas

$$2x + 3y - 1 = 0$$
$$2x - 2y + 3 = 0$$

A equação das bissetrizes dos ângulos por elas formados são:

$$\frac{2x + 3y - 1}{\sqrt{13}} = \pm \frac{2x - 2y + 3}{\sqrt{12}}$$

b) Quais são as equações das retas bissetrizes dos ângulos das retas:

$$5x - 2y = -1$$
$$2x + 4y = 3$$

c) Mesma questão para:

$$3x - \frac{1}{3} y - 1 = 0$$
$$2x - 4y = 5$$

d) Mesma questão para:

$$x + y = 2$$
$$x = y$$

e) Mesma questão para:

$$\begin{cases} y = m'x + d \\ x \cos 30^o + y \text{ sen } 45 = 1 \end{cases}$$

f) Mesma questão para:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ y = mx + d \end{cases}$$

g) Dadas duas retas que saem do ponto (x_1, y_1) e que têm como cosenos diretores $(\cos \alpha, \cos \alpha_1)$, $(\cos \beta, \cos \beta_1)$, achar as equações das bissetrizes.

h) Dado um triângulo de vértices (0, 0), (2, 1), (1, 2), verificar que as três bissetrizes internas passam pelo mesmo ponto.

i) Mesmo problema para duas bissetrizes externas e a bissetriz interna do terceiro ângulo.

l) Dado o quadrilátero que tem para vértices os pontos (2, 3), (0, 1), (—1, 0), (1, —3), determinar as bissetrizes.

§ 3) *Notas sôbre a equação duma curva.*

I Nota — Dada uma equação da curva na forma

$$f(x) = 0$$

isto é tal que nela falte uma das variáveis (neste caso a y), a curva compõe-se de retas paralelas ao eixo y.

Com efeito se as raizes da equação dada forem R, R_1, R_2 ....., pertencem à curva dada todos e sòmente os pontos das retas $x = R$, $x = R_1$, $x = R_2$ ..... evidentemente paralelas ao eixo y.