EUCLIDES ROXO
ROBERTO PEIXOTO

HAROLDO CUNHA
DACORSO NETTO

MATEMÁTICA
2º CICLO

3ª Série

...ANCISCO ALVES

Euclides Roxo
Haroldo Lisbôa da Cunha
(do Colégio Pedro II)

Roberto Peixoto
Cesar Dacorso Netto
(do Instituto de Educação)

MATEMÁTICA
2.º CICLO

3ª SÉRIE

2.ª EDIÇÃO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro
S. PAULO
292, Rua Líbero Badaró
BELO HORIZONTE
Rua Rio de Janeiro, 655
1946

DOS MESMOS AUTORES

Matemática — 2º Ciclo — 2ª Série
Matemática — 2º Ciclo — 3ª Série

Do Prof. Euclides Rôxo:

Lições de Aritmética
Curso de Matemática — 3ª Série (Geometria)
A Matemática na Educação Secundária
Unidades e Medidas.

EM COLABORAÇÃO:

Matemática Ginasial — 1ª Série, 2ª Série, 3ª Série e 4ª Série.
Exercícios de Aritmética, Exercícios de Algebra, Exercícios de Geometria e Exercícios de Trigonometria (esgotados)

Do Prof. Roberto Peixoto:

Geometria Analítica a duas dimensões.
Geometria Analítica a três dimensões.
Exercícios de Geometria Analítica a duas dimensões.
Exercícios de Geometria Analítica a três dimensões.
Calculo Vetorial.
Questiúnculas matemáticas (esgotado).

Do Prof. Haroldo Lisboa da Cunha:

Sôbre as equações algébricas e sua solução por meio de radicais, Rio, 1933 (Tese).
Pontos de Algebra Complementar (Teoria das equações), Rio, 1939 (esgotados).

Do Prof. Cesar Dacorso Netto:

Elementos de Aritmética, Livraria do Globo, Porto Alegre, 1938.
Esbôço sôbre a transformação em matemática elementar. Rio, 1933 (Tese).

Advertência da 2.ª edição

Praz-nos exprimir aqui, aos prezados colegas, ilustres professores de Matemática do 2.º Ciclo secundário, nossos sinceros agradecimentos pela generosa acolhida dispensada aos livros desta coleção (MATEMÁTICA — 2.º CICLO) e bem assim pelas valiosas sugestões que nos enviaram.

Atendendo a muitas dessas sugestões e à nossa propria experiência, resolvemos refundir êste volume, conservando-lhe, porém, a primitiva estruturação.

O livro continua a preencher todas as exigências dos atuais programas de ensino e, sem prejuizo do rigor dedutivo cabível nesta fase do curso, tornou-se mais leve e mais susceptível de ser integralmente assimilado no exíguo tempo que a lei destina à execução de tais programas.

Contamos que o laborioso e competente professorado de Matemática do Brasil continue a distinguir-nos com a sua crítica severa e sua valorosa cooperação.

OS AUTORES

PROGRAMA DA TERCEIRA SÉRIE

ÁLGEBRA

Unidade I. — **Séries:** 1. Sucessões. 2. Cálculo aritmético dos limites. 3. Séries numéricas. 4. Principais caracteres de convergência.

Unidade II. — Funções: 1. Função de uma variavel real. 2. Representação cartesiana. 3. Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidade de uma função racional.

Unidade III. — Derivadas: 1. Definição, interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Unidade IV. — Números complexos: 1. Definição; operações fundamentais. 2. Representação trigonométrica e exponencial. 3. Aplicação à resolução das equações binômias.

Unidade V. — Equações algébricas: 1. Propriedades gerais dos polinômios. 2. Relações entre os coeficientes e as raizes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações. 3. Noções sôbre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raizes iguais.

GEOMETRIA

Unidade VI. — Relações métricas: 1. Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis no triângulo. 2. Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco; 3. Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais.

Unidade VII. — Transformação de figuras: 1. Deslocamentos, translação, rotação, simetria. 2. Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de três dimensões. 3. Inversão pelos raios vetores recíprocos.

Unidade VIII. — Curvas usuais: 1. Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As secções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilindrica.

GEOMETRIA ANALÍTICA

Unidade IX. — Noções fundamentais: 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abcissa sôbre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância entre dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade X. — Lugares geométricos: 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

PARTE I — ÁLGEBRA

Haroldo Lisbôa da Cunha

UNIDADE I

SUCESSÕES

1 — Noções preliminares. Considerada uma sucessão de números quaisquer (1):

$$a_1 \quad a_2 \; \ldots \; a_n \; \ldots$$

onde a_n caracteriza o *termo geral*, para representá-la usaremos o símbolo $[\, a_n \,]$.

Diremos que $[\, a_n \,]$ é *dada*, ou melhor, *determinada*, quando soubermos escrever qualquer termo de ordem arbitrariamente escolhida.

Em certos casos, poderemos obter o elemento assim prefixado, sem o conhecimento dos que o precedem; em outros não.

Tomemos, como primeiro exemplo, a sucessão:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \; \ldots \; \frac{n}{n+1} \qquad (1)$$

O termo geral, $\dfrac{n}{n+1}$, define a *lei de formação* de seus elementos e permite escrever, imediatamente, qualquer termo de ordem dada. A sucessão é, portanto, *determinada*. Mas, embora não conhecendo a expressão do *termo geral*, poderemos ter, em muitos casos, *sucessões determinadas*.

Consideremos, por exemplo, os valores aproximados de $\sqrt{3}$, por falta e, respectivamente, a menos de: 1, 1/10, 1/100,...

A sucessão obtida:

$$1 \quad 1{,}7 \quad 1{,}73 \quad 1{,}732 \ldots \qquad (2)$$

é, ainda, *determinada*, pois conhecemos o algoritmo para o cálculo de seus sucessivos elementos.

---

(1) Estamos adstritos ao domínio real. Observemos, além disso, que só nos interessam as *sucessões infinitas*.

Outro exemplo interessante de *sucessão determinada* obtem-se quando se consideram os números primos na ordem natural:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \ldots \tag{3}$$

Para essa sucessão não foi encontrado, até hoje, o *termo geral*, nem se tem uma lei qualquer para o cálculo de seus elementos sucessivos. São, entretanto, conhecidos critérios pelos quais poderemos prolongá-la indefinidamente [2]. É, pois, uma *sucessão determinada*.

2 — Limite de uma sucessão. Consideremos um número ε positivo e tão pequeno quanto quisermos. Poderemos, por exemplo, imaginar: $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-5}$, etc.

Se, a cada valor atribuido a ε, corresponder um índice n_0 tal que tenhamos :

$$| a_n - a | < \varepsilon \tag{4}$$

para $n \geq n_0$, diremos que a é o *limite* para o qual *tende* a sucessão $[\, a_n \,]$. Escreveremos então:

$$\lim a_n = a \text{ [3]}$$

Equivale isto a dizer que, por menor que admitamos ε, existirá sempre, no intervalo $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, uma infinidade de elementos de $[a_n]$, isto é :

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \tag{5}$$

para $n \geq n_0$.

Dessa maneira, fora do referido intervalo, só encontraremos os elementos :

$$a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_{n_0 - 1}$$

que são em número determinado.

---

(2) Cfr. "*Matemática — 2º Ciclo*", 1ª *Série*, 2ª ed., *Aritmética teórica*, **74** e **75** (pgs. 99 e 100).

(3) O número a é chamado, também, *ponto de acumulação* ou *ponto-limite* da sucessão e é usual escrever-se $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Salvo indicação em contrário, admití-lo-emos, sempre, *finito*.

Consideremos, por exemplo, a sucessão (1). Será fácil mostrar que :

$$\lim \frac{n}{n+1} = 1 \tag{6}$$

Com efeito, temos nesse caso :

$$| a_n - a | = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

e qualquer que seja o valor atribuido a ε, poderemos determinar n_0 de modo que a condição (4) seja satisfeita para $n \geq n_0$.

Fixemos, por exemplo, o valor $\varepsilon = 10^{-5}$.

Para que seja satisfeita a referida condição (4), bastará admitir :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100\ 000}$$

isto é :

$$n + 1 > 100\ 000$$

ou, melhor :

$$n \geq 100\ 000$$

Teremos, dêsse modo, $n_0 = 100\ 000$. E para qualquer outro valor de ε, procederíamos analogamente.

3 — Observação. Quando uma sucessão $[\, a_n \,]$ tende para um limite a, podemos ter sistematicamente: $a_n < a$ ou $a_n > a$. Em certos casos, entretanto, os valores a_n oscilam em tôrno de a.

É o que se dá, por exemplo, com a sucessão: $\left[\, 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \,\right]$

isto é:

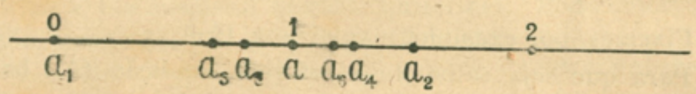
$$0 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{6}{7} \ldots \tag{7}$$

Vê-se, facilmente, que seu limite é 1, porque, para $a = 1$, viria:

$$| a_n - a | = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

mostrando que a condição $| a_n - a | < \varepsilon$ exigiria apenas que tomássemos $\frac{1}{n} < \varepsilon$ e, por consequência, $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Marcando, sôbre um *eixo*, abcissas proporcionais aos sucessivos termos de $[a_n]$, obteremos a figura abaixo, onde se evidencia a oscilação em tôrno de 1.



(Fig. 1)

Observe-se que, aos valores pares de n, correspondem números superiores à unidade e, ao contrário, aos valores ímpares de n, números inferiores à unidade.

4 — Sucessões convergentes e divergentes; regulares e oscilantes. Dada uma sucessão $[a_n]$, se existir um número a satisfazendo à condição (4), diremos que a mesma é *convergente*.

Em outros casos, escolhido arbitrariamente um número E, positivo e tão grande quanto desejarmos, ao mesmo corresponde um índice n_0 tal que:

$$| a_n | > E \qquad (8)$$

para $n \geqslant n_0$.

Diremos, então, que a sucessão $[a_n]$ é *divergente*. Escreveremos:

$$\lim a_n = + \infty$$

quando, a partir de certa ordem, seus termos se conservarem positivos e:

$$\lim a_n = - \infty$$

quando, ao contrário, a partir de certa ordem, êles se conservarem negativos (4).

Há casos, entretanto, em que os termos de $[a_n]$ variam indefinidamente de sinal. É, por exemplo, o que se dá com a sucessão $[(-1)^n n]$.

Só é cabível, nesta hipótese, escrever-se:

$$\lim | a_n | = \infty$$

Em conjunto, as sucessões *convergentes* e as que divergem para $+ \infty$ ou para $- \infty$ são denominadas *regulares*. As sucessões não *regulares* são denominadas, de um modo geral, *oscilantes* ou *dispersivas*.

Diz-se, neste último caso, que $\lim a_n$ *não existe*. É portanto *oscilante* a sucessão, acima referida: $[(-1)^n n]$ (5).

