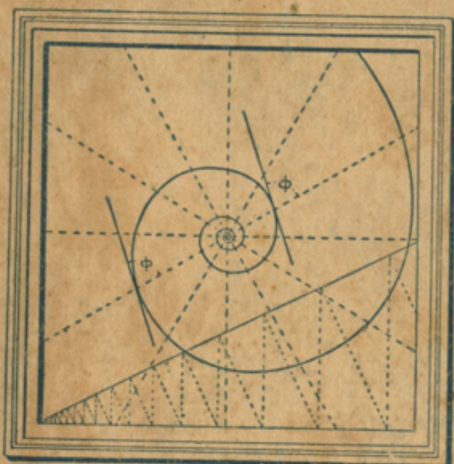
EUCLIDES ROXO
ROBERTO PEIXOTO
HAROLDO CUNHA
DACORSO NETTO

MATEMÁTICA



2º CICLO

CURSOS:
CIENTÍFICO
E
CLÁSSICO

2ª SÉRIE

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

Euclides Roxo
Haroldo Lisbôa da Cunha
(do Colégio Pedro II)

Roberto Peixoto
Cesar Dacorso Netto
(do Instituto de Educação)

MATEMÁTICA
2.º CICLO

2ª SÉRIE

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. PAULO
292, Rua Líbero Badaró

BELO HORIZONTE
Rua Rio de Janeiro, 655

1944

DOS MESMOS AUTORES

Matemática — 2º Ciclo — 1ª Série
Matemática — 2º Ciclo — 3ª Série

Do Prof. Euclides Rôxo:

Lições de Aritmética
Curso de Matemática — 3ª Série (Geometria)
A Matemática na Educação Secundária
Unidades e Medidas.

EM COLABORAÇÃO:

Matemática Ginasial — 1ª Série, 2ª Série, 3ª Série e 4ª Série.
Exercícios de Aritmética, Exercícios de Algebra, Exercícios de Geometria e Exercicios de Trigonometria (exgotados).

Do Prof. Roberto Peixoto:

Geometria Analítica a duas dimensões.
Geometria Analítica a três dimensões.
Exercícios de Geometria Analítica a duas dimensões.
Exercícios de Geometria Analítica a três dimensões.
Calculo Vetorial.
Questiúnculas matemáticas (exgotado).

Do Prof. Haroldo Lisboa da Cunha:

Sôbre a resolução algébrica das equações. Rio, 1933 (Tese).
Pontos de Algebra Complementar (Teoria das equações. Rio, 1939 (exgotados).

Do Prof. Cesar Dacorso Netto:

Elementos de Aritmética
Esboço sôbre a transformação em matemática elementar.

ADVERTÊNCIA

Com o presente volume, continua a série MATEMÁTICA — 2º CICLO, destinada aos alunos dos *Cursos científico e clássico.*

A matéria não ficou adstrita, entretanto, aos títulos e sub-títulos dos atuais programas.

Procuraram os autores sugerir alguns complementos e aplicações, sem se afastar, entretanto, dos assuntos dos programas e sem quebrar a harmonia do conjunto.

Tais desenvolvimentos, apresentados, em geral, em tipo menor, permitirão certa liberdade quanto à extensão a dar ao curso, de acôrdo com a reação oferecida pelo aluno.

Cumpre observar, ainda, que as notas, que ilustram algumas passagens e completam outras, tiveram, em sua maioria, a dupla finalidade de ampliar os conhecimentos do aluno e de incitar-lhe a curiosidade pela matéria.

Finalmente, deverá ser frizado que os atuais programas do 2º Ciclo são compostos de partes nitidamente distintas que compreendem: *Aritmética teórica, Álgebra elementar e complementar* (incluida a teoria das equações), *Geometria elementar, Trigonometria, Álgebra vetorial e Geometria analitica*. Por isso, com o fim de manter, na exposição de cada um dêsses ramos, a indispensável unidade didática, julgaram os autores, do melhor alvitre, dividir a tarefa tal como é indicado em cada uma das partes.

PROGRAMA DA SEGUNDA SÉRIE

ÁLGEBRA

Unidade I. — A função exponencial: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. **Noção de função exponencial e de sua função inversa**. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. — O binômio de Newton: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III. — **Determinantes: 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.**

Unidade IV. — **Frações contínuas: Noções sobre frações contínuas.**

GEOMETRIA

Unidade V. — Os corpos redondos: 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade VI. — Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslisantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade VII. — Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VIII. — Funções circulares. 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$.

