ROBERTO PEIXOTO

ANÁLISE COMBINATÓRIA
BINÔMIO DE NEWTON
POTÊNCIA DE UM POLINÔMIO

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

20

Murilo Marinho 15-3-61

Análise Combinatória
Binômio de Newton
Potência de um polinômio

24-5-64

ROBERTO PEIXOTO
(Do Instituto de Educação)

Análise Combinatória
Binômio de Newton
Potência de um polinômio

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
EDITORA PAULO DE AZEVEDO LTDA.
166, Rua do Ouvidor — Rio de Janeiro
SÃO PAULO | BELO HORIZONTE
292, Rua Líbero Badaró | Rua Rio de Janeiro, 655
1950

Nº 1631

Murilo Marinho
15-3-61

A

MANOEL DE MORAES BARROS NETTO

ANÁLISE COMBINATÓRIA

23-5-64

1. **A Análise Combinatória** *tem por objeto o estudo da formação, da contagem e das propriedades dos agrupamentos que podemos fazer segundo leis determinadas, com um número finito de elementos dados, de natureza qualquer.*

As origens da Análise Combinatória remontam aos geômetras gregos, entre os quais alunos da Escola de Pitágoras, que estudaram os *números figurados*. Rey Pastor, nos "Elementos de Análise Algebraico", atribui a Jacques Bernouilli (1654-1705) a sistematização da teoria, no seu trabalho *Ars Conjectandi* (1713). Os trabalhos mias destacados sôbre o assunto foram os de Nicolas Fontana (Tartaglia) (1500-1557) e de Blaise Pascal (1623-1662), relativos ao *triângulo aritmético*, os de G. W. Leibnitz (1646-1716), de J. Wallis (1616-1703) e os de A. Moivre (1667-1754).

Alguns autores — principalmente os italianos — preferem a denominação Cálculo Combinatório em vez de Análise Combinatória.

Como a natureza dos elementos não interessa, tais elementos são, geralmente, representados por letras distintas,

$$a \quad b \quad c \quad \ldots \quad j \quad k \quad l$$

ou por uma mesma letra afetada de índices diferentes,

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_{n-2} \quad a_{n-1} \quad a_n$$

Os *agrupamentos fundamentais* são denominados *arranjos, permutações* e *combinações*. Êles podem ser *simples* quando os elementos que entram em cada agrupamento são distintos, isto é, não são repetidos, e *completos* ou *com repetição* em caso contrário. Estudaremos em primeiro lugar os agrupamentos simples.

ANÁLISE COMBINATÓRIA SEM REPETIÇÃO

ARRANJOS

2. Arranjos *de* m *elementos tomados* p *a* p, *ou de classe* p (p≤m), *são os agrupamentos distintos que podemos formar com êsses elementos de forma que cada agrupamento contenha* p *elementos e difira de todos os outros pela ordem ou pela natureza dos elementos que nêles entram.*

Em lugar de *classe p* usam-se também as denominações *módulo p* e *ordem p*. Alguns autores denominam os arranjos de *disposições* (italianos) e *variações* (espanhóis), sendo ainda usada a denominação *distribuições*. Rey Pastor (*) condena a denominação *coordenações*.

Exemplo: — Com os 3 elementos a, b, e c, tomados 2 a 2, podemos formar os arranjos

$$\begin{array}{ccc} ab & ba & ca \\ ac & bc & cb \end{array}$$

Insistiremos que dois arranjos distintos podem diferir um do outro seja pela *ordem* seja pela *natureza* dos seus elementos.

O número de arranjos de m elementos p a p é representado por um dos símbolos

$$A_m^p \qquad\qquad A_{m,\,p}$$

que significam *número de arranjos de* m *elementos* p *a* p, ou *número de arranjos de* m *elementos de classe* p.

Os arranjos de classes 1, 2, 3, ... são também denominados arranjos *unitários, binários, ternários*, ..., respectivamente.

(*) Obra citada.

3. Formação dos arranjos e cálculo do seu número — Consideremos os m elementos

$$a \quad b \quad c \quad \ldots \quad j \quad k \quad l$$

E' evidente que

$$A_m^1 = m$$

pois cada um dos elementos constitui um arranjo unitário.