Outro exemplo interessante é constituído pela sucessão $\left[\text{sen}\ \frac{n\pi}{2} \right]$.

Para $n = 1, 2, 3$, etc., virão, como elementos correspondentes:

$$1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \ldots$$

mostrando que nenhum sentido teria o símbolo $\lim a_n$; a sucessão oscila, indefinidamente, entre os três números *1*, *0* e *— 1* (6).

5 — Consequências. Das definições adotadas e das considerações feitas, decorrem diversas consequências importantes, a saber:

a) *Sendo* $\lim a_n = a$, *teremos* $\lim (a_n - a) = 0$ *e vice-versa*. De fato, a relação:

$$| a_n - a | < \varepsilon$$

(4) Observe-se que o conceito de *limite infinito* é, apenas, uma extensão, pois, justamente nesse caso, $| a_n |$ *cresce além de qualquer limite*.

(5) Este exemplo caracteriza, verdadeiramente, as sucessões *oscilantes-divergentes*.

(6) Diz-se, neste caso, que é *oscilante-indeterminada*.

poderá ser escrita:

$$|(a_n - a) - 0| < \varepsilon$$

que mostra ser $\lim (a_n - a) = 0$. A recíproca é evidente.

b) Sendo $\lim a_n = a$ *e* $a \neq 0$, *o sinal de* a_n *coincidirá com o de* a, *a partir de certa ordem.* Bastará ver que:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

para $n \geqslant n_0$. E poderemos ainda concluir que:

$$\lim |a_n| = |a|.$$

c) Sendo $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *e* $\lim a_n = \lim c_n = \alpha$, *teremos* $\lim b_n = \alpha$. Ora, neste caso, poderemos escrever:

$$a_n - \alpha \leqslant b_n - \alpha \leqslant c_n - \alpha$$

mostrando que $|b_n - \alpha|$ não supera o maior dentre os dois números: $|a_n - \alpha|$ e $|c_n - \alpha|$. É evidente então que $\lim b_n = \alpha$.

d) Sendo $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ e $\lim a_n = 0$, *teremos, também,* $\lim b_n = 0$. Bastará ter em vista que, afirmar ser $\lim a_n = 0$, equivale a escrever, no presente caso:

$$a_n < \varepsilon$$

para $n \geqslant n_0$.

e) Sendo $\lim |a_n| = \infty$, *teremos* $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ *e vice-versa.* Com efeito, da relação:

$$|a_n| > E$$

concluimos:

$$\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{E}$$

ou melhor:

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$$

para $n \geqslant n_0$. A recíproca é evidente.

Tomemos, como exemplo, a sucessão $\left[\dfrac{1}{n}\right]$:

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \ldots$$

Teremos $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, visto que $\lim n = \infty$.

6 — Sucessões monótonas. Dizem-se *monótonas não crescentes* as sucessões em que:

$$a_n \geqslant a_{n+1}$$

e *monótonas não decrescentes* aquelas para as quais, ao contrário:

$$a_n \leq a_{n+1}$$

Tomemos, por exemplo, a sucessão $\left[\dfrac{1}{2n + (-1)^n}\right]$. Fazendo $n = 1, 2, 3$ etc., virão os elementos:

$$1 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{13} \quad \ldots$$

mostrando-nos que a mesma é *monótona não crescente.*

Entre as sucessões *monótonas não decrescentes,* deveremos incluir as *crescentes,* para as quais $a_n < a_{n+1}$. Analogamente, entre as *monótonas não crescentes,* deveremos contar as *decrescentes,* para as quais $a_n > a_{n+1}$. Poderemos ter ainda:

$$a_n = a_{n+1}$$

Diz-se, nesse caso, que a sucessão é *monótona estacionária* ou, simplesmente, *estacionária.*

UNIDADE II

FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL

32 — Evolução da idéia de função. A idéia de *função*, fundamental em todos os domínios da matemática, já foi por nós apreciada em alguns de seus aspectos, ao tratar dos polinômios em geral e ao estudar, em particular, o trinômio do 2º grau [33].

É difícil precisar-se a época em que se esboçou o conceito de função, porque, desde os passos iniciais da ciência matemática, em remota antiguidade, quando foram estabelecidas as primeiras relações entre as grandezas características dos problemas considerados, pode-se dizer que surgiu, implicitamente, a idéia de função.

Tomemos, por exemplo, a fórmula de quadratura do círculo:

$$S = \pi r^2$$

Ao apreciá-la, diremos insensivelmente que *a área é função do raio*.

Mas a *Geometria analitica* de Descartes, em 1637 [34], estabelecendo o estudo das curvas planas em geral, através de equações características, e instituindo, reciprocamente, a interpretação das equações de duas variáveis, através de representações gráficas convencionais, abriu novos horizontes à idéia de *função* que, pouco depois, em 1698, recebia, de João Ber-

---

(33) Cfr. "*Matemática — 2o Ciclo*" — 1ª *Série*, 2ª ed., *Algebra*, **2**, **3**, **41**, **42**, **43**, **44** e **45**.

(34) Descartes, em sua obra clássica, "*La Géométrie*", Leida, 1637, tratou somente do espaço de duas dimensões. O estudo das curvas reversas e das superfícies é devido a Schooten e Parent (1713) e a Clairaut (1731), seguidos por Euler, Monge e outros.

16 — Critério geral de convergência de Cauchy [23]. Da definição que adotámos para *série* e do critério geral estabelecido para as sucessões (**10**), decorre imediatamente um princípio de ampla generalidade no estudo da natureza duma série:

"É condição necessária e suficiente para que a série $\Sigma\, a_n$ *seja convergente que, a todo número* ε*, positivo e tão pequeno quanto desejarmos, corresponda um indice* n_0 *tal que tenhamos:*

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \tag{46}$$

para $n \geqslant n_0$*, sendo* p *qualquer".*

De acôrdo com (43), vemos, então, que é necessário e suficiente para que uma série seja convergente, que tenhamos:

$$|R_{n,p}| < \varepsilon \tag{47}$$

para $n \geqslant n_0$*, sendo* p *qualquer".*

Na prática, entretanto, nem sempre é de fácil aplicação êste critério. Daí o uso dos mais variados recursos nas questões relativas à convergência das séries.

ESTUDO DA NATUREZA DE ALGUMAS SÉRIES CLÁSSICAS

17 — Série de Mengoli. É do tipo $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ e poderemos, com facilidade, determinar S_n em função de n. Sempre que isso fôr possível, a natureza da série decorrerá do estudo de $\lim S_n$.

Com efeito:

$$S_n = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

(23) O *critério geral de convergência*, para as séries, é devido, verdadeiramente, a Bolzano (1817) e Abel (1826).

Desenvolvendo e simplificando, virá:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \tag{48}$$

mostrando que $\lim S_n = 1$, isto é, a série é *convergente* e tem a *soma* $S = 1$ [24].

18 — Séries geométricas. São do tipo $\Sigma \lambda^{n-1}$ e as reduzidas constituem *progressões geométricas* com o primeiro termo unitário, isto é:

$$S_n = 1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{n-1}$$

Portanto:

$$S_n = \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$$

e:

$$\lim S_n = \frac{1 - \lim \lambda^n}{1 - \lambda}.$$

E já vimos, no estudo da sucessão $[\lambda^n]$ que, só para $|\lambda| < 1$, teremos $\lim \lambda^n = 0$ (**9**, *Exercício I, e*), isto é:

$$S = \lim S_n = \frac{1}{1 - \lambda} \tag{49}$$

Para $\lambda = 1$, virá $S_n = n$, mostrando que a série se tornará *divergente*, pois $\lim S_n = +\infty$.

Para $\lambda = -1$, teremos o algoritmo:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

que conduz, alternadamente, aos valores *1* e *0*. A série se torna, pois, *oscilante-indeterminada.*

Para $\lambda > 1$, encontramos $\lim S_n = +\infty$; a série diverge para $+\infty$. Finalmente, tomando $\lambda < -1$, a série ainda divergirá, oscilando, entretanto, entre $+\infty$ e $-\infty$.

(24) Esta série é um caso particular das denominadas *séries hipergeométricas*, cuja soma, em geral, se determina com facilidade (Cfr. Rey Pastor, *"Elementos de analisis algebraico"*, 5ª ed., Madrid, 1939, pgs. 209, 397).

Comumente, entretanto, a *característica* f da função é o símbolo de uma *expressão analítica* que define e estabelece a correspondência.

Poderemos ter, então, um polinômio, uma *linha* trigonométrica, uma expressão irracional, um logaritmo etc. caracterizando a função.

34 — Observação. A definição que demos abrange as funções denominadas comumente — *unívocas* ou *univalentes*.

Mas, em muitos casos, há mais de um valor de y correspondendo a cada valor atribuido a x. E as funções são ditas, então, — *plurívocas* ou *plurivalentes*.

Em tal hipótese, é, entretanto, didático e usual, considerar-se cada determinação de y como uma função à parte, constituindo uma *ramificação* da função dada.

Colocando-nos sob êsse ponto de vista, não precisaremos, em geral, fazer referência à *univocidade da função*.

35 — Intervalos. Dados dois números quaisquer, a e b, o conjunto de *números reais* satisfazendo à condição:

$$a \leqq x \leqq b$$

chama-se *intervalo fechado*, de *extremos* a e b (39). O *intervalo* é dito *aberto*, quando se excluem os *extremos*, isto é, quando se tem:

$$a < x < b$$

Além disso, poderemos supor os casos:

$$a \leqq x < b$$
$$a < x \leqq b$$

em que se inclui, apenas, um dos *extremos*. São intervalos *abertos à direita e à esquerda*, respectivamente.

A diferença *b-a* define a *amplitude* do *intervalo*.

(39) Cantor o denominava *intervalo contínuo*.

Além dos *intervalos finitos*, delimitados por dois números reais, a e b, é possível conceber *intervalos infinitos*, tais como:

$$x \leqq a \quad \text{ou} \quad x \geqq b$$

$$x < a \quad \text{ou} \quad x > b$$

delimitados num só sentido.

Por extensão, poderemos, ainda, chamar de *intervalo* à totalidade dos números reais, que constitui um conjunto não delimitado, quer num, quer noutro sentido (40).

36 — Variável contínua; variável progressiva. Quando uma função:

$$y = f\,(x)$$

é *definida* num *intervalo*, diz-se que x é uma *variável contínua*, pois, neste caso, o *domínio* dessa variável x é constituido pela *totalidade dos números reais do intervalo* (41).

É o que ocorre, comumente, com as funções usuais de uma variável real. No entanto, poderemos ter funções definidas, somente, para valores *inteiros*, *racionais* ou, mesmo, *irracionais* de x.

De um modo geral, quando o *domínio de variabilidade* é constituido por uma sucessão $[\ a_n\ ]$, o argumento passa a denominar-se *variável progressiva* ou *variante*.

Em particular, a *variável inteira* é representada, de preferência, por n.

