ROBERTO PEIXOTO
DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

Elementos de Calculo Vetorial

De acordo com os programas dos Cursos Complementares

3.ª EDIÇÃO

1943
EDITORA MINERVA, LTDA.
Rua do Ouvidor N.º 145 — Rio de Janeiro

8,00

ELEMENTOS de

Cálculo Vetorial

À memória

dos meus pais

ROBERTO JOSE FONTES PEIXOTO
PROF. DO INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

ELEMENTOS de

Cálculo Vetorial

De acordo com os programas dos Cursos Complementares

3.ª Edição

1 9 4 3
EDITORA MINERVA LIMITADA
RUA DO OUVIDOR 145 — RIO

Comp. e impresso nas Oficinas Gráficas ALBA,
de A. M. CARDOSO — Lavradio, 60 — Rio

CAPÍTULO I

Grandezas escalares e vetoriais. Vetores. Soma de um ponto e um vetor.

1) As grandezas científicas se classificam em *escalares e vetoriais*.

Grandezas escalares são as grandezas algébricas ordinárias que ficam perfeitamente determinadas, nos seus diferentes estados, por um número real, independentemente da noção de orientação. São a densidade de uma substância, o trabalho de uma força, o número de habitantes de uma cidade, etc.

Grandezas vetoriais são as grandezas que além de um valor quantitativo exigem, para sua perfeita determinação, as noções de direção e sentido. São as forças, as velocidades, as acelerações, o fluxo magnético, etc.

2) A cada grandeza vetorial fazemos corresponder um *vetor*, elemento geométrico abstrato que está para a grandeza vetorial como o número está para a grandeza escalar (*).

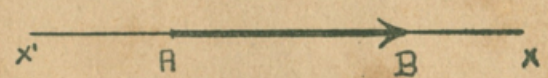
(*) RAOUL BRICARD — Le Calcul Vectoriel.

REPRESENTAÇÃO E CARACTERÍSTICOS DE UM VETOR

3) Um vetor $\overrightarrow{AB}$ (*) é representado geometricamente por uma flecha (fig. 1) e é caracterizado por:

I — *Grandeza* ou *módulo*, que é o número aritmético (**) que mede o segmento de reta AB;

II. — *Direção* ou *suporte* que é a reta indefinida $x'x$ que contém o vetor;



(Fig. 1)

III. — *Sentido* que é o de um movel que se desloque da origem A à extremidade B do vetor.

4) Um vetor de origem A e extremidade B é designado por $\overrightarrow{AB}$, lendo-se *vetor AB*. Grassmann (1844) propoz representar o vetor $\overrightarrow{AB}$ pela notação $B - A$ (***).

CLASSIFICAÇÃO DOS VETORES

5) Podemos classificar os vetores da seguinte forma:

$$\textit{Vetores} \begin{cases} \textit{Livres} \\ \textit{Localizados em um} \begin{cases} \textit{ponto} \\ \textit{eixo} \end{cases} \end{cases}$$

(*) "O vetor é um conjunto ordenado de dois pontos" — R. ESTÈVE et H. MITAULT — **Cours de Géométrie.**

(**) Número aritmético é o resultado da comparação (razão) da grandeza (segmento AB) com a unidade (segmento unitário ou estado padrão da grandeza).

(***) Ver § 19.

Um vetor é *livre* quando a sua origem é inteiramente arbitrária, isto é, quando ela pode coincidir com um ponto qualquer do espaço.

Um vetor é *localizado* em *um ponto* quando a sua origem coincide com esse ponto. A grandeza representada pelo vetor é então *função do vetor e do ponto*.

Um vetor é *localizado* em *um eixo* quando tem por suporte esse eixo e sua origem pode ser um ponto qualquer do eixo. E' um *vetor deslizante*.

OUTRAS ESPÉCIES DE VETORES. VALOR ALGÉBRICO DE UM VETOR. EQUIPOLÊNCIAS.

6) *Vetor unitário de um eixo* (*) ou *versor de um eixo* é um vetor que tem por suporte esse eixo, por módulo 1 e por sentido o sentido positivo do eixo. Ele define o eixo.

7) *Versor de um vetor* é o vetor unitário localizado sobre o vetor.

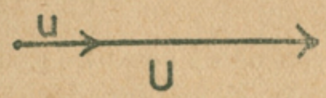
8) *Valor algébrico de um vetor localizado em um eixo ou cujo suporte é paralelo a um eixo* é o número que exprime o módulo do vetor precedido do sinal + ou do sinal —, conforme o sentido do vetor é o sentido positivo ou o sentido negativo do eixo, respectivamente.