Para formar os arranjos dos m elementos 2 a 2, tomamos cada um dos arranjos dos m elementos 1 a 1 e à sua direita escrevemos cada um dos m — 1 elementos restantes:

$$\begin{array}{ccccc} ab & ac & ad & \ldots & al \\ ba & bc & bd & \ldots & bl \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ la & lb & lc & \ldots & lk \end{array}$$

Obteremos desta forma *todos* os arranjos dos m elementos 2 a 2 sem omissão nem repetição. Com efeito, não haverá *omissão* porque na primeira linha estão todos os arranjos que começam por a, na segunda os que começam por b, ..., na última os que começam por l. Não haverá *repetição* de nenhum arranjo porque os arranjos de cada linha diferem pelo segundo elemento e os de duas linhas diversas diferem pelo primeiro elemento.

Como cada um dos arranjos dos m elementos 1 a 1 dá m — 1 arranjos dos m elementos 2 a 2, teremos:

$$A_m^2 = A_m^1\,(m-1)$$

Para formar os arranjos dos m elementos 3 a 3, tomamos cada um dos arranjos dos m elementos 2 a 2 e à sua direita escrevemos cada um dos m — 2 elementos restantes:

$$\begin{array}{ccccc} abc & abd & abe & \ldots & abl \\ acb & acd & ace & \ldots & acl \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ bac & bad & bae & \ldots & bal \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ lka & lkb & lkc & \ldots & lkj \end{array}$$

Êste quadro conterá *todos* os arranjos dos m elementos 3 a 3 sem omissão nem repetição. Com efeito, não haverá *omissão* porque os arranjos ternários são formados dos arranjos dos m elementos 2 a 2 colocando-se à direita de cada um dêles cada um dos $m - 2$ elementos restantes, e, a falta de um dêles obrigaria a falta do correspondente nos arranjos dos m elementos 2 a 2, o que é contra a hipótese pois supuzemos completo o quadro dos arranjos binários; não haverá *repetição* porque os arranjos de cada linha diferem pelo último elemento e os de duas linhas diversas diferem pela ordem ou pela natureza dos dois primeiros elementos.

Como cada um dos arranjos dos m elementos 2 a 2 dá $m - 2$ arranjos dos m elementos 3 a 3, teremos:

$$A_m^3 = A_m^2 \ (m - 2)$$

De um modo geral, para formar os arranjos dos m elementos p a p, tomamos cada um dos arranjos dos m elementos $p - 1$ a $p - 1$ e à sua direita escrevemos cada um dos $m - (p - 1)$ elementos restantes. Não haverá nem omissão nem repetição, o que provaríamos como fizemos nos arranjos ternários. Como cada um dos arranjos dos m elementos $p - 1$ a $p - 1$ dá $m - (p - 1)$ arranjos dos m elementos p a p, teremos:

$$A_m^p = A_m^{p-1} [m - (p - 1)] \qquad \text{ou}$$

$$A_m^p = A_m^{p-1} \ (m - p + 1) \qquad (1)$$

E' esta a primeira fórmula do número de arranjos de m elementos p a p.

Observação: — Não há necessidade, no *raciocínio por recorrência* — aqui empregado — também chamado *indução matemática*, de se formarem os arranjos binários, ternários, ..., para depois então fazer-se a generalização. Bastará considerar os arranjos unitários e passar em seguida à generalização.

Nisto está, justamente, a pujança dêsse raciocínio considerado por Poincaré (1854-1912) *o raciocínio matemático por excelência* ("La Science et l'Hypothése). A exposição que aqui adotamos de fazer os arranjos 2 a 2, 3 a 3, ..., é puramente didática.

Fazendo na fórmula (1) $p = 2, 3, 4, \ldots, p$, teremos:

$$A_m^2 = A_m^1 \ (m - 1)$$

$$A_m^3 = A_m^2 \ (m - 2)$$

$$A_m^4 = A_m^3 \ (m - 3)$$

. . . .

$$A_m^p = A_m^{p-1} \ (m - p + 1)$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades e suprimindo na igualdade resultante os fatores comuns aos dois membros, levando em conta que $A_m^1 = m$, teremos:

$$A_m^p = m \ (m - 1) \ (m - 2) \ \ldots \ (m - p + 1) \qquad (2)$$

E esta a segunda fórmula do número de arranjos de m elementos p a p.