(40) Têm sido tentadas diversas convenções para representar caracteristicamente os intervalos. Assim, um *intervalo fechado*, de *extremos* a e b, seria $[\ a, b\ ]$ ou a |—| b; *aberto*, (a, b) ou a — b; *aberto à direita*, $[\ a, b\ )$ ou a |— b; *à esquerda* $(\ a, b\ ]$ ou a —| b. E, com o símbolo ∞, estenderíamos tal representação aos intervalos não delimitados. (Cfr. Lelio Gama, "*Introdução à teoria dos conjuntos*", Fasc. 1, Rio, 1941, pg. 23 e Amoroso Costa, "*As idéias fundamentais da matemática*", Rio, 1929, pg. 136). Essas convenções, entretanto, não têm tido uso generalizado.

(41) Tal conjunto define o *contínuo linear* (*aritmético*).

15. Estudar as descontinuidades das funções abaixo:

I) $\rho = \operatorname{sen} \dfrac{1}{\varphi}$, para $\varphi = 0$;

II) $y = e^{\frac{1}{x}}$, para $x = 0$;

III) $y = x - E(x)$, para $x = 2$;

IV) $s = \dfrac{1}{t^2}$, para $t = 0$;

V) $v = \dfrac{2k^2 + k - 3}{k^3 - k^2 + k - 1}$;

VI) $y = \dfrac{2x - 5}{3x^2 + x - 2}$.

16. Estudar a continuidade da função $f(\lambda) \equiv (1 + \lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$ no ponto $\lambda_0 = 0$.

UNIDADE III

DERIVADAS; DEFINIÇÃO; INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA E CINEMÁTICA

54 — Derivada de uma função. Seja x um ponto qualquer de um *intervalo* (a, b), onde se supõe definida a função $y = f(x)$.

Atribuido a x um *acréscimo* arbitrário Δx [59], o *acréscimo* correspondente da função, que caracteriza sua *diferença*, será [60]:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (1)$$

O limite da *razão incremental* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, para $\Delta x \to 0$, *quando existe*, define a *derivada* da função; seu valor depende do ponto considerado [61].

Para representá-la, são usuais os símbolos:

$$f'(x) \text{ (Lagrange)} \; ; \; \frac{dy}{dx} \text{ (Leibniz)} \; ; \; D f(x) \text{ (Arbogast)};$$

$$D_x f(x) \text{ (Cauchy)}$$

Podemos, portanto, escrever:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

(59) E claro que $x + \Delta x$ deverá ainda pertencer ao *intervalo* considerado.
(60) Cfr. "*Matemática — 2º Ciclo*" — 1ª *Série*, 2ª ed., *Algebra* **41**, pg. 226.
(61) Observemos que, para $\Delta x = 0$, essa relação não é determinada, pois toma a forma $\dfrac{0}{0}$, sem significado numérico.

e dizer que $f(x)$ é *derivável* no intervalo (a, b), quando, a cada ponto do mesmo, corresponde um valor determinado de $f'(x)$.

Seja, por exemplo, a função $f(x) = x^3$.

Virá:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

e:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Portanto:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

A função é *derivável* em qualquer ponto.

Ao contrário, a função:

$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}; \quad f(0) = 0$$

para a qual:

$$\Delta y = (x + \Delta x) \operatorname{sen} \frac{1}{x + \Delta x} - x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

não é *derivável* no ponto $x = 0$. De fato:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right]_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x}$$

e êsse limite *não existe*. Quando $\Delta x \to 0$, $\operatorname{sen} \frac{1}{\Delta x}$ oscila indefinidamente entre 1 e -1.

Observemos, no entanto, que, para êsse ponto $x = 0$, a função é *contínua*.

55 — Derivada infinita. Por extensão, diz-se ainda que a função é *derivável*, quando o limite é infinito.

É o que se dá com $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ no ponto $x = 1$.

Com efeito:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right]_{x=1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = + \infty$$

Diz-se, então, que a derivada é *infinita*, escrevendo-se:

$$f'(1) = + \infty$$

56 — Continuidade das funções deriváveis. *"Toda função que admite uma derivada* finita *para um dado valor* x_0 *da variável, é* contínua *nesse ponto".*

De fato, deveremos ter:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

e, por conseguinte:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x) + \delta \qquad (3)$$

sendo δ uma quantidade cujo limite é nulo, quando $\Delta x \to 0$.

Daí, tiramos:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \, [f'(x_0) + \delta]$$

Mas, sendo finito o valor $f'(x_0)$, teremos, como consequência:

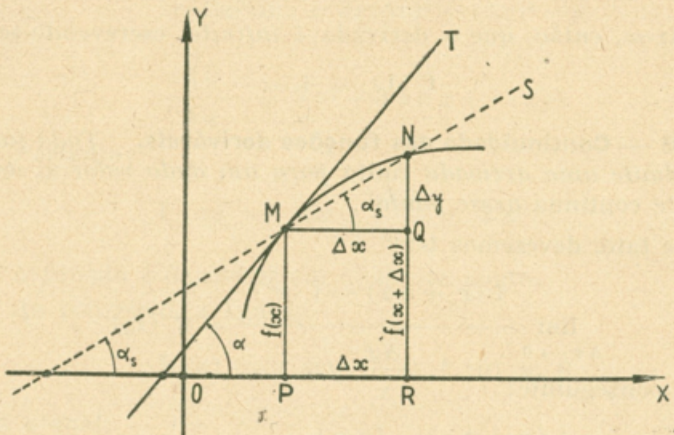
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0 \qquad (4)$$

que representa a condição para que $f(x)$ seja contínua no ponto x_0.

A recíproca, entretanto, não é verdadeira. A continuidade em um ponto não implica a derivabilidade da função, como se patenteou no segundo exemplo considerado antes.

57 — Interpretação geométrica da derivada. Consideremos, em um sistema cartesiano ortogonal, a curva representativa de uma função $y = f(x)$ (fig. 16).

Os pontos M e N, de abcissas x e $x + \Delta x$, respectivamente, determinam uma secante S que forma com $0x$ um ângulo α_s.



(Fig. 16)

Quando imaginarmos $\Delta x \to 0$, o ponto N aproximar-se-á indefinidamente de M. O limite das posições da secante S, como sabemos, será a tangente T, formando com $0x$ o ângulo α. Mas, no triângulo retângulo MNQ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_s \tag{5}$$

Por consequência:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{N \to M} \operatorname{tg} \alpha_s = \operatorname{tg} \alpha \tag{6}$$

isto é, *a derivada da função* $y = f(x)$, *correspondente a um ponto de sua curva representativa, em um sistema de eixos cartesianos ortogonais, é o coeficiente angular da tangente nesse ponto* (62).

(62) Se os eixos formarem um ângulo θ, virá $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\theta - \alpha)}$, expressão geral do *coeficiente angular* (Cfr. Roberto Peixoto, *"Elementos de Geometria Analítica"*, vol. I, 2ª ed., 1941, pg. 107).

58 — Observação. Essa interpretação geométrica nos mostra que, nos pontos de *derivada infinita*, a curva representativa da função apresenta tangente paralela a oy, pois, para os mesmos, $\operatorname{tg} \alpha = \pm \infty$.

59 — Interpretação cinemática da derivada (63). Consideremos um móvel animado de determinado movimento. Seja

$$l = f(t)$$

a lei que o define.

Suponhamos que, no instante t, l represente o espaço percorrido.

No instante $t + \Delta t$, teremos o espaço $l + \Delta l$ onde:

$$\Delta l = f(t + \Delta t) - f(t)$$

A relação:

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{7}$$

representará a *velocidade média* com que foi percorrido o espaço Δl.

Se tomarmos o limite, para $\Delta t \to 0$, teremos o que se chama a *velocidade num instante* t (*instantânea* ou *verdadeira*).

Portanto, *a derivada, do espaço em relação ao tempo, representa a velocidade no instante considerado.*

EXEMPLO — *"No movimento definido pela lei* $l = a + bt + ct^2$, *determinar a velocidade em um dado instante"*.

Ora, sendo:

$$l = a + bt + ct^2 \tag{8}$$

(63) A introdução, em fins do século XVII, do conceito de *derivada*, devido principalmente a G. W. Leibniz e I. Newton, constituiu um dos maiores passos que já deu a Matemática. O primeiro partiu do problema geométrico das tangentes; o segundo, do conceito cinemático de *fluxão*. A denominação *derivada* foi criada por Leibniz, em 1677. A Newton deve-se ainda o *método das primeiras e últimas razões* (método dos limites) e a notação $\dot{y}$ que, caindo em desuso, voltou, hoje, a ser empregada na Mecânica. J. L. Lagrange, foi um dos continuadores da concepção dêsses dois grandes gênios. Entre os trabalhos de crítica mais conhecidos temos o de Carnot, *"Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal"*, (4ª ed., Paris, 1860).

onde l é o espaço percorrido; t, o tempo e a, b, c, coeficientes determinados, teremos:

$$\Delta l = a + b\,(t + \Delta t) + c\;(t + \Delta t)^2 - a - bt - ct^2$$

e, por consequência :

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = b + 2ct + c\,\Delta t$$

Logo :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = b + 2ct \qquad (9)$$

60 — Diferencial de uma função. Representando por dy a *diferencial* da função $y = \mathrm{f}\,(x)$, tem-se por definição:

$$dy = \mathrm{f}'(x)\;\;\Delta x \qquad (10)$$

Tomemos, entretanto, o caso particular da função $y = x$. Visto que $\Delta y = \Delta x$, virá:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

e, por consequência:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

mostrando que a derivada dessa função é sempre a unidade.

Então, de acôrdo com (10), sua *diferencial* será:

$$dx = \Delta x$$

Substituamos, portanto, em (10), o *acréscimo* Δx, pela *diferencial* dx da variável. Virá para expressão da *diferencial de uma função* $y = \mathrm{f}\,(x)$:

$$dy = \mathrm{f}'\;(x)\;\;dx \text{ [64]} \qquad (11)$$

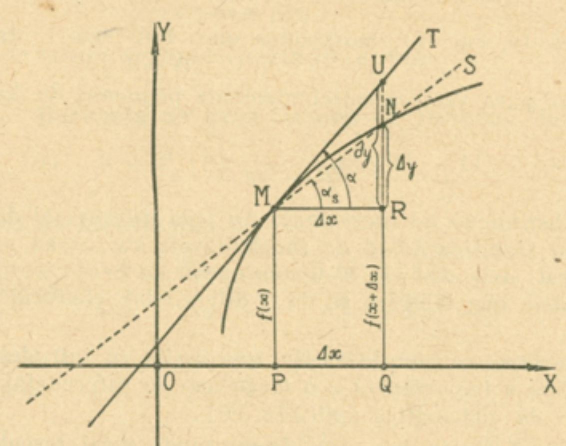
de onde:

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{f}'\,(x) \qquad (12)$$

(64) Esse conceito simples de *diferencial* é devido a Cauchy (1843). A idéia original de Leibniz (1684), complexa e metafísica, foi posta à margem.

A expressão (11) nos mostra que o *cálculo das diferenciais* reduz-se ao *cálculo das derivadas*.