Si um vetor fôr representado por $\overrightarrow{AB}$, representaremos o seu valor algébrico por $\overline{AB}$ e o seu módulo por AB.

Quando não há possibilidade de confusão, costumamos representar um vetor por uma única letra, U por exemplo, encimada por uma flecha (4), isto é, por $\vec{U}$. Neste caso, o

(*) **Reta orientada ou eixo** é uma reta na qual escolhemos, arbitrariamente, um sentido de percurso para um movel que nela se desloque. Este sentido é chamado **positivo** e o sentido contrário é o sentido **negativo.**

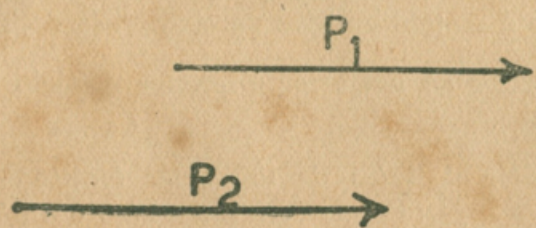
seu valor algébrico será representado por $\overline{U}$, o seu módulo por U e o seu versor (7) por $\vec{u}$ (fig. 2).



(Fig. 2)

9) Dois vetores não nulos são *paralelos* quando suas direções são paralelas a uma mesma reta. São tambem chamados *vetores colineares*.

10) *Vetores equipolentes* são os vetores que têm o mesmo módulo, a mesma direção ou direções paralelas, e, o mesmo sentido (fig. 3).



(Fig. 3)

Para exprimirmos que dois vetores $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$ são equipolentes, escrevemos a *equipolência*

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 \; (*)$$

11) As *equipolências* possuem as mesmas leis das igualdades aritméticas:

(*) Alguns autores preferem definir **vetor livre** (5) como o vetor que pode ser substituido por qualquer outro que lhe seja equipolente.

I. — *Lei reflexiva*: — Todo vetor é equipolente a si mesmo:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_1$$

II. — *Lei simétrica*: — Se um vetor é equipolente a outro, reciprocamente este outro é equipolente ao primeiro.

Assim, se

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2$$

temos

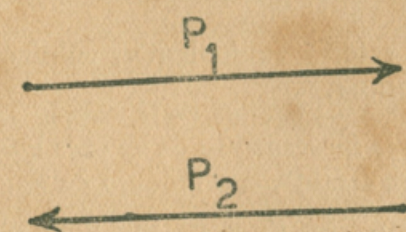
$$\vec{P}_2 = \vec{P}_1$$

III. — *Lei transitiva*: — Dois vetores equipolentes a um terceiro são equipolentes entre si:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{P}_1 = \vec{P}_2 \\ \vec{P}_2 = \vec{P}_3\end{array}\right\} \vec{P}_1 = \vec{P}_3$$

12) Dois vetores livres, equipolentes, são *iguais*.

13) *Vetores simétricos, opostos* ou *contrários* são os vetores paralelos, do mesmo módulo e de sentidos contrários (fig. 4).



(Fig. 4)

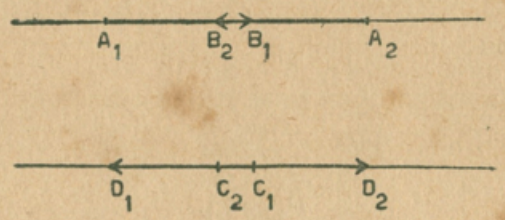
Escrevemos:

$$\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$$

14) *Vetores diretamente opostos* são dois vetores contrários localizados no mesmo eixo (fig. 5).

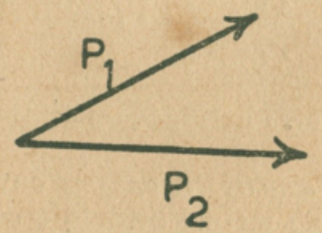
$$\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{A_2B_2}$$

$$\overrightarrow{C_1D_1} = -\overrightarrow{C_2D_2}$$



(Fig. 5)

15) *Vetores coiniciais* são os vetores que têm a mesma origem (fig. 6).



(Fig. 6)

16) Dois vetores equipolentes, coiniciais, coincidem; são *vetores idênticos*.