O número de fatores do segundo membro sendo $m - (m - p + 1) + 1 = p$, diremos: *o número de arranjos de* m *elementos* p *a* p *é igual ao produto dos* p *números inteiros, consecutivos decrescentes dos quais o maior é* m.

Exercícios: — Em um ônibus há 8 lugares vagos. 5 pessoas tomam o ônibus. De quantas maneiras diferentes elas se podem sentar nos 8 lugares?

$$A_8^5 = \underbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}_{5} = 6720$$

MURILO MARINHO

5. Fatorial — *Fatorial de um número natural* p *é o produto dos* p *primeiros números naturais*. Assim, fatorial de 5 é $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

A denominação de fatorial é devida a L. F. A. Arbogast (1759-1803) em 1800.

Para indicar *fatorial de p* usamos os símbolos $p\,!$ devido a Christin *Kramp* (1760-1826) em 1808; $\pi(p)$ proposto por Gauss (1777-1855) em 1811-13. Os inglêses adotam comumente a notação $\underline{|p}$. Assim,

$$p! = \pi\,(p) = \underline{|p} = 1.2.3.4\,\ldots\,p$$

Severi (Lezioni de Analisi) diz que o uso do sinal de exclamação (!) para representar fatorial vem do crescimento rapidíssimo de $n!$ com n.

Multiplicando e dividindo o segundo membro da fórmula (2) por $(m-p)!$, isto é, por $(m-p)\,(m-p-1)\,\ldots\,3.2.1$, teremos:

$$A_m^p = \frac{[m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-p+1)]\,(m-p)!}{(m-p)!}$$

ou

$$A_m^p = \frac{m\,!}{(m-p)!} \qquad (3)$$

e obtemos assim outra fórmula do número de arranjos.

CONVENÇÃO: — Se na fórmula (1) fizermos $p = 1$, teremos:

$$A_m^1 = A_m \;.\; m$$

Como $A_m^1 = m$, teremos:

$$m = A_m^0 \;.\; m \quad \therefore \quad A_m^0 = 1$$

Para admitirmos como geral a fórmula (1) temos, pois, que convencionar que $A_m^0 = 1$.

PERMUTAÇÕES

5. Permutações *de* p *elementos são os agrupamentos que podemos formar com êsses* p *elementos, em tôdas as ordens possíveis, entrando em cada agrupamento os* p *elementos*. Por outras palavras, são os arranjos dos p elementos p a p.

EXEMPLO: — Com os 3 elementos a, b e c, podemos formar as permutações

$$abc \qquad acb \qquad bac \qquad bca \qquad cab \qquad cba$$

Observemos que, como em cada permutação têm que entrar todos os elementos, as permutações só diferem entre si na *ordem* dos elementos. Os arranjos de m elementos podem ser 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, ..., p a p $(p \leq m)$; as permutações de p elementos são os arranjos dos p elementos p a p.

Um exemplo de permutações temos nos *anagramas*. Anagrama de uma palavra é outra palavra formada com as mesmas letras da primeira. Assim, a palavra *prato* dá os anagramas *porta, topar, rapto, optar, trapo, topar, tropa, potra*.

O número de permutações de p elementos é representado pelo símbolo

$$P_p$$

6. Cálculo do número de permutações. Empregando a fórmula (2), teremos:

$$P_p = A_p^p = p\,(p-1)\,(p-2)\,\ldots\,(p-p+1)$$

ou

$$P_p = p\,(p-1)\,(p-2)\,\ldots\,3.\,2.\,1 \qquad (4)$$

e lemos: *o número de permutações de* p *elementos é igual ao produto dos* p *primeiros números naturais*.

A fórmula (4) pode ser também escrita

$$P_p = p\,! \qquad (5)$$

São estas, (4) e (5), as primeiras fórmulas do número de permutações de p elementos.

7. Formação das permutações e cálculo direto do seu número. Sendo a idéia de permutações a de troca, não pode haver permutação de um elemento. Admitimos, entretanto, por extensão, que com 1 elemento *a*, podemos formar a permutação *a*, e teremos então:

$$P_1 = 1$$

Para formar as permutações de 2 elementos *a* e *b*, tomamos a permutação *a* de 1 elemento e colocamos o segundo elemento *b* em todos os lugares possíveis, isto é, depois e antes de *a*:

ab *ba*

e obteremos duas permutações.

Logo

$$P_2 = P_1 \cdot 2$$

Para formar as permutações de 3 elementos *a*, *b* e *c*, tomamos cada uma das permutações dos 2 elementos *a* e *b* e colocamos o terceiro elemento *c* em todos os lugares possíveis, isto é, depois, no meio e antes dos dois elementos:

abc	*acb*	*cab*
bac	*bca*	*cba*

Obteremos assim *tôdas* as permutações de 3 elementos, sem *omissão* nem *repetição*. Não haverá *omissão* porque cada uma destas permutações tem que se formar de outra de 2 elementos e de um terceiro elemento colocado em todos os lugares possíveis e a falta de uma permutação de 3 elementos acarretaria, também, a falta da permutação correspondente de 2 elementos, o que é contra a hipótese porque supuzemos formado o quadro completo das permutações de 2 elementos; não haverá *repetição* porque duas quaisquer das permutações de 3 elementos diferem ou pelo lugar que ocupa o terceiro elemento ou pela ordem dos outros 2.

Como cada permutação de 2 elementos dá 3 de 3 elementos, teremos:

$$P_3 = P_2 \cdot 3$$

De um modo geral, para formar as permutações de p elementos tomamos cada uma das permutações dos $p - 1$ elementos e colocamos o último elemento — o de ordem p — em todos os lugares possíveis: êstes lugares são em número p pois entre cada dois elementos das permutações de $p - 1$ elementos há $p - 2$ lugares, e, antes e depois de cada uma dessas permutações há mais 2 lugares, logo, serão ao todo $p - 2 + 2$ ou p lugares; logo

$$P_p = P_{p-1} \cdot p \qquad (6)$$

E' esta a terceira fórmula do número de permutações de p elementos.

Fazendo nesta fórmula $p = 2, 3, 4, \ldots, p$, teremos:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 \cdot 2 \\ P_3 &= P_2 \cdot 3 \\ P_4 &= P_3 \cdot 4 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ P_p &= P_{p-1} \cdot p \end{aligned}$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades e suprimindo em ambos os membros da igualdade resultante os fatores comuns aos dois membros, levando em conta que $P_1 = 1$, teremos:

$$P_p = 1.2.3\ldots p \qquad (4)$$

ou

$$P_p = p\,! \qquad (5)$$

Cabe aqui a mesma observação que fizemos no estudo dos arranjos sôbre o raciocínio por recorrência.

Exercícios: — De quantas maneiras diferentes podemos dispôr em linha as letras da palavra *régua?*

$$P_5 = 5\,! = 1.2.3.4.5 = 120$$

Convenções: — 1.ª Para $p = 1$ a fórmula (6) dá:

$$P_1 = P_0 \cdot 1$$

Como $P_1 = 1$, teremos:

$$1 = P_0 \cdot 1 \quad \text{ou} \quad P_0 = 1 \,.$$

Para admitir a fórmula (6) como geral, temos, pois que convencionar que $P_0 = 1$.

2.ª Da identidade

$$p\,! = (p - 1)!\; p$$

para $p = 1$, teremos

$$1\,! = 0\,! \cdot 1 \qquad \text{ou}$$

$$0\,! = 1 \,.$$

que é outra convenção, generalizando a identidade primitiva.

8. Inversões. De tôdas as permutações de p letras podemos escolher, arbitràriamente, uma qualquer delas como *permutação fundamental*. Se as permutações tiverem os elementos representados por letras diferentes, é comum tomarmos como fundamental a permutação em que as letras estão dispostas na ordem alfabética; se os elementos são representados por uma mesma letra com índices diferentes, tomamos como fundamental a permutação em que os índices estão dispostos segundo a sucessão dos números naturais. Assim, com 4 elementos, a permutação fundamental poderá ser

$$abcd \qquad \text{ou} \qquad a_1\, a_2\, a_3\, a_4$$

Dois elementos de uma permutação formam uma *inversão* quando estão colocados em ordem contrária á que apresentam na permutação fundamental. (*)

(*) Êste conceito é atribuído a G. Cramer (1704-1752) em 1750 (Genebra). O têrmo *inversão* é devido a J. D. Gergonne (1771-1859) em 1813-14. P. S. Laplace (1749-1827) usou (1772) o têrmo *variação*.

Tomando como fundamental a permutação *abcd*, diremos que na permutação *bdac*, *b* e *a* formam uma inversão, *d* e *a* outra e *d* e *c* outra ainda.