61 — Interpretação geométrica da diferencial. Consideremos, em uma curva de equação $y = \mathrm{f}\,(x)$, dois pontos M e N de abcissas, respectivamente, x e $x + \Delta x$ (fig. 18) e imaginemos traçadas a secante S e a tangente T.



(Fig. 18)

O triângulo MRU nos dá:

$$RU = \Delta x \quad \mathrm{tg}\,\alpha$$

Mas, $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{f}'\,(x)$, de onde:

$$RU = \mathrm{f}'\,(x) \quad \Delta x$$

mostrando que a *diferencial* dy constitui o acréscimo RU da ordenada da tangente.

62 — Observação. *A diferencial*, como se vê, é, em geral, *finita* e *determinada*, tal como a *diferença* Δy. Mas, quando $\Delta x \to 0$, uma e outra tendem para zero. É usual, então, chamar-se a *diferencial*, de *acréscimo elementar* ou *instantâneo* da função.

Ora, da fig. 18, tiramos imediatamente:

$$\Delta y = \Delta x \;\mathrm{tg}\;\alpha_s$$

$$dy = \Delta x \;\mathrm{tg}\;\alpha$$

23. Determinar os tipos gerais de *equações recíprocas* do 4.° grau.

24. Calcular as raízes das equações abaixo, sabendo que as mesmas admitem *raízes iguais* :

I) $x^3 - 9x^2 + 27\,x - 27 = 0;$

II) $y^4 - y^3 - 3y^2 + 5y - 2 = 0;$

III) $t^5 + t^4 - 5t^3 - t^2 + 8t - 4 = 0;$

IV) $y^6 + 2y^5 - 4y^4 - 6y^3 + 7y^2 + 4y - 4 = 0.$

25. Dada a equação $t^4 - 2\lambda t^2 + 8t - 3 = 0$, determinar λ de modo que admita uma *raiz tripla.* Calcular essa raiz.

26. Calcular as *raízes comuns* das equações:

I) $t^4 - 5t^3 + 5t^2 + 5t - 6 = 0$ e $2t^3 - 9t^2 + 7t + 6 = 0;$

II) $x^4 - 16x^3 + 91x^2 - 216x + 180 = 0$ e $x^4 - 22x^3 +$
$+ 179x^2 - 638x + 840 = 0.$

PARTE II — GEOMETRIA

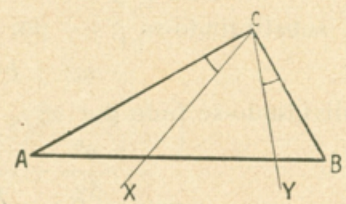
Euclides Roxo

UNIDADE VI

TEOREMA DE STEWART E SUAS APLICAÇÕES AO CÁLCULO DAS LINHAS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO.

1 — Definições. *Chama-se* CEVIANA (1) *qualquer reta traçada no plano de um triângulo por um de seus vértices.* O *comprimento* de uma ceviana é o segmento de tal reta compreendido entre o vértice e o lado oposto. Este é a *base* em relação à ceviana. *Pé* de uma ceviano é a sua intersecção com a base.

As cevianas mais notáveis num triângulo são as *alturas*, as *medianas* e as *bissetrizes*.



(Fig. 1)

Cevianas isogonais são duas cevianas que partem de um mesmo vértice e formam ângulos iguais com os lados concorrentes nesse vértice; elas são simétricas em relação à bissetriz que parte do vértice comum. Tais são CX e CY no triângulo ABC.

2 — Teorema de Stewart. *Entre as medidas algébricas dos segmentos orientados determinados por três pontos colineares* B, C, D (2) *e um outro ponto qualquer*, A, *existe a relação*.

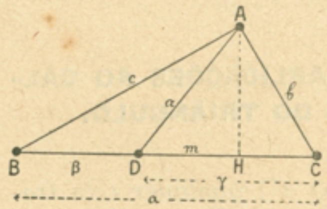
$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}\,.\,\overline{BD}} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CB}\,.\,\overline{CD}} + \frac{\overline{AD}^2}{\overline{DB}\,.\,\overline{DC}} = 1$$

---

(1) Também se diz, *transversal angular*. A denominação *ceviana*, devida a *Poulain*, é derivada do nome de *João Ceva*, matemático italiano de meados do sec. XVII e autor de obras notáveis, mormente sôbre a Geometria pura dos antigos.

(2) Supõem-se êsses pontos marcados sôbre um eixo, numa ordem qualquer.

Tracemos AH perpendicular a BC e ponhamos, para os módulos dos segmentos considerados, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $BD = \beta$, $AD = \alpha$, $DC = \gamma$, $DH = m$.



(Fig. 2)

Aplicando aos triângulos ABD e ACD os teoremas que nos dão a expressão do quadrado de um lado (3), obtemos

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta m \qquad (1)$$

$$b^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\gamma m \qquad (2)$$

Adicionando-se, depois de multiplicar (1) por γ e (2) por β, para eliminar m, temos

$$c^2\gamma + b^2\beta = \alpha^2(\beta+\gamma) + \beta\gamma(\beta+\gamma)$$

ou, substituindo-se $\beta+\gamma$ por a e transpondo-se,

$$-a\alpha^2 + b^2\beta + c^2\gamma = a\beta\gamma$$

e, dividindo-se tudo por $a\beta\gamma$,

$$-\frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{b^2}{a\gamma} + \frac{c^2}{a\beta} = 1 \qquad (3)$$

Tomando BC para sentido positivo, temos

$\overline{BC} = a$, $\overline{BD} = \beta$, $\overline{CB} = -a$, $\overline{CD} = -\gamma$, $\overline{DB} = -\beta$, $\overline{DC} = \gamma$

e a igualdade (3) se torna

$$\boxed{\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}\,.\,\overline{BD}} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CB}\,.\,\overline{CD}} + \frac{\overline{AD}^2}{\overline{DB}\,.\,\overline{DC}} = 1} \qquad (4)$$

que é a *relação de Stewart* (4).

(3) *Matemática Ginasial*, 4.ª Série, Geom. **41** e **42** (2.ª ed.). Assim indicamos as referências à 4.ª Série (Parte de Geometria) da *Matemática Ginasial* de autoria dos Prof. Euclides Roxo, Cecil Thiré e Melo e Souza.

(4) MATTHIEU STEWART (1717—1785, discípulo de SIMSON e de MAC-LAURIN, sucessor deste na Universidade de Edimburgo, autor de trabalhos notáveis de Geometria pura, num dos quais se encontra o teorema em questão. Este foi também apresentado por Robert Simson, quasi ao mesmo tempo, e, mais tarde, por TH. SIMPSON, por EULER e CARNOT. A propósito deste teorema diz M. CHASLES em seu *Aperçu historique des méthodes en Géométrie* (3ème edition, Gauthier — Villars, Paris, 1889, pág. 175): "Par ces citations, on voit que cette proposition, à peu près inconnue de nos jours, mériterait bien de prendre place dans les éléments de la Géometrie".

EXEMPLOS — I. *Os lados de um triângulo*, ABC, *são* a= 6m, b= = 3m, c = 5m. *Calcular o comprimento da ceviana que divide a na razão* ¼ *a partir de* B.

Chamando x o comprimento pedido, temos (fig. 2):

$$AB = c,\ AC = b,\ AD = x,\ BC = a,\ BD = \frac{1}{4}a,\ CD = \frac{3}{4}a$$

Substituindo na relação de Stewart e notando que

$$\overline{CB} = -a,\ \overline{CD} = -\frac{3}{4}a$$

obtemos

$$\frac{4c^2}{a^2} + \frac{4b^2}{3a^2} - \frac{16x^2}{3a^2} = 1$$

ou

$$\frac{3c^2+b^2}{4} - x^2 = \frac{3a^2}{16}$$

e

$$x^2 = \frac{1}{4}\left(b^2 + 3c^2 - \frac{3a^2}{4}\right)$$

Calculando, achamos $x = \frac{1}{2}\sqrt{57} = 3{,}774\text{m}$

II. *Os lados de um triângulo* ABC *medem* a = 8m, b = 7m, c = 2m. *Determinar sobre o lado maior o pé de uma ceviana de comprimento* d = 5m.

Chamando x a distância, BD, do pé da ceviana ao vértice B, temos

$$AB = c,\ AC = b,\ BC = a,\ BD = x,\ CD = a - x.$$

Aplicando a relação de Stewart, obtemos

$$\frac{c^2}{ax} + \frac{b^2}{a(a-x)} - \frac{d^2}{x(a-x)} = 1$$

ou $c^2(a-x) + b^2x - ad^2 = ax(a-x)$

ou, ainda,

$$ax^2 - (a^2 - b^2 + c^2)x + a(c^2 - d^2) = 0$$

Substituindo a, b, c, e d, por seus valores achamos

$$8 \cdot x^2 - 19\,x - 168 = 0$$

equação que resolvida nos dá

$$x' = 5{,}92\text{m} \text{ e } x'' = -3{,}54\text{m}$$

As duas raizes são aceitáveis e há 2 soluções.

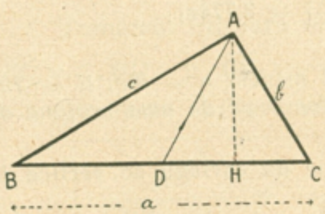
A primeira raiz corresponde a um ponto D situado entre B e C, a 5,92m de B; a segunda a um ponto D', situado 3,54m à esquerda de B.

3 — Aplicação ao cálculo das linhas notáveis de um triângulo. Admitindo-se uma condição particular entre os elementos da figura $ABDC$ (**2**) e introduzindo-se tal condição na *relação de Stewart*, obtém-se uma propriedade da figura considerada.

Vamos admitir que AD é uma das cevianas notáveis do triângulo ABC e assim obteremos as expressões das linhas notáveis de um triângulo em função dos lados.

4 — Cálculo das medianas. Supondo que AD é a mediana que parte do vértice A, devemos ter $\overline{DC} = -\overline{DB}$.

Substituindo, na *relação de Stewart*, AB, AC, BC, CB, BD, DB, DC e CD respectivamente por c, b, a, $-a$, $\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ e $-\frac{a}{2}$, temos



(Fig. 3)

$$\frac{2\,c^2}{a^2} + \frac{2\,b^2}{a^2} - \frac{4\,\overline{AD}^2}{a^2} = 1$$

ou

$$\frac{b^2 + c^2}{2} - \overline{AD}^2 = \frac{a^2}{4}$$

ou, ainda,

$$\frac{b^2 + c^2}{2} = \overline{AD}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Assim, *a semi-soma dos quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao quadrado da metade do terceiro lado, mais o quadrado da mediana correspondente* (5).

Da última igualdade acima se tira

$$\overline{AD}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \qquad (5)$$

Chamando-se m_a o comprimento da mediana relativa ao lado a, temos a fórmula

$$\boxed{m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}}$$

Analogamente, obteríamos:

$$m_b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \quad \text{e} \quad m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

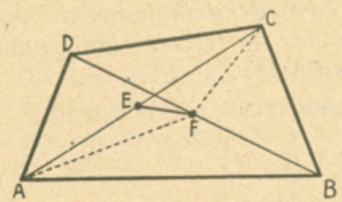
Estas fórmulas fornecem as medianas do triângulo quando se conhecem os três lados.

Corolário. *O lugar geométrico dos pontos, para os quais é constante a soma dos quadrados de suas distâncias a dois pontos fixos,* B *e* C, *é um círculo que tem o centro no meio do segmento* BC.

Com efeito, a igualdade (5) nos mostra que, se ficar fixa a base BC do triângulo e variar a posição do ponto A de modo que $b^2 + c^2$, ou $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$, se conserve constante, a mediana AD terá um comprimento constante e A descreverá um círculo.

(5) Este teorema já foi demonstrado diretamente (sem auxílio do teorema de Stewart) no curso ginasial (*Matemática Ginasial*, 4.ª Série, Geom. **43**).

Aplicação: I — *Em qualquer quadrilátero, a soma dos quadrados dos lados é igual à soma dos quadrados das diagonais, mais quatro vezes o quadrado do segmento que liga os meios das diagonais.* (Teorema de Euler).



(Fig. 4)

Sejam E e F os meios das diagonais do quadrilátero $ABCD$. Tracemos EF e liguemos o meio F, de uma diagonal, aos extremos, A e C, da outra. Os triângulos BCD, ABD e AFC nos dão (**4**).

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\,\overline{AF}^2 + 2\,\overline{BF}^2$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\,\overline{CF}^2 + 2\,\overline{BF}^2$$

$$2\,\overline{AF}^2 + 2\overline{CF}^2 = 4\,\overline{AE}^2 + 4\,\overline{EF}^2$$

Somando membro a membro e reduzindo, achamos

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 4\,\overline{AE}^2 + 4\,\overline{BF}^2 + 4\,\overline{EF}^2$$

Mas $AC = 2\,AE$ e $BD = 2\,BF$; logo tem-se

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\,\overline{EF}^2 \qquad (6)$$

o que traduz simbolicamente a conclusão do enunciado.

II. *Em todo paralelogramo, a soma dos quadrados dos lados é igual à soma dos quadrados das diagonais, e reciprocamente.*

Com efeito: é condição necessária e suficiente, para um quadrilátero ser paralelogramo, que as diagonais se cortem ao meio, isto é, que seja $EF = 0$.

5 — Diferença dos quadrados de dois lados de um triângulo. Se, nas igualdades (1) e (2) do número **2**, substituirmos β por $\frac{a}{2}$, γ por $\frac{a}{2}$ e subtrairmos membro a membro, obteremos

$$c^2 - b^2 = 2am$$

ou

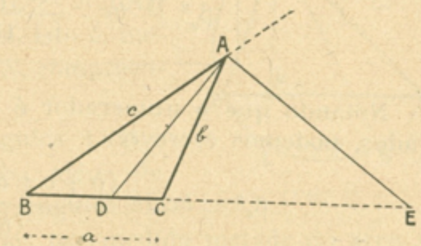
$$c^2 - b^2 = 2a \,.\, DH \qquad (7)$$

Assim, *a diferença dos quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao duplo produto do terceiro lado pela projeção, sobre esse lado, da mediana correspondente.*

Corolário. *O lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais é constante a diferença dos quadrados de suas distâncias a dois pontos fixos do mesmo plano,* B *e* C, *é uma perpendicular à reta* BC.

Com efeito, a igualdade (7) nos mostra que, se ficar fixo BC, ou a, e variar a posição do ponto A de modo que a diferença $c^2 - b^2$, ou $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$, se conserve constante, a distância DH também ficará constante, o ponto H manter-se-á fixo e o ponto A descreverá a perpendicular AH.

6 — Cálculo das bissetrizes. Seja AD a bissetriz do ângulo A do triângulo ABC. O ponto D determina sôbre BC segmentos proporcionais a AB e AC (6); tem-se, pois,



(Fig. 5)

$$\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{BD + DC}{b + c} = \frac{a}{b + c}$$

donde
$$BD = \frac{ac}{b + c}\,, \quad DC = \frac{ab}{b + c} \qquad (7)$$

(6) *Matemática Ginasial*, 4.ª Série, Geom., **11**, (2.ª ed.).

Multiplicados ambos os membros da *relação de Stewart* por $\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}$, vem (7)

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{CD} - \overline{AC}^2\cdot\overline{BD} + \overline{AD}^2\cdot\overline{BC} = \overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD} \qquad (8)$$

Substituindo, nessa igualdade, as medidas algébricas dos segmentos por suas expressões em a, b, c, obtemos

$$c^2\cdot -\frac{ab}{b+c} - b^2\cdot\frac{ac}{b+c} + \overline{AD}^2\cdot a = a\cdot\frac{ac}{b+c}\cdot -\frac{ab}{b+c}$$

ou, dividindo por a,

$$-\frac{c^2b}{b+c} - \frac{b^2c}{b+c} + \overline{AD}^2 = -\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

donde:

$$\overline{AD}^2 = \frac{b^2c + bc^2}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \qquad (9)$$

ou, chamando-se β_a a medida da bissetriz do ângulo interno A, temos a fórmula:

$$\boxed{\beta_a^2 = bc\cdot\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}} \qquad (10)$$

Notando que o numerador é uma diferença de dois quadrados, podemos escrever

$$\beta_a^2 = bc\cdot\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

Designando por p o semi-perímetro do triângulo ou pondo $a+b+c = 2p$ e, portanto, $b+c-a = 2p-2a = 2(p-a)$, podemos escrever

$$\beta_a^2 = bc\cdot\frac{4p\,(p-a)}{(b+c)^2}.$$

(7) Alguns autores apresentam sob esta forma a relação de STEWART.

Donde a fórmula

$$\boxed{\beta_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)}} \qquad (11)$$

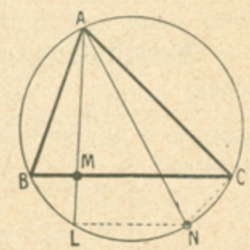
Análogamente, obteríamos

$$\beta_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp\,(p-b)} \quad \text{e} \quad \beta_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp\,(p-c)}.$$

Estas formulas permitem calcular as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo quando se conhecem os lados.

7 — Relações métricas entre cevianas isogonais. *O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto de uma ceviana qualquer pela corda isogonal do círculo circunscrito.*

Tracemos no triângulo ABC uma ceviana qualquer AM, que prolongamos até à sua intersecção L com o círculo circunscrito. Por L tracemos LN paralela a BC; é evidente que a corda AN é isogonal da ceviana AM, pois, temos $\wedge\ NAC = \wedge\ LAB$ como tendo a mesma medida, isto é, metade dos arcos iguais, BL e CN, compreendidos entre paralelas.



(Fig. 6)

Liguemos CN. Os triângulos ABM e ACN são semelhantes pois, além de $\wedge\ LAB = \wedge\ NAC$, teem os ângulos em B e N iguais por terem ambos por medida metade do arco AC. De tal semelhança resulta

$$\frac{AB}{AN} = \frac{AM}{AC}$$

donde

$$AB\cdot AC = AM\cdot AN$$

igualdade que exprime a afirmação do enunciado.

UNIDADE VII

TRANSFORMAÇÃO DE FIGURAS

28 — Transformações geométricas. *Transformar* uma figura é substituí-la por outra que da primeira se deduz por uma lei determinada.

Uma das figuras se diz então *transformada* da outra.

Por meio de uma transformação substitui-se muitas vezes uma dada figura por outra em que certas propriedades se tornam evidentes ou suas demonstrações se tornam mais simples. A transformação geométrica constitui, além disso, um dos recursos fundamentais na resolução de problemas geométricos.

Entre as transformações mais importantes, estão os *deslocamentos*, a *simetria*, a *homotetia*, a *semelhança* e a *inversão*, as quais estudaremos a seguir e que são ditas *transformações pontuais*.

Nestas transformações a cada ponto, A, de uma das figuras corresponde um ponto, A', da outra. Os pontos A e A' se dizem *homólogos*.

29 — Deslocamentos. Dadas duas figuras congruentes e distintas, F e F', podemos considerá-las como duas posições da mesma figura que *se desloca* no espaço, sem se deformar. Diremos, então, que F' *é a transformada de* F *por um deslocamento,* e vice-versa.

TRANSLAÇÃO

30 — Definições. Dado um vetor livre, $\vec{u}$, diz-se que *um ponto* A *sofre a translação* [21] $\vec{u}$ quando A descreve um segmento AA' equipolente a $\vec{u}$.

---

(21) Empregaremos sempre o termo *translação* com o sentido de *translação rectilínea*, pois somente esta nos interessa do ponto de vista puramente geométrico.

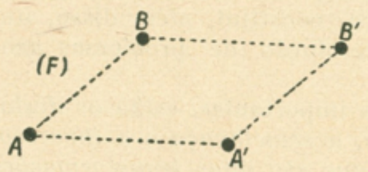
Dados dois pontos quaisquer, A e A', podemos sempre dizer que A' resulta de A pela translação $\vec{u} = A' - A$. (22).

Diz-se que *uma figura sofre uma translação* $\vec{u}$, quando todos os seus pontos sofrem a mesma transformação $\vec{u}$.

31 — Propriedades da translação. I. *Se F' é a transformada de uma figura F, por translação, qualquer segmento orientado de F' é equipolente ao segmento homólogo de F.*

Em outras palavras, *durante uma translação, todos os segmentos da figura se deslocam paralelamente a si mesmos.*

Sejam A e B dois pontos quaisquer de F e A' e B' os pontos homólogos de F'.



(Fig. 21)

De acordo com a definição de translação, os segmentos $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$ são equipolentes.

O quadrilátero $AA'BB'$ é, pois, um paralelogramo, logo $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{B'B'}$ são equipolentes.

E' muito fácil mostrar que, reciprocamente, *se qualquer segmento de uma figura F é equipolente a um segmento de F', F se transforma em F' por uma translação.*

II. Da propriedade I, resulta imediatamente que, na transformação de F em F' por translação, a três pontos não-colineares A, B, C *de* F, correspondem, em F', três pontos A', B', C' que formam um triângulo congruente ao triângulo $A\,B\,C$.

Dado um outro ponto qualquer, M, de F, e designado por M' seu homólogo em F', a figura $A'B'C'M'$ será congruente à figura $ABCM$. Com efeito:

a) Se M está no plano de ABC, a coincidência de ABC e $A'B'C'$ acarretará imediatamente a de M e M', uma vez que qualquer dos triângulos que tenha como vértices três dos pontos A, B, C, M é congruente ao de vértices homólogos em F'.

(22) *Matemática* — 2.º *Ciclo* 2.ª Série, Unidade VI, **3**.

b) Se M não está no plano de ABC, os triedros $A.\,BCM$ (23) e $A'.\,B'C'M'$ teem, como faces homólogas, ângulos de lados paralelos e de mesmo sentido (24) e são, portanto congruentes. Da congruência dêsses triedros e das igualdades $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AM = A'M'$, resulta a coincidência dos tetraedros $ABCM$ e $A'B'C'M'$.