17) *Vetores inversos* são os vetores que têm a mesma direção, o mesmo sentido, e, o módulo de um é o inverso do módulo do outro. Se $\overrightarrow{P_1}$ e $\overrightarrow{P_2}$ são dois vetores inversos, temos:

$$P_1 = \frac{1}{P_2}$$

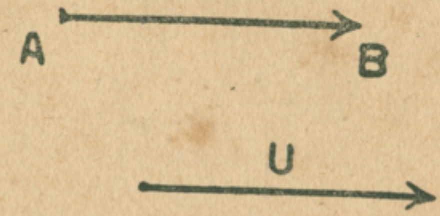
18) *Vetor zero* ou *vetor nulo* é o vetor cujo módulo é nulo. Sua direção é indeterminada: ele é paralelo a todos os vetores.

Todos os vetores nulos são equipolentes.

SOMA DE UM PONTO E DE UM VETOR. DIFERENÇA DE DOIS PONTOS.

19) Consideremos um ponto A e um vetor $\overrightarrow{U}$ (fig. 7). Traçando por A um vetor $\overrightarrow{AB}$ equipolente a $\overrightarrow{U}$ escrevemos:

$$A + \overrightarrow{U} = B$$



(Fig. 7)

e dizemos que o ponto B é a soma do ponto A e do vetor $\overrightarrow{U}$, ou que o vetor $\overrightarrow{U}$ *transporta* o ponto A ao ponto B: a soma de um ponto e de um vetor é, pois, um ponto, perfeitamente determinado.

A igualdade acima, tratada como igualdade algébrica, dá:

$$\overrightarrow{U} = B - A$$

ficando justificada a notação de vetor proposta por Grassmann (4).

E' evidente ainda que temos:

$$B - A = -(A - B)$$

e

$$B = A + (B - A)$$

exatamente de acordo com as regras do cálculo algébrico.

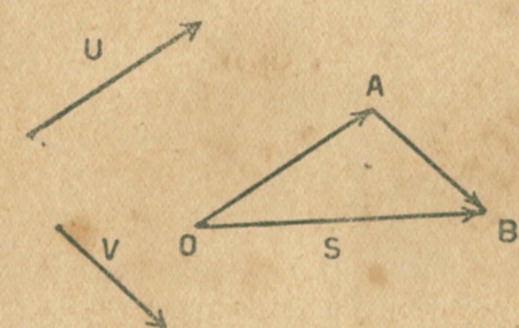
CAPÍTULO II

Adição de vetores. Relação de Chasles. Produto de um número real por um vetor. Subtração de vetores. Propriedades das equipolências. Projeções de vetores. Teorema de Carnot.

ADIÇÃO DE VETORES

20) *Adição de dois vetores livres.*

Tomemos dois vetores livres $\vec{U}$ e $\vec{V}$ (fig. 8). Por um ponto qualquer O do espaço tracemos um vetor $\vec{OA}$ equi-



(Fig. 8)

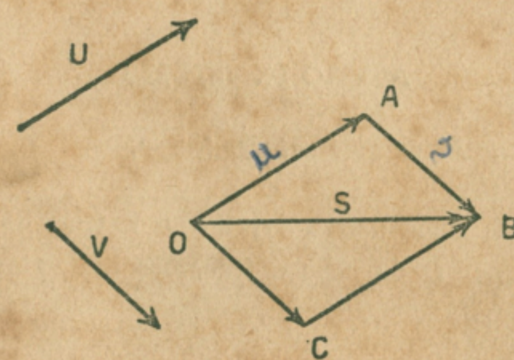
polente a $\vec{U}$ e pelo ponto A um vetor $\vec{AB}$ equipolente a $\vec{V}$. O vetor $\vec{OB}$ ou qualquer vetor equipolente é, por definição, a *soma geométrica*, ou simplesmente *soma* ou *resultante*, dos dois vetores $\vec{U}$ e $\vec{V}$. Escrevemos então a equipolência:

$$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V}$$

$\vec{U}$ e $\vec{V}$ são as *componentes* e $\vec{S}$ a *resultante*.

O ponto O deslocando-se no espaço, o vetor $\vec{S}$ se desloca equipolentemente a si mesmo.

21) *Teorema*: — A adição de dois vetores é *comutativa*, isto é, independe da ordem das parcelas.