Unidade IX. — **Transformações trigonométricas: 1. Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico.** 3. Uso das tábuas trigonométricas.

Unidade X. — **Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.**

Unidade XI. — Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos retângulos. **3. Resolução de triângulos obliquângulos**. 4. **Aplicações imediatas à topografia.**

PARTE I — ÁLGEBRA

Cesar Dacorso Netto

UNIDADE I

A função exponencial: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

POTÊNCIAS DE EXPOENTE REAL

1 — Advertência. Após o desenvolvimento das *progressões aritméticas* e *geométricas*, que apresentaremos apenas para atender a disposições do atual programa, trataremos da *função exponencial*, que nos conduzirá ao estudo e à prática dos logarítmos.

A completa execução dêsse objetivo exige, porém, que retomemos o conceito de *potência* (1) para estendê-lo ao caso em que o expooente não é inteiro nem positivo, mas sim um número qualquer (2).

2 — Potência de expoente racional (3). Dados um número aritmético, a, e um número inteiro, n, a potência n de a é o produto de n fatores iguais a a, e se escreve :

$$a^n = \underset{(1)}{a}\ \underset{(2)}{a}\ \ldots .\ \underset{(n)}{a}$$

Da própria definição resultam as propriedades da potenciação que se exprimem pelas seguintes igualdades, onde a e b

---

(1) Cfr. *"Matemática"*, 2º Ciclo, 1ª Série, pág. 45 (Adotaremos esta indicação para referências ao livro *"Matemática"*, 2º Ciclo, 1ª Série, de Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha, Dacorso Netto).

(2) Limitar-nos-emos ao caso do expoente *real*, isto é, número aritmético (racional ou irracional) dotado do caracter de positivo ou negativo. A base é suposta, sempre, positiva.

(3) Aqui o expoente é suposto positivo.

representam números aritméticos, e m e p números inteiros e positivos :

$$\text{(I)} \qquad (ab)^m = a^m b^m$$

$$\text{(II)} \qquad (a^m)^p = a^{mp}$$

$$\text{(III)} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$\text{(IV)} \qquad a^m a^p = a^{m+p}$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} \qquad (m > p)$$

Na última igualdade, quando se tem $m = p$, o primeiro membro se reduz a 1, ao passo que, no segundo, surge o símbolo a^0, não incluído na definição de potência. Para que a igualdade (V) seja válida, ainda para $m = p$, convencionamos :

$$a^0 = 1$$

qualquer que seja o número aritmético a, suposto diferente de zero. Do mesmo modo, a hipótese $m = p + 1$ nos conduz à convenção :

$$a^1 = a$$

Observando que nos limitámos ao caso da base ser um número aritmético, define-se a potência de expoente fracionário (4), $\dfrac{p}{q}$, de um número aritmético, a, pela igualdade :

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad (5)$$

Se p é divisível por q, esta igualdade exprime uma propriedade das potências de expoente inteiro; no caso contrário, constitue a definição da potência $\dfrac{p}{q}$ do número a (6).

(4) Nicolau Oresme, em *"Algorithmus proportionum"*, 1360, já considerava expoentes fracionários e desenvolvia o cálculo formal correspondente. J. Wallis (*Arithmetica Infinitorum*, 1655) interpretou, definitivamente, os expoentes fracionários, e I. Newton (1676) introduziu a notação atual.

(5) Consideramos apenas o *valor aritmético* do radical.

(6) Não subsiste esta definição quando a base é *negativa*, uma vez que os números negativos não teem raízes (reais) de índice par.

Subsistem, ainda, para as potências de expoente fracionário, as igualdades (I) — (V), cuja demonstração se faz substituindo as potências dos primeiros membros pelos radicais correspondentes e operando sôbre êstes.

Indicando-se por r um número racional, que representa o valor comum de todas as frações iguais a uma fração $\dfrac{p}{q}$ (7), tem-se, por definição :

$$a^r = a^{\frac{p}{q}}$$

Estendem-se, ainda, às potências de expoente racional, as propriedades expressas pelas igualdades (I) — (V).

3 — Propriedades das potências de expoente racional (8).

I) — *Designando-se por* a *um número aritmético e por* r *um número racional, tem-se* :

$$a^r > 1 \quad \text{se é} \quad a > 1$$
$$a^r < 1 \quad \text{se é} \quad a < 1$$

De fato, representando-se por b o valor de $a^{\frac{p}{q}}$, vem:

$$b = a^{\frac{p}{q}}$$

donde, elevando-se os membros à potência q, resulta:

$$b^q = a^p$$

Sendo $a > 1$ temos, ainda, $a^p > 1$ e, portanto, b não pode ser igual nem inferior a 1, pois se assim fosse, b^q seria, respectivamente, igual ou inferior a 1. Assim, conclue-se $b > 1$, isto é, $a^{\frac{p}{q}} > 1$.

Analogamente, para $a < 1$, se tem $a^{\frac{p}{q}} < 1$.

II) — *Potências de mesmo expoente variam no mesmo sentido em que as bases*, isto é, *elevando-se os membros de uma*

(7) Tendo-se, por exemplo, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{7}{21} = \dfrac{15}{45} = \ldots\ldots$, r representa o valor comum dessas frações ou, de modo mais preciso, *é o número racional que define a classe* dessas frações. Para o número r, aliás, pode tomar-se qualquer das frações consideradas.

(8) Em todos os enunciados e demonstrações subentende-se o expoente diferente de zero.

desigualdade à mesma potência, obtém-se outra desigualdade de mesmo sentido.

Sejam a e b números aritméticos tais que se tenha:

$$a < b$$

ou:

$$\frac{a}{b} < 1$$

Sendo r um número racional, tem-se:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r < 1$$

ou:

$$\frac{a^r}{b^r} < 1$$

e, portanto:

$$a^r < b^r$$

III) — *Potências de mesma base variam no mesmo sentido em que os expontes quando a base é maior do que* 1, *e em sentido contrário quando a base é menor do que* 1.

Dados os números racionais r e s $(r > s)$, tem-se:

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Suposto $a > 1$, é $a^{r-s} > 1$ e portanto:

$$\frac{a^r}{a^s} > 1$$

isto é:

$$a^r > a^s$$

Analogamente, sendo $a < 1$ e $r > s$, conclue-se $a^r < a^s$.

IV) — *Dado* a > 1, *pode sempre obter-se um número racional,* r, *de modo que* a^r *seja superior a qualquer número prefixado.*

Se M é o número prefixado, basta mostrar que existe um número *inteiro*, n, para o qual se tem:

$$a^n > M$$

pois que esta desigualdade é, ainda, verdadeira para *todo expoente racional* e superior a n. (**3, III**).

Ora, qualquer que seja o número inteiro, n, tem-se a identidade [9]:

$$a^n - 1 \equiv (a-1)\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)$$

O segundo fator do segundo membro é constituido de n termos os quais, excluido o último, são maiores do que 1 ($a > 1$). Substituindo-se, então, cada um desses termos por 1, diminue-se o valor do segundo membro e tem-se:

$$a^n - 1 > (a-1)\,n$$

ou seja:

$$a^n > 1 + (a-1)\,n$$

Agora, para que se obtenha $a^n > M$, basta tomar n de modo a satisfazer à condição:

$$1 + (a-1)\,n > M$$

isto é:

$$n > \frac{M-1}{a-1}$$

Observação — Atribuindo-se ao expoente r valores racionais e indefinidamente crescentes, por exemplo:

$$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

ou:

$$r = \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \ldots$$

a potência a^r, suposto $a > 1$, varia por valores crescentes (**3, III**) e, além disso, pode ultrapassar qualquer número prefixado por maior que seja (**3, IV**).

Exprime-se este fato abreviadamente, dizendo que *a potência* a^r *tem por limite* infinito *quando o expoente* r *tende para* infinito, e escreve-se:

$$\lim_{r \to \infty} a^r = \infty \qquad (^{10})$$

(9) Cfr. "*Matemática*", 2° Ciclo, 1ª Série, pág. 200.

(10) O símbolo ∞, empregado pelos Romanos para representar o número 1000, foi usado pela primeira vez, com a atual significação, por J. Wallis [4] e, mais tarde, por J. Bernoulli ("*Ars Conjectandi*", 1713). Não traduz êste símbolo um número, propriamente, mas apenas exprime um *infinito potencial*, distinto do *infinito realizado* da concepção dos *números transfinitos*, de G. Cantor (1874).