Assim, será sempre possivel colocar as duas figuras F e F' numa posição tal que, ao mesmo tempo, qualquer dos pontos, M, de F, coincida com seu homólogo, M', de F'. De fato, fixados três pontos quaisquer não-colineares, A, B, C, de F, qualquer dos tetraedros $ABCM$ será, como vimos, congruente, a seu homólogo $A'B'C'M'$ e a coincidência de um par de tetraedros homólogos acarreta a de todos os outros.

Conclusão: *duas figuras, deduzidas uma da outra por translação, são congruentes.*

Por isso, classificamos a translação como um deslocamento.

32 — Composição de translações. *A sucessão de duas translações equivale a uma translação.*

Com efeito, se A e B, A' e B', A'' e B'' são respectivamente pontos de F, de F' e de F'', tais que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''},$$

daí resulta $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A''B''}$

Conclusão: transformar sucessivamente uma figura F por várias translações $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,... equivale a transformar F por uma translação única, $\vec{r}$, que é a *resultante* de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,...

Para se *comporem várias translações,* ou para se achar a sua resultante, basta que se somem geometricamente os vetores representativos das translações dadas.

(23) Triedro de vértice A e arestas AB, AC, AM.
(24) *Matemática* — 2.º *Ciclo,* 1.ª Série, Unidade VI, **99** (2.ª ed.)

Às translações se aplicam as propriedades dos vetores. Assim, *a resultante de duas ou mais translações é independente da ordem em que se efetuam*.

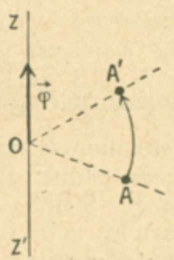
33 — Translação no plano. Quando a uma figura, *F*, se imprime uma translação, $\vec{u}$, em seu próprio plano, todos os pontos de *F* descrevem segmentos situados em tal plano e a figura não sai dêste.

Diz-se, então, que *a figura plana* F *sofre uma translação no plano* ou *se transforma por uma translação no plano*.

E' fácil concluir do exposto, que, para que uma figura plana sofra uma translação em seu plano, basta que uma reta da mesma escorregue sôbre uma reta fixa do plano.

ROTAÇÃO

34 — Definições. Dado um vetor $\vec{\varphi}$, localizado em um eixo, diz-se que um ponto A, sofre a rotação $\vec{\varphi}$, quando descreve, num plano perpendicular ao eixo, da direita para a esquerda de um observador identificado com $\vec{\varphi}$, [25] um arco de círculo de φ radianos e de centro no eixo.



(Fig. 22)

Diz-se que uma figura F *sofre uma rotação* $\vec{\varphi}$, quando todos os seus pontos sofrem a mesma rotação $\vec{\varphi}$.

A figura *F'*, que assim se obtém, diz-se *a transformada de* F *pela rotação* $\vec{\varphi}$. O suporte de $\vec{\varphi}$ se diz *eixo de rotação* e o ângulo cuja medida é φ, *ângulo da rotação*.

(25) Um observador estendido ao longo de $\vec{\varphi}$ ccom os pés dirigidos para a origem e a cabeça para a extremidade.

Destas definições, resulta imediatamente que, se o eixo *z'z* é considerado como pertencendo a uma das figuras, *F*, êle se transforma em si mesmo quando *F* se transforma em *F'*. Em outras palavras: *zz'* é o seu próprio homólogo em *F* e *F'*.

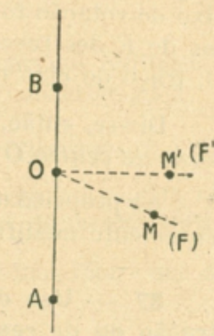
35 — Propriedades da rotação. Observemos prèviamente que, *se duas figuras congruentes*, F *e* F', *teem dois pontos comuns*, A *e* B, *todos os pontos da reta* AB *são comuns a* F *e* F'. Com efeito, se *C* é um terceiro ponto, pertencente a *AB*, resulta, dos postulados da reta, que *C'*, homólogo de *C* em *F'*, também pertence a *AB* e, como os segmentos *AC* e *A'C'* são iguais e de mesmo sentido, *C* coincide com *C'*.

I. *Quando uma figura se desloca da posição* F *para a posição* F', *de modo que dois de seus pontos*, A *e* B, *se conservem fixos, ela sofre uma rotação cujo eixo coincide com* AB. [26]

Da observação feita acima decorre que a reta *AB* se conserva fixa em tal deslocamento.

Sejam, então, *M* e *M'* dois pontos homólogos de *F* e *F'*, não pertencentes à reta *AB*, e *O* a projeção ortogonal de *M* sôbre *AB*.

Como, por hipótese, *F'* resulta de *F* por um deslocamento, *F* e *F'* são congruentes. Temos, então, $\widehat{MOB} = \widehat{M'OB}$ e $OM = OM'$. Assim, no deslocamento suposto, o ponto *M* descreve, num plano perpendicular a *AB*, um arco de círculo de centro na reta *AB*, isto é, sofre uma rotação $\vec{\varphi}$, sendo φ igual à medida de $\widehat{MOM'}$ em radianos.

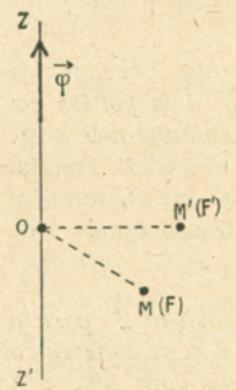


(Fig. 23)

II. Sejam *M* um ponto da figura *F* e *M'* seu homólogo na figura *F'*, deduzida de *F* pela rotação $\vec{\varphi}$, de eixo *z'z*.

(26) E' comum adotar-se esta propriedade como definição de rotação, dizendo-se: *rotação de uma figura é todo deslocamento em que dois de seus pontos, ou dois pontos a ela invariàvelmente ligados, se conservam fixos.*

Da definição de rotação (**34**), se infere que M e M' se acham num mesmo plano perpendicular a $z'z$, num ponto O, e, portanto, os ângulos $\widehat{MOz}$ e $\widehat{M'Oz}$ são retos.



(Fig. 24)

Podemos, então, deslocar F de modo que se faça coincidir $\widehat{MOz}$ com $\widehat{M'Oz}$, e, portanto, M com M', conservando-se fixo o lado comum Oz e, portanto, a reta $z'z$. Ora, tal deslocamento é, de acôrdo com a propriedade I, uma rotação de eixo $z'z$ de ângulo $\widehat{OM, OM'} = \varphi$ e coincide, pois, com a rotação $\vec{\varphi}$ que, supusemos, transforma F em F'.

Conclusão: *duas figuras, deduzidas uma da outra por uma rotação, são congruentes.* Por isso, classificamos a rotação como um deslocamento.

36 — Rotação no plano. Da definição de rotação (**34**) se conclui imediatamente que a transformada de uma figura plana, F, por uma rotação $\vec{\varphi}$, só estará no plano P, da figura F, se o eixo de rotação fôr perpendicular a P. Neste caso, todos os pontos de F descrevem arcos de círculo de φ radianos e de centro O, traço do eixo de rotação no plano P.

Diz-se, então, que *a figura* F *sofre, em seu plano, uma rotação de centro* O.

As propriedades estudadas (**35**), com o enunciado convenientemente modificado, são verdadeiras neste caso.

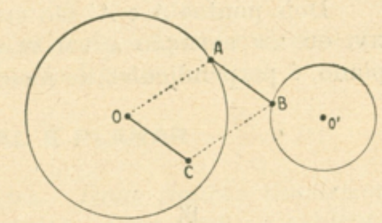
37 — Uso dos deslocamentos como método de demonstração ou de resolução de problemas. Conforme acentuámos no começo deste capítulo, o uso das transformações permite muitas vezes simplificar as propriedades de uma figura, substituindo-a por sua transformada, e, desse modo, facilita a demonstração de um teorema ou a resolução de um problema.

Vejamos um exemplo do emprego de um deslocamento, o qual permite dar, a certos elementos de uma figura, uma posição mais cômoda, sem alterar a grandeza desses elementos.

Entre dois círculos dados, O *e* O', *inscrever um segmento,* AB *de grandeza e direção dadas.*

Suponhamos o problema resolvido e seja AB o segmento procurado.

Imprimindo-se a AB a translação AO, obtemos o segmento equipolente OC. Daí a seguinte resolução: pelo centro O de um dos círculos, traça-se um segmento OC com a grandeza e a direção dadas; do ponto C como centro e com raio igual ao do círculo O descreve-se um arco que corta o círculo O' em B; constrói-se o paralelogramo sôbre OC e CB; o lado AB, oposto a OC é o segmento procurado.



(Fig. 25)

Exercícios propostos

1. Achar a rotação que transforme um segmento retilíneo em outro segmento igual. Em que caso o problema é indeterminado?

Mesma questão para duas semi-retas e dois semi-planos.

2. Construir o eixo de rotação que transforme um ângulo retilíneo, AOB, em outro ângulo dado, $A'OB'$, igual e de mesmo vértice.

3. Quais são os diferentes deslocamentos de uma figura que deixam inalterada uma reta dessa figura?

4. Para que o deslocamento de uma figura indeformavel seja uma translação é necessário e suficiente que três pontos não colineares dessa figura descrevam retas paralelas.

5. Para que o deslocamento de uma figura indeformavel seja uma rotação, é necessário e suficiente que três pontos não colineares dessa figura descrevam arcos de círculo de mesmo eixo.

2. A projeção de uma hélice circular sôbre um plano paralelo ao eixo admite, como centro de simetria, qualquer ponto em que ela encontre a projeção do eixo.

Sugestão: resulta do exercício precedente.

3. Se, sobre a superfície de um cilindro de revolução se traçam duas hélices que se cortem ortogonalmente, a circunferência da base é média proporcional entre os passos das duas hélices.

4. Exprimir o comprimento de um arco de hélice em função de sua projeção horizontal e de uma das seguintes quantidades:

a) a diferença das ordenadas de suas extremidades;

b) o passo da hélice;

c) o ângulo que formam as tangentes com as geratrizes.

Sugestão: considerar o ângulo plano cujo enrolamento sôbre o cilindro produz a hélice.

PARTE III — GEOMETRIA ANALÍTICA

Roberto Peixoto

UNIDADE IX

Noções fundamentais: — 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abcissa sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância entre dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

NOÇÕES FUNDAMENTAIS. CONCEPÇÃO DE DESCARTES

1 — Concepção de Descartes. A GEOMETRIA é a parte da Matemática que estuda as propriedades das figuras e as relações que estas figuras guardam entre si (1).

Na constituição da Geometria podemos seguir duas marchas.

A *primeira* consiste em considerar cada figura geométrica, logicamente definida, e estudar tôdas as questões geométricas relativas a esta figura. Assim, quando estudamos a circunferência de círculo, cuidamos do traçado das suas tangentes, da sua retificação, da determinação da área limitada. Obtemos soluções particulares que dizem respeito apenas à circunferência de círculo. Se quisermos depois abordar o estudo da elípse, por exemplo, e cuidar dos mesmos problemas, teremos que recomeçar e, pelas propriedades peculiares a esta outra curva, concluir os processos da determinação das suas tangentes, da sua retificação, da área limitada, surgindo soluções que servirão sómente à elípse. Cuidando ainda de qualquer outra curva, iremos encontrando outras soluções dependentes sempre da forma da curva considerada.