(Fig. 9)

Com efeito, sejam os dois vetores livres $\vec{U}$ e $\vec{V}$ (fig. 9). Tomemos um ponto qualquer O do espaço, por ele tracemos os vetores $\vec{OA}$ e $\vec{OC}$ equipolentes, respectivamente, a $\vec{U}$ e a $\vec{V}$, e, completemos o paralelogramo $OABC$. Como os lados opostos de um paralelogramo são iguais, podemos escrever:

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OC} + \vec{CB} = \vec{S}$$

ou

$$\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U} = \vec{S}$$

22) Quando dois vetores não são colineares, a construção da sua soma geométrica dá um triângulo. Como cada lado de um triângulo está compreendido entre a soma e a diferença dos outros dois, temos:

$$U + V > S > U - V$$

isto é, o módulo da soma de dois vetores, não colineares, está compreendido entre a soma e a diferença dos módulos desses vetores.

23) O paralelogramo que construimos na soma de dois vetores (21) é denominado *paralelogramo dos vetores* ou *paralelogramo da soma vetorial*.

24) Apliquemos ao triângulo OAB (fig. 9) o teorema da trigonometria elementar: O quadrado de um lado qualquer de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o duplo produto deles pelo cosseno do ângulo que eles formam; temos:

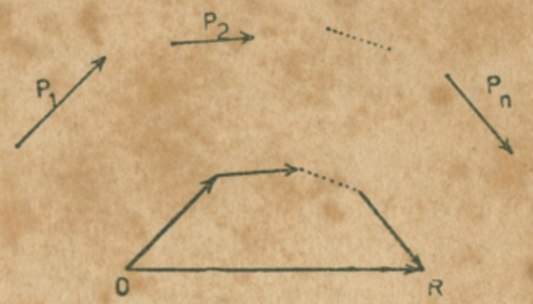
$$\begin{aligned} S^2 &= U^2 + V^2 - 2\,UV \cos OAB = \\ &= U^2 + V^2 - 2\,UV \cos(\pi - AOC) = \\ &= U^2 + V^2 - 2\,UV \cos(\vec{U}, \vec{V}) \end{aligned}$$

que é a expressão do quadrado do módulo da soma dos dois vetores.

25) *Adição de um número qualquer de vetores livres.*

Para obtermos a soma geométrica de varios vetores livres $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \ldots, \vec{P_n}$ (fig. 10), tomamos um ponto qualquer O do espaço e por ele traçamos um vetor equipolente a $\vec{P_1}$; pela extremidade do vetor obtido traçamos um vetor equipolente a $\vec{P_2}$, pela extremidade do novo vetor um vetor equipolente a $\vec{P_3}$, e, assim por diante, até traçarmos um vetor equipolente a $\vec{P_n}$. O vetor OR que liga o ponto O à extremidade do vetor equipolente a $\vec{P_n}$, é a *soma geométrica* ou *resultante* dos vetores dados.

O polígono $OABC \ldots R$ é chamado *polígono dos vetores*. Se o ponto R coincide com O a resultante é nula e o contorno poligonal é *fechado*.



(Fig. 10)

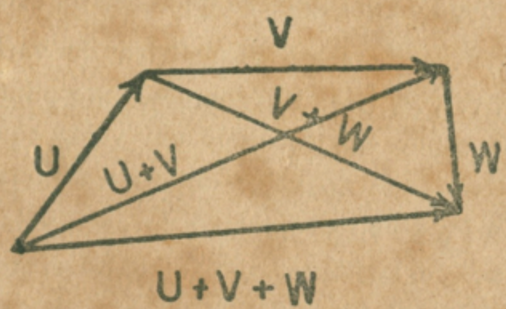
Se o ponto O se desloca no espaço, a resultante $\vec{OR}$ se desloca equipolentemente a si mesma.

Observação: — A adição de vetores goza da *propriedade de grupo*: feita sobre vetores dá um vetor.

26) *Teorema*: — A adição de vetores é *associativa*.

A simples observação da figura 11 mostra que numa soma de vários vetores podemos substituir dois ou mais deles por sua soma efetuada:

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{W} = (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$$

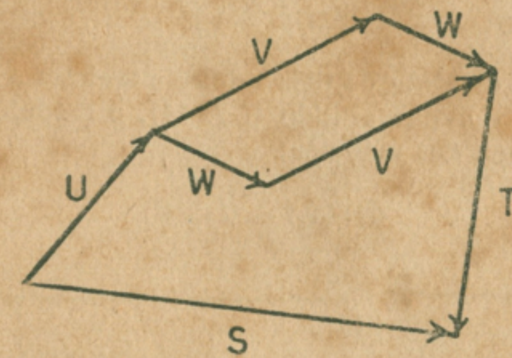


(Fig. 11)

27) *Teorema*: — A adição de um número qualquer de vetores é *comutativa*, isto é, independe da ordem em que são tomadas as parcelas.