TÁBOA DOS SENOS, COSENOS E TANGENTES DOS ÂNGULOS DE 0° ATE' 90°

Ângulo	Seno	Coseno	Tangente	Ângulo	Seno	Coseno	Tangente
0°	0,000	1,000	0,000	45°	0,707	0,707	1,000
1°	0,017	0,999	0,017	46°	0,719	0,695	1,035
2°	0,035	0,999	0,035	47°	0,731	0,682	1,072
3°	0,052	0,998	0,052	48°	0,743	0,669	1,111
4°	0,070	0,997	0,070	49°	0,755	0,656	1,150
5°	0,087	0,996	0,087	50°	0,766	0,643	1,192
6°	0,105	0,995	0,105	51°	0,777	0,629	1,235
7°	0,122	0,993	0,123	52°	0,788	0,616	1,280
8°	0,139	0,990	0,141	53°	0,799	0,602	1,327
9°	0,156	0,988	0,158	54°	0,809	0,588	1,376
10°	0,174	0,985	0,176	55°	0,819	0,574	1,428
11°	0,191	0,982	0,194	56°	0,829	0,559	1,483
12°	0,208	0,978	0,213	57°	0,839	0,545	1,540
13°	0,225	0,974	0,231	58°	0,848	0,530	1,600
14°	0,242	0,970	0,249	59°	0,857	0,515	1,664
15°	0,259	0,966	0,268	60°	0,866	0,500	1,732
16°	0,276	0,961	0,287	61°	0,875	0,485	1,804
17°	0,292	0,956	0,306	62°	0,883	0,469	1,881
18°	0,309	0,951	0,325	63°	0,891	0,454	1,963
19°	0,326	0,946	0,344	64°	0,899	0,438	2,050
20°	0,342	0,940	0,364	65°	0,906	0,423	2,145
21°	0,358	0,934	0,384	66°	0,914	0,407	2,246
22°	0,375	0,927	0,404	67°	0,921	0,391	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	68°	0,927	0,375	2,475
24°	0,407	0,914	0,445	69°	0,934	0,358	2,605
25°	0,423	0,906	0,466	70°	0,940	0,342	2,747
26°	0,438	0,899	0,488	71°	0,946	0,326	2,904
27°	0,454	0,891	0,510	72°	0,951	0,309	3,078
28°	0,469	0,883	0,532	73°	0,956	0,292	3,271
29°	0,485	0,875	0,554	74°	0,961	0,276	3,487
30°	0,500	0,866	0,577	75°	0,966	0,259	3,732
31°	0,515	0,857	0,601	76°	0,970	0,242	4,011
32°	0,530	0,848	0,625	77°	0,974	0,225	4,331
33°	0,545	0,839	0,649	78°	0,978	0,208	4,705
34°	0,559	0,829	0,675	79°	0,982	0,191	5,145
35°	0,574	0,819	0,700	80°	0,985	0,174	5,671
36°	0,588	0,809	0,727	81°	0,988	0,156	6,314
37°	0,602	0,799	0,754	82°	0,990	0,139	7,115
38°	0,616	0,788	0,781	83°	0,993	0,122	8,144
39°	0,629	0,777	0,810	84°	0,995	0,105	9,514
40°	0,643	0,766	0,839	85°	0,996	0,087	11,430
41°	0,656	0,755	0,869	86°	0,997	0,070	14,301
42°	0,669	0,743	0,900	87°	0,998	0,052	19,081
43°	0,682	0,731	0,933	88°	0,999	0,035	28,636
44°	0,695	0,719	0,966	89°	0,999	0,017	57,290
45°	0,707	0,707	1,000	90°	1,000	0,000	∞

ÍNDICE

Ângu

0°
1°
2°
3°
4°
5°
6°
7°
8°
9°
10°
11°
12°
13°
14°
15°
16°
17°
18°
19°
20°
21°
22°
23°
24°
25°
26°
27°
28°
29°
30°
31°
32°
33°
34°
35°
36°
37°
38°
39°
40°
41°
42°
43°
44°
45°

Terceira Parte — Trigonometria

Nº 3.414 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

Terceira Parte — Trigonometria

Nº 3.414 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

ÍNDICE