A *segunda* marcha consiste em considerar cada *questão geométrica* isoladamente e resolvê-la de modo aplicável a qualquer figura que comporte esta questão. Assim, no problema da tangente, estudamos, não o traçado da tangente a esta ou àque-

(1) Geometria Analítica de duas dimensões. Roberto Peixoto. Editora Minerva. Rio de Janeiro.

la curva, em particular, mas o fenômeno da tangência, fazendo abstração da forma da curva. Resolvido o problema de modo geral, o traçado da tangente a uma dada curva nada mais é que um caso particular.

Na primeira marcha os métodos diferem com os *objetos*, enquanto na segunda com os *assuntos*. Naquela temos a *geometria elementar, preliminar, grega* ou *euclideana*, puramente *objetiva*; nesta temos a *geometria geral, moderna, analítica* ou *cartesiana*, essencialmente *subjetiva*.

A Geometria Analítica é comumente definida como a parte da Matemática na qual se aplica a análise na resolução das questões geométricas. É a definição clássica da maioria dos tratados. Alguns professores, porém, preferem o modo por que apresentamos a concepção cartesiana, no sentido dela realizar a tranformação das questões de forma da geometria euclideana em questões de grandeza, restringindo a dependência entre a forma e a extensão à relatividade da posição de pontos.

2 — Divisão da Geometria Analítica. O estudo da Geometria Analítica é feito em três partes :

a) *geometria analítica de uma dimensão ou geometria do eixo*, que estuda as propriedades dos pontos localizados em um eixo;

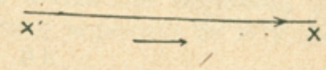
b) *geometria analítica de duas dimensões ou geometria analítica do plano*, que estuda as figuras que têm todos os elementos num mesmo plano;

c) *geometria analítica de três dimensões ou geometria analítica do espaço*, que estuda as figuras no espaço de três dimensões.

3 — Reta orientada. Eixo. Semi-eixos (2). RETA ORIENTADA é uma reta na qual escolhemos arbitrariamente um sentido de percurso para um ponto móvel que nela se desloque. Este sentido é chamado *positivo* e o sentido contrário é o sentido *negativo*.

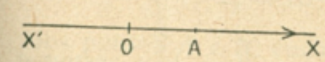
(2) Cálculo Vetorial — Roberto Peixoto. Editora Minerva — Rio de Janeiro.

Indicamos o sentido positivo de uma reta orientada por meio de uma flecha colocada no eixo ou a êle paralela, ou, utilizando duas letras, x' e x por exemplo, e dizendo *sentido de* x' *para* x ou *sentido* x'x.



(Fig. 1)

Uma reta orientada na qual escolhemos arbitrariamente uma *origem O* e uma unidade de comprimento para os segmentos nela localizados, é um *eixo*.



(Fig. 2)

A origem O divide o eixo em dois *semi-eixos*, um positivo Ox e outro negativo Ox'.

4 — Abcissa de um ponto de um eixo. ABCISSA *de um ponto A de um eixo x'x* é o valor algébrico x do vetor que tiver por origem a origem do eixo e por extremidade o ponto A. Este valor algébrico tem o sinal + ou o sinal — conforme A está sôbre Ox ou sôbre Ox', respectivamente. Escrevemos:

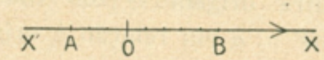
$$x = \overline{OA}.$$

A origem O do eixo é tambem chamada *origem das abcissas*.

A cada ponto A corresponde uma única abcissa x, e, reciprocamente, a cada abcissa x corresponde um único ponto A. Em particular, a abcissa da origem é zero.

x variando de modo contínuo, de zero a $+\infty$, o ponto A descreve o semi-eixo positivo Ox, de modo contínuo, a partir da origem; x variando de zero a $-\infty$, o ponto A descreve o semi-eixo negativo Ox', a partir da origem.

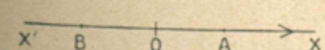
A figura representa um ponto A de abcissa $\overline{OA} = -3$ e um ponto B de abcissa $\overline{OB} = 5$.



(Fig. 3)

TEOREMA: *O valor algébrico de um vetor localizado em um eixo é igual à diferença entre a abcissa da extremidade do vetor e a abcissa da origem.*

Consideremos o eixo $x'x$ e dois dos seus pontos A e B de abcissas



(Fig. 4)

$$x_1 = \overline{OA}$$
$$x_2 = \overline{OB}$$

Aplicando a relação de Chasles (3) aos três pontos A, B e O, teremos:

$$\overline{AB} + \overline{BO} + \overline{OA} = 0$$

ou

$$\overline{AB} = -\overline{BO} - \overline{OA}$$

Como $-\overline{BO} = \overline{OB} = x_2$ e $\overline{OA} = x_1$, temos:

$$AB = x_2 - x_1$$

Exercício: — *Um corpo estava na temperatura t_1 e passou à temperatura t_2. Qual foi a variação de temperatura?*

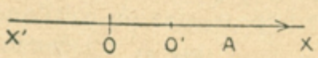
Resposta: $v = t_2 - t_1$

Exemplos: — Se a temperatura era de 5° e passou a 8°, variou de 8° — 5° = 3°; se era de 8° e passou a — 5°, variou de — 5° — 8° = = — 13°; se era de — 8° e passou a 5°, variou de 5° — (— 8°) = 13°. Os sinais dos resultados indicam o sentido da variação da temperatura. Assim, no primeiro caso a variação de 3° indica que a temperatura subiu 3°; no segundo a temperatura desceu 13° e no último subiu 13°.

Raciocínio análogo faremos no caso de duas épocas t_1 e t_2, sendo t_2 posterior a t_1. O intervalo de tempo entre as duas épocas será

$$t = t_2 - t_1$$

5 — Mudança de origem. Consideremos um eixo $x'x$, de origem O, e um ponto A deste eixo, de abcissa $x = \overline{OA}$. Calculemos a abcissa $x' = \overline{O'A}$ do mesmo ponto A em relação a uma outra origem O' do mesmo eixo definida pela sua abcissa $OO' = a$ em relação à origem primitiva O.



(Fig. 5)

Pelo teorema anterior, podemos escrever

$$\overline{O'A} = \overline{OA} - \overline{OO'}$$

ou

$$x' = x - a$$

Exercício: — *Um ponto A de um eixo tem de abcissa $\overline{OA} = 3$. Qual será a abcissa do mesmo ponto em relação a outra origem O' tal que OO' = — 7 ?*

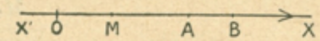
$$x = \overline{O'A} = 3 - (-7) = 10$$

(3) Matemática — 2º ciclo — 2.ª Série, pg. 316.

6 — Abcissa de um ponto que divide um segmento de reta numa razão dada. Consideremos o segmento de reta AB definido pelas abcissas

$$x_1 = \overline{OA}$$

$$x_2 = \overline{OB}$$



(Fig. 6)

dos pontos A e B, em relação à origem O do eixo $x'x$ que contém os dois pontos A e B. Propomo-nos determinar a abcissa,

$$x = \overline{OM}$$

de um ponto M tal que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$$

sendo k um número real, positivo, negativo ou nulo.

Os valores de $\overline{MA}$ e $\overline{MB}$ são (4)

$$\overline{MA} = \overline{OA} - \overline{OM} = x_1 - x$$

$$\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = x_2 - x$$

Dividindo membro a membro estas igualdades, teremos:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k = \frac{x_1 - x}{x_2 - x}$$

Resolvendo esta equação em relação a x, temos

$$kx_2 - kx = x_1 - x$$

$$x(1 - k) = x_1 - kx_2$$

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} \qquad k \neq 1$$

Esta fórmula é geral. Ela determina um único ponto sôbre $x'x$. Se k é positivo, $\overline{MA}$ e $\overline{MB}$ são obrigatoriamente do mesmo sinal e o ponto M é exterior ao segmento AB; se k é negativo, $\overline{MA}$ e $\overline{MB}$ são de sinais contrários e M está entre A e B.

Casos particulares: I) — Para valores simétricos de k os pontos M e M' correspondentes são conjugados harmônicos de A e B, isto é,

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$$

II) — Se o ponto M estiver no meio de AB teremos $k = -1$ e o valor de x será

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

isto é, a abcissa do meio de um segmento é igual à média aritmética das abcissas das extremidades dêste segmento.

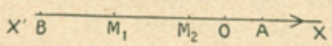
III) — Quando k tende para 1, o denominador de x da fórmula geral tende para zero enquanto o numerador tende para $x_1 - x_2$: o valor de x crescerá indefinidamente. Concluímos assim que k tendendo para 1, o ponto M afasta-se indefinidamente. É comum dizermos, neste caso, que o ponto conjugado harmônico de um ponto situado no meio de um segmento está no infinito.

Exercícios: — 1) *Dois pontos* A *e* B *de um eixo têm abcissas* 4 *e* — 11, *respectivamente. Calcular a abcissa do ponto que divide o segmento* AB *na razão* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k = -2$.

$$x = \frac{x_1 - k\,x_2}{1 - k} = \frac{4 - (-2)\,(-11)}{1 - (-2)} = -6$$

2) — *Um vetor* $\overrightarrow{AB}$, *situado em um eixo, tem por valor algébrico* — 12. *A abcissa da sua origem é* 2. *Calcular as abcissas dos pontos que dividem o vetor em três partes iguais.*

Conhecemos $\overline{AB} = -12$ e $\overline{OA} = x_1 = 2$.



(Fig. 7)

Calculemos primeiramente o valor da abcissa de B. Teremos (8):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

ou:

$$\overline{OB} = \overline{AB} + \overline{OA}$$

$$x_2 = -12 + 2 = -10$$

Determinemos agora a abcissa de M_1. Temos $\frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}} = -\frac{2}{1}$,

logo,

$$x' = \overline{OM_1} = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k} = \frac{2 - (-2)\,(-10)}{1 - (-2)} = -6$$

Analogamente, a abcissa de M_2 $\left(\frac{\overline{M_2A}}{\overline{M_2B}} = -\frac{1}{2}\right)$ será

$$x'' = \overline{OM_2} = \frac{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)(-10)}{1 + \frac{1}{2}} = -2$$

Exercícios

1) — Represente num eixo $x'x$ um ponto A de abcissa 2, um ponto B de abcissa — 5 e um ponto C de abcissa O.

2) — Qual o valor algébrico de um vetor $\overrightarrow{AB}$ de um eixo $x'x$ tal que $\overline{OA} = -5$ e $\overline{OB} = -2$? de outro vetor $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{OC} = 4$ e $\overline{OD} = -5$?

3) — Representando por t_1 e por t_2 as temperaturas de um corpo em duas fases, a primeira anterior à segunda, qual a variação de temperatura em cada um dos casos seguintes:

$t_1 = 7$, $t_2 = 9$; $t_1 = 6$, $t_2 = -4$; $t_1 = -7$, $t_2 = -4$; $t_1 = -4$, $t_2 = 3$?

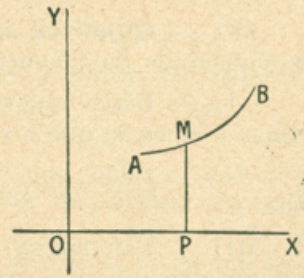
4) — Um vetor $\overrightarrow{AB}$ localizado em um eixo tem valor algébrico 6. A abcissa de A é 5. Calcular a abcissa de B.

UNIDADE X

Lugares geométricos: 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

19 — Correlação entre um lugar geométrico e uma equação. TEOREMA: *Toda linha definida geométricamente pode ser representada por uma equação com duas variáveis.*

Consideremos a curva AB no plano dos dois eixos $x'x$ e $y'y$. Tomemos sobre o eixo dos x um ponto arbitrário P e por ele tracemos uma paralela ao eixo dos y. Esta reta cortará a curva em um ou mais pontos tais como M. A cada vetor $\overrightarrow{OP}$ corresponderão valores determinados do vetor $\overrightarrow{PM}$. A ordenada $\overline{PM} = y$ de um ponto da linha é, pois, função da abcissa $\overline{OP} = x$ deste ponto. A relação $f(x, y) = 0$ ou $y = f(x)$ que liga as coordenadas de um ponto qualquer M da curva, dependente da forma da curva, chama-se *equação da curva.*



(Fig. 28)

RECIPROCAMENTE, *os pontos cujas coordenadas verificam uma equação com duas variáveis estão, em geral, sobre uma curva.*

Seja a equação $f(x, y) = 0$ definindo uma função contínua. A cada par de valores reais de x e y, satisfazendo esta equação, corresponde um ponto do plano. Se considerarmos um dêstes pares, (x, y), e fizermos x variar a partir de x_0, de modo contínuo, y variará também de modo contínuo, a partir de y_0. O ponto de coordenadas x e y descreverá uma linha contínua que será a representação geométrica (pintura geométrica) da equação $f(x, y) = 0$.

Curva representativa de uma equação é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas verificam esta equação.

Equação de uma curva é a equação que deve ser satisfeita para as coordenadas de um ponto qualquer da curva.

Daí os dois aspetos, direto e inverso, da Geometria Analítica: a toda curva definida geometricamente corresponde uma equação $f(x, y) = 0$ e, a toda equação $f(x, y) = 0$ corresponde, em geral, uma curva.

Dizemos *em geral* porque há equações que não têm representação geométrica, como, por exemplo,

$$x^2 + y^2 = -25$$

que não se verifica para valores reais de x e y.

20 — Objetivos da Geometria Analítica. Os problemas fundamentais da Geometria Analítica são:

I) — Dada uma curva definida geometricamente, determinar a equação que a representa;

II) — Dada uma equação construir a curva correspondente;

III) — Estudar as relações existentes entre as propriedades geométricas das curvas e as propriedades algébricas das equações.

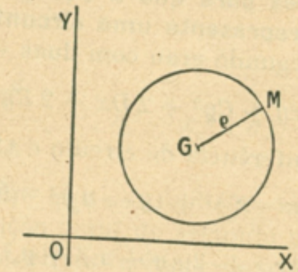
21 — Equação natural de uma curva. Passagem à equação cartesiana. Em geral, a definição geométrica de uma curva determina cada um dos seus pontos em um certo sistema de coordenadas. Se escolhermos o sistema particular indicado pela definição e traduzirmos algebricamente esta definição, neste sistema, obtemos a *equação espontânea* ou *natural* da curva.

Estabelecida a equação natural, podemos passar à equação *cartesiana*, isto é, à equação referida a dois eixos cartesianos convenientemente escolhidos. A solução deste problema é a *passagem da equação natural à equação cartesiana*.

CIRCUNFERÊNCIA DE CÍRCULO

22 — Definição e equação natural. A CIRCUNFERÊNCIA DE CÍRCULO é o lugar geométrico dos pontos de um plano situados a uma distância constante de um ponto fixo do mesmo plano chamado centro.

Para traduzirmos algebricamente esta definição bastará escrevermos que a distância de um ponto qualquer M da curva



(Fig. 29)

ao centro, é igual ao raio. A equação natural da circunferência de círculo, no sistema polar, será então:

$$\rho = \pm R$$

23 — Equação da circunferência de círculo em eixos ortogonais. Representemos por x_0 e y_0 as coordenadas do centro da circunferência e por x e y as coordenadas de um ponto qualquer M da curva. Substituamos na equação natural ρ pelo seu valor dado pela fórmula da distância de dois pontos (**17**); teremos:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

que é a equação procurada.

CASOS PARTICULARES: I) — *O centro está no eixo dos* x *e a circunferência passa pela origem.*

Neste caso $x_0 = R$ e $y_0 = 0$, e, a equação ficará:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

II) — *O centro está na origem.*

Temos aquí $x_0 = y_0 = 0$ e a equação ficará:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Esta é a equação da circunferência de círculo referida a dois diâmetros ortogonais.

23a — Condições para que a equação do segundo grau com duas variáveis represente uma circunferência de círculo. A equação geral do segundo grau com duas variáveis é da forma

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0 \qquad \text{(I)}$$

e a equação da circunferência de círculo é (23)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Para que a equação (I) represente pois uma circunferência de círculo, é necessário e suficiente que possamos calcular valores de x_0, y_0 e R, finitos e determinados, tais que as equações (I) e (II) tenham as mesmas soluções. Para isto, os coeficientes dos termos correspondentes das duas equações devem ser proporcionais, isto é,

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{0} = \frac{C}{1} = -\frac{D}{x_0} = -\frac{E}{y_0} = \frac{F}{x_0^2 + y_0^2 - R^2}$$

Uma propriedade das proporções, em Aritmética, diz que quando o denominador de uma série de razões iguais é nulo, o numerador correspondente é também nulo. Assim sendo, temos imediatamente

$$B = 0.$$

A e C, iguais, em virtude da igualdade das razões, não podem ser também nulos, porque, então, a equação (I) não seria do segundo grau. Temos então as duas condições

$$A = C$$
$$B = 0$$

Estas condições, independentes das incógnitas x_0, y_0 e R, verificam-se por si mesmas: são *condições necessárias.*

Elas são também *suficientes,* porque desde que elas se verifiquem, podemos determinar os valores de x_0, y_0 e R. Com efeito, da série de razões acima, tiramos

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{D}{A} \\[2mm] y_0 = -\dfrac{E}{A} \\[2mm] x_0^2 + y_0^2 - R^2 = \dfrac{F}{A} \quad \therefore \quad R^2 = x_0^2 + y_0^2 - \dfrac{F}{A} = \dfrac{D^2 + E^2 - AF}{A^2} \end{cases}$$

Concluímos então que as condições necessárias e suficientes para que a equação geral do segundo grau com duas variáveis represente uma circunferência de círculo, são: 1) — Os coeficientes de x^2 e de y^2 serem iguais; 2) — O coeficiente de xy ser nulo.

Observações: I) — Para a circunferência de círculo ter existência real, devemos ter

$$R^2 > 0 \quad \therefore \quad D^2 + E^2 - AF > 0$$

Se $D^2 + E^2 - AF = 0$, o círculo se reduz ao ponto (x_0, y_0): a equação (I) representa uma circunferência de círculo de raio nulo, ou, o ponto (x_0, y_0).

Se $D^2 + E^2 - AF < 0$ a equação nada representa: dizemos que representa uma circunferência de círculo imaginária.

II) — As coordenadas do centro $-\dfrac{D}{A}$ e $-\dfrac{E}{A}$, quando os coeficientes de x^2 e y^2 forem iguais à unidade ($A = C = 1$), serão, respectivamente iguais às metades dos coeficientes de x e de y na equação, com sinais contrários.

Exercícios: I) — *Calcular as coordenadas do centro e o raio da circunferência de círculo* $x^2 + y^2 - 6\,x - 10\,y + 25 = 0.$

As coordenadas do centro, são

$$x_0 = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$y_0 = -\frac{-10}{2} = 5$$

e o raio é

$$R = \frac{\sqrt{3^2 + 5^2 - 1.25}}{1} = 3$$

É costume, também, resolver êste problema completando os quadrados do primeiro membro da equação. Teremos sucessivamente:

$$x^2 - 6x + y^2 - 10y = -25$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = -25 + 9 + 25$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 9 .$$

Concluimos então:

$$x_0 = 3$$

$$y_0 = 5$$

$$R = \sqrt{9} = 3$$

II) — *Calcular as coordenadas do centro e o raio da circunferência de círculo* $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$.

Teremos sucessivamente:

$$x^2 - 6y + y^2 - 10y = -34$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = -34 + 9 + 25$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 0$$

A equação representa uma circunferência de círculo de raio nulo, ou o ponto (3,5).

III) — *Calcular as coordenadas do centro e o raio da circunferência de círculo* $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 14 = 0$.

Teremos:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = -14$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -14 + 4 + 9$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = -1$$

A equação representa uma circunferência de círculo imaginária.

IV) — *Formar a equação da circunferência de círculo que passa pelos pontos* M_1 (— 1,2), M_2 (0, — 5) e M_3 (6,3).

Vimos anteriormente (**17**) que o ponto equidistante dos três pontos dados, isto é, o centro G da circunferência, tem de coordenadas 3 e — 1. O raio será a distância de G a M_1, por exemplo:

$$GM_1 = R = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+1)^2} = 5$$

A equação da curva será pois:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$$

ou

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$

Outra solução: — A equação geral da circunferência de círculo, é da forma

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + F = 0$$

ou ainda:

$$x^2 + y^2 + 2D'x + 2E'y + F = 0 \qquad \text{(I)}$$

Se a curva passa por M_1, M_2 e M_3, as coordenadas destes pontos devem satisfazer esta equação, logo,

$$\begin{cases} 1 + 4 - 2D' + 4E' + F' = 0 \\ 25 - 10E' + F' = 0 \\ 36 + 9 + 12D' + 6E' + F' = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 2D' - 4E' - F' = 5 \\ 10E' - F' = 25 \\ 16D' + 6E' + F' = -45 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema encontraremos D', E' e F', que levados em (I) darão a equação pedida. Obteremos $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. Poderemos obter também esta equação eliminando D', E' e F' entre as três últimas equações e a equação (I); teremos (teorema de Rouché):

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 2x & 2y & 1 \\ 5 & 2 & -4 & -1 \\ 25 & 0 & 10 & -1 \\ -45 & 12 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ÍNDICE

UNIDADE V

Segunda Parte — Geometria

UNIDADE VI

UNIDADE VII

UNIDADE VIII

Terceira Parte — Geometria Analítica

UNIDADE IX

UNIDADE X

N.º 3.661 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

Cr$ 50,00