A figura 12 mostra que podemos inverter duas componentes consecutivas:

$$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V} + \vec{W} + \vec{T} = \vec{U} + \vec{W} + \vec{V} + \vec{T}$$



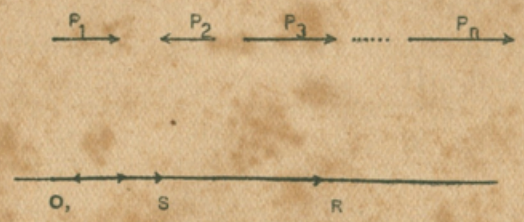
(Fig. 12)

Como é facil verificar, no caso de duas componentes não consecutivas o teorema é tambem verdadeiro:

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{W} + \vec{T} = \vec{U} + \vec{W} + \vec{V} + \vec{T} = \vec{W} + \vec{U} + \\ + \vec{V} + \vec{T} = \vec{W} + \vec{V} + \vec{U} + \vec{T}$$

ADIÇÃO DE VETORES COLINEARES

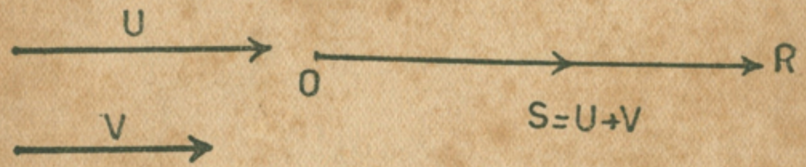
28) Aplicando a regra que demos anteriormente (25), à determinação da soma geométrica dos vetores $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{P_3}$, ..., $\vec{P_n}$, paralelos a uma mesma reta (fig. 13), o polígono dos vetores reduz-se a um segmento de reta, e, o valor algébrico da soma dos vetores é igual à soma dos valores algébrico dos vetores.



(Fig. 13)

No caso da soma de dois vetores paralelos a uma mesma reta e do mesmo sentido (fig. 14), o módulo da soma é igual à soma dos módulos:

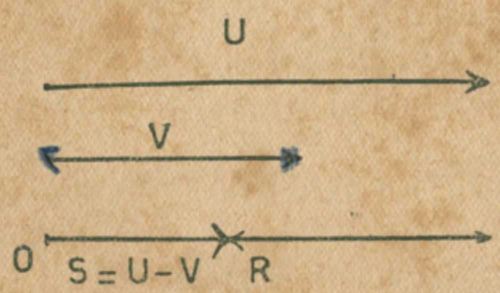
$$OR = S = U + V$$



(Fig. 14)

Se dois vetores são paralelos a uma mesma reta mas têm sentidos contrários, o módulo da soma é igual à diferença dos módulos (fig. 15):

$$OR = S = U - V$$



(Fig. 15)

No caso mais particular de dois vetores simétricos, a resultante é um vetor nulo:

$$\vec{U} + (-\vec{U}) = O$$

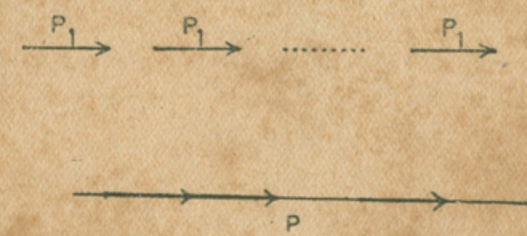
Conclusão: Na adição de vetores ficam respeitadas as leis da adição algébrica.

PRODUTO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL. QUOCIENTE DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL.

29) Se os vetores $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \ldots, \vec{P_n}$ (28), são iguais, a sua soma é

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_1} + \ldots + \vec{P_1} = n\,\vec{P_1}$$

e dizemos: *O produto de um vetor* $\vec{P_1}$ *por um número n, inteiro e positivo, é um vetor* $\vec{P}$, da mesma direção que $\vec{P_1}$, e cujo módulo é nP_1 (fig. 16).



(Fig. 16)

30) De

$$\vec{P} = n\vec{P_1}$$

tiramos:

$$\vec{P_1} = \frac{\vec{P}}{n}$$

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII