EUCLIDES ROXO
ROBERTO PEIXOTO

HAROLDO CUNHA
DACORSO NETTO

MATEMÁTICA 2º CICLO

1ª Série

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

Matemática – 2º Ciclo

1ª SÉRIE

DOS MESMOS AUTORES

Matemática — 2º Ciclo — 2ª Série
Matemática — 2º Ciclo — 3ª Série

Do Prof. Euclides Rôxo:

Lições de Aritmética
Curso de Matemática — 3ª Série (Geometria)
A Matemática na Educação Secundária
Unidades e Medidas.

Em colaboração:

Matemática Ginasial — 1ª Série, 2ª Série, 3ª Série e 4ª Série.
Exercícios de Aritmética, Exercícios de Algebra, Exercícios de Geometria e Exercícios de Trigonometria (esgotados)

Do Prof. Roberto Peixoto:

Geometria Analítica a duas dimensões.
Geometria Analítica a três dimensões.
Exercícios de Geometria Analítica a duas dimensões.
Exercícios de Geometria Analítica a três dimensões.
Calculo Vetorial.
Questiúnculas matemáticas (esgotado).

Do Prof. Haroldo Lisboa da Cunha:

Sôbre as equações algébricas e sua solução por meio de radicais, Rio, 1933 (Tese).
Pontos de Algebra Complementar (Teoria das equações), Rio, 1939 (esgotados).

Do Prof. Cesar Dacorso Netto:

Elementos de Aritmética, Livraria do Globo, Porto Alegre, 1938.
Esbôço sôbre a transformação em matemática elementar. Rio, 1933 (Tese).

Euclides Roxo
Haroldo Lisbôa da Cunha
(do Colégio Pedro II)

Roberto Peixoto
Cesar Dacorso Netto
(do Instituto de Educação)

MATEMÁTICA

2.º CICLO

1ª SÉRIE

2.ª EDIÇÃO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro
S. PAULO — 292, Rua Líbero Badaró
BELO HORIZONTE — Rua Rio de Janeiro, 655
1945

Nº 5477

ADVERTÊNCIA

Com o presente volume, inicia-se a série MATEMÁTICA — 2º CICLO, destinada aos alunos dos *Cursos científico e clássico*.

A matéria não ficou adstrita, entretanto, aos títulos e sub-títulos dos atuais programas.

Procuraram os autores sugerir alguns complementos e aplicações, sem se afastar, contudo, dos assuntos dos programas e sem quebrar a harmonia do conjunto.

Tais desenvolvimentos, apresentados, em geral, em tipo menor, permitirão certa liberdade quanto à extensão a dar ao curso, de acôrdo com a reação oferecida pelo aluno.

Cumpre observar, ainda, que as notas, que ilustram algumas passagens e completam outras, tiveram, em sua maioria, a dupla finalidade de ampliar os conhecimentos do aluno e de incitar-lhe a curiosidade pela matéria.

Finalmente, deverá ser frizado que os atuais programas do 2º Ciclo são compostos de partes nitidamente distintas que compreendem: *Aritmética teórica, Álgebra elementar e complementar* (incluida a teoria das equações), *Geometria elementar, Trigonometria, Álgebra vetorial e Geometria analítica*. Por isso, com o fim de manter, na exposição de cada um dêsses ramos, a indispensável unidade didática, julgaram os autores, do melhor alvitre, dividir a tarefa tal como é indicado em cada uma das partes.

PARTE I — ARITMÉTICA TEÓRICA

Cesar Dacorso Netto

UNIDADE I

As operações aritméticas fundamentais: 1. Teoria da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2. Sistemas de numeração.

PRELIMINARES

1 — Números naturais. São intuitivas as ideias de *unidade* e de *pluralidade* (coleção, conjunto, etc.). E chamamos *números naturais* aos números

1, 2, 3, 4, 5,......

cujo conceito resulta, por abstração, da idéia de coleção de objetos distintos. (1).

2 — Contagem. Contar os objetos de uma coleção é dar o número de objetos dessa coleção. Para isso, a cada objeto faz-se corresponder, sucessivamente, os números 1, 2, 3, 4, ... Se ao último objeto corresponder o número 8, diremos que a coleção tem 8 objetos.

Se repetirmos a operação, tomando os objetos numa ordem diferente da adotada na primeira contagem, obteremos ainda o número 8.

Daí concluirmos que *o número não depende da ordem em que se consideram os objetos da coleção*. (2).

3 — Símbolos numéricos. Ao sistema de regras e convenções, mediante as quais se exprimem os números, denomina-se *numeração*. Usamos o *sistema decimal de numeração*, isto é, o sistema de numeração que se baseia na seguinte convenção:

---

(1) Para completo esclarecimento sôbre o assunto aconselhamos a leitura do excelente livro de Bento de Jesus Caraça, "*Lições de Álgebra e Análise*", Lisboa, 1935, Vol. I, Cap. I.

(2) Êste resultado constitue o *princípio de invariância do número* (E. Schröder, 1873).

"Dez unidades de uma ordem formam outra unidade de ordem imediatamente superior".

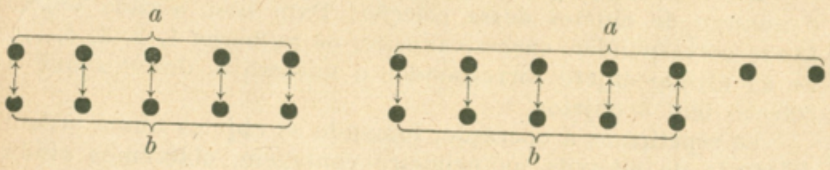
Diz-se, então, que o número *dez* é a *base* do sistema decimal de numeração. Podemos, empregando o princípio

> *"Todo algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vezes mais do que se estivesse no lugar desse outro",*

representar qualquer número nesse sistema por meio do algarismo 0 e dos símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, denominados *algarismos significativos* (3).

Mas, para estudar as propriedades gerais dos números, é conveniente representá-los por letras, dispensando o emprêgo de sistemas de numeração, de modo que os raciocínios e conclusões sejam válidos quaisquer que sejam os números representados por essas letras. Frequentemente se usa, em vez de letras distintas, a mesma letra afetada de índices, como a_1, a_2, a_3, . . ., ou de acentos, como a', a'', a''', ...

4 — Comparação dos números naturais — Para comparar dois números a e b, colocaremos as unidades de a e as unidades de b em correspondência, uma a uma, como indicam as figuras abaixo.



No primeiro caso, em que a todas as unidades de a correspondem todas as unidades de b, dizemos que os números a e b são iguais e escrevemos

$$a = b \quad (4)$$

(3) Segundo a hipótese de mais ampla aceitação, os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são de origem indiana. Tendo sido introduzidos na Europa pelos árabes, passaram a denominar-se *algarismos arábicos*. O símbolo 0, já usado pelos gregos na numeração sexagesimal (II sec. A. C.), é de origem desconhecida, devendo-se no entanto a denominação *zero*, bem como a de *algarismo*, aos árabes. Cfr. H. Schubert, *"Principes fondamentaux de l'Arithmétique", Encyclopédie des sciences mathematiques*, edição francesa de J. Molk I, 1. pág. 14 e segs.

(4) Trata-se de uma igualdade de símbolos numéricos para significar a identidade dos números considerados. Deve-se a instituição do sinal =, para a igualdade, a R. Record (1557).

No segundo caso, em que há unidades de a sem correspondentes em b, dizemos que o número a é maior do que o número b, e escrevemos

$$a > b \quad (5)$$

5 — Propriedades da igualdade. Da definição acima resultam para a igualdade as seguintes propriedades:

I) *Identidade*, isto é, $a = a$.

II) *Comutatividade*, isto é, se $a = b$, também temos $b = a$.

III) *Transitividade*, isto é, se $a = b$ e $b = c$, concluímos $a = c$.

6 — Propriedades da desigualdade. É fácil verificar-se que a desigualdade não admite a identidade nem é comutativa. De fato, não podemos ter $a > a$ ou $a < a$, e de $a < b$ não podemos tirar $b < a$, mas sim $b > a$.

A desigualdade é, entretantó, transitiva, pois é claro que se tivermos $a < b$ e $b < c$, poderemos daí concluir $a < c$.

7 — Sucessão dos números naturais. À *totalidade* dos números

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 9,\ 10,\ 11, \ldots,\ 19,\ 20,\ 21, \ldots$$

que se obteem acrescentando sempre uma unidade a cada número considerado, chama-se *sucessão dos números naturais* ou, ainda, *sucessão natural dos números*. Como se vê, os números estão dispostos em ordem crescente, isto é,

$$1 < 2 < 3 < \ldots . < 9 < 10 < 11 < \ldots .$$

A sucessão é *ilimitada* no sentido crescente, isto é, dado um número natural, existe sempre um *sucessor*.

(5) Os sinais $>$ e $<$ foram introduzidos por T. Harriot (1631), na obra *"Artis Analyticae Praxis"*.

Os sinais $\geq$ e $\leq$ são devidos a Bouguer.

8 — Números inteiros. Retirando-se todos os objetos de uma coleção, esta desaparece. Exprime-se êste fato dizendo que o número de objetos da coleção ficou sendo *zero* (0).

Os números

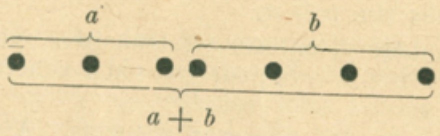
$$0, 1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 11, \ldots$$

são denominados *números inteiros*.

Não admitiremos *zero* como número *natural*.

TEORIA DA ADIÇÃO

9 — Soma de números inteiros. Consideremos duas coleções de objetos, uma contendo a objetos e outra b objetos. Juntando todos êsses objetos numa coleção única, diremos que a coleção resultante é a *soma* das coleções primitivas, e o número que lhe corresponde, a *soma* dos números a e b.



O mesmo critério se aplica no caso de considerarmos mais de duas coleções, de modo que podemos assim definir :

"SOMA *de vários números naturais* a, b, . . ., l *é o número* s *que contém todas as unidades de* a, b, . . ., l, *e somente essas*".

Indica-se que s é a soma dos números $a, b, \ldots, l$ escrevendo-se

$$s = a + b + \ldots + l \quad (^6)$$

Estendem-se as definições precedentes aos números inteiros mediante a convenção:

$$a + 0 = a \quad (^7)$$

(6) O sinal +, como abreviatura de *excesso*, aparece na *Aritmética Comercial* de J. Widman (1489). O seu emprêgo regular como sinal de operação data de 1630.

(7) Exprime-se êsse fato dizendo que *zero é módulo* ou *número indiferente* em relação à adição.

Em particular *a soma de dois números é igual a zero quando ambos são iguais a zero.*

10 — Propriedades da adição. I) A adição é *unívoca*, isto é, *somando-se vários números, obtém-se um resultado único.* (8).

Esta proposição, de caráter intuitivo, pode ainda ser enunciada do seguinte modo:

Sendo $\quad a = a', \; b = b', \; \ldots, \; l = l'$, vem

$$a + b + \ldots + l = a' + b' + \ldots + l'$$

isto é, *somando-se várias igualdades, membro a membro, obtém-se ainda uma igualdade.*

Em particular, *somando-se o mesmo número aos membros de uma igualdade, obtém-se ainda uma igualdade*, isto é, sendo $a = b$, tem-se $a + c = b + c$.

II) A adição é *comutativa*, isto é, *a soma independe da ordem das parcelas.* (9).

De fato, na definição de soma de números inteiros nenhum critério de ordem intervém, sendo a soma independente da ordem em que se consideram as parcelas. De modo que, por exemplo

$$a + b + c = a + c + b$$

III) A adição é *associativa*, isto é, *a soma não se altera quando se substituem duas ou mais parcelas por sua soma.*

Com efeito, adicionar b a a e depois acrescentar c, é o mesmo que às unidades de a reunir de uma só vez as unidades de $b + c$. Assim

$$a + b + c = a + (b + c) \quad (^{10})$$

Consequência — *Todo número é igual à soma das unidades decimais representadas pelos seus algarismos.*

(8) Em vez de *unívoca*, é comum o termo *uniforme* para as operações que dão um resultado único.

(9) As denominações *comutativa* e *distributiva* foram introduzidas por F. Servois (1815). Mais tarde Hamilton acrescentou a denominação *associativa*.

(10) O emprêgo de parênteses data de N. Fontana (Tartaglia), "*General trattato di numeri et misure*", Veneza, 1556-60, parte 2ª.

De fato, como todo número representa a soma de suas unidades simples, associando-se estas em dezenas, tornaremos o número em soma de dezenas e unidades; associando-se as dezenas em centenas, tornaremos o número em soma de centenas, dezenas e unidades; e assim por diante.

Temos, por exemplo :

$$8703 = 8000 + 700 + 3$$

IV) A adição é *dissociativa*, isto é, *a soma não se altera quando se substitue qualquer parcela por várias outras das quais a mesma é a soma.*

Com efeito, da igualdade

$$a + b + c + d + e = a + (b + d + e) + c$$

por exemplo, concluímos pela propriedade comutativa das igualdades:

$$a + (b + d + e) + c = a + b + c + d + e$$

podendo-se, pois, substituir a soma efetuada $(b + d + e)$ pela soma indicada $b + d + e$. Assim:

$$3 + 15 = 3 + 7 + 8$$

V) A adição é *monotônica*, isto é, *somando-se o mesmo número aos membros de uma desigualdade, obtém-se outra desigualdade do mesmo sentido.*

Assim, sendo $a < b$, tem-se $a + c < b + c$
Por exemplo, de $5 < 9$ vem $5 + 7 < 9 + 7$

11 — Adição de desigualdades. *Somando-se, membro a membro, várias desigualdades do mesmo sentido, obtém-se outra desigualdade do mesmo sentido.*

Das desigualdades $a > a'$ e $b > b'$ resulta (**10, V**), somando-se b aos membros da primeira e a' aos membros da segunda:

$$a + b > a' + b$$
$$a' + b > a' + b'$$

Daí concluimos (**6**):

$$a + b > a' + b'$$

A demonstração estende-se a um número qualquer de desigualdades.

Assim, das desigualdades

$$2 < 5, \quad 3 < 8, \quad 6 < 7$$

vem

$$2 + 3 + 6 < 5 + 8 + 7 \quad \text{ou} \quad 11 < 20$$

12 — Regra prática da adição. Nas proposições II, III e IV, baseia-se a regra prática para somar dois ou mais números dados por sua representação decimal. Assim, para somar os números

$$n_1 = \ldots c_1 d_1 u_1 \text{ e } n_2 = \ldots c_2 d_2 u_2$$

em que u_1 e u_2 representam os algarismos das unidades, d_1 e d_2 os algarismos das dezenas, etc., somamos primeiro os algarismos u_1 e u_2 (11). Suponhamos que se obtenha um resultado composto de u unidades e de δ dezenas, isto é:

$$u_1 + u_2 = u + \delta$$

Somando em seguida δ com os algarismos d_1 e d_2, obteremos um resultado constituído de d unidades e de δ' dezenas, isto é,

$$\delta + d_1 + d_2 = d + \delta'$$

e assim por diante. Os algarismos da soma são, da direita para a esquerda, u, d, ..., figurando por último aqueles que se obtéem na última adição parcial.

Na prática, dispostas as parcelas em sucessivas linhas horizontais, de modo que as unidades de mesma ordem decimal fiquem na mesma coluna, somam-se os algarismos de cada coluna, começando-se da direita para a esquerda. Debaixo de cada coluna escreve-se apenas o algarismo das unidades do respectivo total, *transportando-se* para a coluna seguinte o número de dezenas, como se verifica no exemplo indicado.

$$\begin{array}{rrrrr} & (2) & (1) & (2) & \\ & & 5 & 6 & 9 \\ & 7 & 9 & 1 & 5 \\ & 4 & 8 & 3 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

(11) Por *soma dos algarismos* entenda-se *soma dos valores absolutos dos algarismos*.

22. 1781,712m³. **23**. 13,85dm. **24**. 2,28m. **25**. 4,62cm e 1,732cm. **26**. 3,3125m². **27**. 3,93cm. **28**. 935,306cm³. **29**. 96cm³. **30**. 855,36m³. **31**. 533,333cm³. **32**. 2728,527cm³. **33**. 2,341. **34**. 0,594312m³. **35**. 751,68dm³. **36**. 3865,972cm³. **37**. 201,474m³. **38**. 3cm³. **39**. 9,882m³. **40**. 144,333dm³. **41**. 1,591m³. **42**. 10cm³. **43**. 22,5dm³. **44**. 36m³. **45**. 72m³. **46**. 5,1401m². **47**. 5m. **48**. 200cm³. **49**. 2/3. **50**. 45cm³. **51**. 8cm. **52**. $^8/_3\sqrt{2}$m². **53**. 5,345dm³. **54**. 2,497cm³. **55**. 832cm³. **56**. 4,068cm. **57**. 5,94m. **58**. 2,19dm. **59**. 1984m³. **60**. 893cm³. **61**. 5,89cm. **62**. $57\sqrt{3}$cm³. **63**. 324cm³. **64**. 14m². **65**. 12,5cm². **66**. 200dm³. **67**. 28,320dm³. **68**. 0,84m². **69**. 248,63cm². **70**. 29,7dm. **71**. 24m². **72**. 9cm e 14. **73**. 8,44m³. **74**. 714cm³. **75**. 23,382m². **76**. $d = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$. **77**. $^2/_3$. **78**. $2m^2x^4 - m^4x^2 + a^6 = 0$. Conforme seja $m^2 \lesseqgtr 2a^2$, o problema admite *zero*, *uma* ou *duas* soluções. **79**. O lado da base maior é dado pela equação $3hx^2 - 3hdx + hd^2 - V = 0$. O problema admite uma solução quando se tem $V > hd^2/_3$; quando $V = hd^2/_3$ o tronco degenera em pirâmide. **80**. Porque tal soma é igual a $\dfrac{6V}{la'}$. **81**. Considerando a base B decomposta em triângulos de áreas $b_1, b_2, b_3, \ldots$ e a base B' em triângulos de áreas $b'_1, b_2', b_3', \ldots$ temos

$$\frac{b_1'}{b_1} = \frac{b_2'}{b_2} = \frac{b_3'}{b_3} = \ldots \frac{B'}{B}$$

donde se deduz $\sqrt{b_1b_1'} + \sqrt{b_2b_2'} + \ldots = \sqrt{BB'}$. **82**. *a*) Faz-se $B = B' = S$, *b*) Faz-se $B' = 0$ e $S = \frac{1}{4}B$, *c*) Da proporcionalidade das distâncias do vértice aos planos das bases B, B' e da secção S, deduz-se $2\sqrt{S} = \sqrt{B} + \sqrt{B'}$ e, elevando ao quadrado, $4S = B + B' + 2\sqrt{BB'}$. *d*) Tem-se $B = ab$, $B' = cd$, $S = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

Teorema de Euler. Noções sôbre os poliedros regulares

Pág. 396.

1. 11. **2**. 6. **3**. 42. **4**. 18 arestas, 12 vértices, 40 retos. **5**. 57 faces, 40 vértices, 95 arestas. **6**. 15. **7**. 20. **8**. *a*) 72r *b*) 48r *c*) 40r *d*) 40r. **9**. *a*) octogonal, *b*) pentadecagonal, *c*) icosagonal, *d*) heptagonal. **10**. 6 triangulares e 9 quadrangulares. **11**. *a*) hexagonal, *b*) octogonal, *c*) pentadecagonal. **12**. *a*) 62,352cm² e 25,452cm³, *b*) 31,176cm² e 12,726cm³. **13**. 16,588cm² e 4,5cm³. **14**. *a*) 3cm, *b*) 5dm. **15**. *a*) 1dm, *b*) 1dm. **16**. *a*) 117,875dm³, *b*) 1,590dm³. **17**. 20,3953dm². **18**. 1,59075dm³.

ÍNDICE

Cr$ 1.000,00
4-11-991

N.º 3.505 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

25

EXTRATO DO CATÁLOGO DA LIVRARIA FRANCISCO ALVES

FAUSTO BARRETO e CARLOS DE LAET

Antologia Nacional

NELSON ROMERO

A Pronuncia do Latim

O programa de latim no Ginásio — 1ª e 2ª Séries

" " " " " " — 3ª e 4ª "

O Programa de Latim — 2º ciclo. 1ª Série

JOÃO PECEGUEIRO

Química — 1º vol.

Química — 2º vol.

CARLOS H. DA ROCHA LIMA

Teoria de Análise Sintática

OSWALDO SERPA

Modern English Grammar

OSWALDO SERPA e OTELO REIS

Medical English

M. S. HULL e MACHADO SILVA

English Literature

NICANOR LEMGRUBER. — C. THIRÉ e MELO E SOUSA

Matemática Comercial e Financeira

HENRI DE LANTEUIL

Histoire litteraire — Première Série

Histoire litteraire — Deuxième Série

AFRÂNIO PEIXOTO

Noções de História da Literatura Brasileira

Noções de História de Literatura Geral

JOSÉ OITICICA

Manual do Estilo

BASÍLIO DE MAGALHÃES

História do Brasil — 1 vol.

AFONSO VARZEA. — VERÍSSIMO C. PEREIRA e AQUARONE

Geografia Física

Geografia Humana

Mário Vieira de Mesquita

Pontos de Química Analítica — 2ª edição

Remetemos nosso catálogo gratis a quem o pedir