Uma permutação tem tantas inversões quantos são os grupos de 2 elementos satisfazendo a definição de inversão. Assim, a permutação *bdac* tem 3 inversões.

Quando uma permutação tem um número par de inversões é denominada *permutação de classe par* ou *de primeira classe;* quando tem um número ímpar de inversões é denominada de *classe ímpar* ou *de segunda classe*.

Exemplos: — A permutação *adbc* tem 2 inversões: é de classe par. A permutação $a_2\, a_1\, a_3\, a_4$ tem 1 inversão: é de classe ímpar.

A permutação fundamental, como a consideramos, não tem inversões. Dizemos que ela tem zero inversões: é de classe par.

De tôdas as permutações de p elementos a que apresenta maior número de inversões é a que tem os elementos em ordem inversa daquela em que se apresentam na permutação fundamental: ela é denominada *permutação inversa*. Se a permutação fundamental fôr $abc \ldots jkl$ ou $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{p-2}\, a_{p-1}\, a_p$, a permutação inversa será $lkj \ldots cba$ ou $a_p\, a_{p-1}\, a_{p-2} \ldots a_3\, a_2\, a_1$. Nesta última permutação de p elementos cada elemento forma uma inversão com cada um dos seguintes; logo, o número de inversões desta permutação é

$$(p - 1) + (p - 2) + \ldots + 1 = \frac{p\,(p - 1)}{2}$$

Teorema de Bézout (1764) — *Uma permutação muda de classe quando trocamos entre si dois elementos.*

I. Os elementos são consecutivos.

Consideremos a permutação

$$A\ m\ n\ B$$

em que A e B representam grupos de elementos e m e n são elementos simples.

Se considerarmos, por exemplo, 5 pontos *a, b, c, d* e *e* nesta ordem, de uma circunferência, obtemos as suas permutações circulares passando sucessivamente o primeiro elemento para último lugar:

abcde *bcdea* *cdeab* *deabc* *eabcd*

Procedendo desta forma observamos que, partindo-se de um grupo de 5 elementos, obteremos 5 permutações circulares.

NÚMEROS DAS PERMUTAÇÕES CIRCULARES. Como a cada grupo de p elementos correspondem p permutações circulares, se representarmos por P o número total de modos relativos distintos de dispor p pontos numa circunferência, como cada um dêles dá p permutações circulares e o número total das permutações de p elementos é $p\,!$, teremos

$$p \cdot P = n\,! \quad \therefore \quad P = \frac{n\,!}{n} = (n-1)\,! \qquad (7)$$

COMBINAÇÕES

10. Combinações *de* m *elementos tomados* p *a* p ($p \leq m$) *são os agrupamentos que podemos formar com êsses elementos de forma que cada agrupamento contenha* p *elementos e difira de todos os outros pela natureza, pelo menos, de um dos elementos.*

EXEMPLO: — Com os elementos *a, b, c* e *d*, tomados 3 a 3, podemos formar as combinações

abc *abd* *acd* *bcd*

Observaremos que enquanto os arranjos diferem uns dos outros pela ordem ou pela natureza dos elementos, as combinações têm que diferir sempre pela *natureza*, pelo menos, de um elemento. Assim, *abc* e *acb* são arranjos diferentes e são a mesma combinação.

Quando os elementos das combinações representam fatores de multiplicações cujos produtos são indicados pelas combinações, estas tomam o nome de *produtos distintos*.

O número de combinações de m elementos tomados p a p, ou de classe p, é representado por um dos símbolos

$$C_m^p \qquad C_{m,\,p}$$

Em vez da expressão classe p usam-se também *módulo p* e *ordem p*.

11. Cálculo do número de combinações. Se considerarmos formadas as combinações dos m elementos $a, b, c, \ldots, j, k, l$ tomados p a p,

abc	*abd*	*abe*	. . .	*abl*
	acd	*ace*	. . .	*acl*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
				jkl (*)

e em cada uma delas permutarmos seus p elementos,

abc	*acb*	*bac*	. . .	*cba*
abd	*adb*	*bad*	. . .	*dba*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
jkl	*jlk*	*kjl*	. . .	*lkj*

Obteremos os arranjos dos m elementos p a p, porque em cada linha há diferença dos grupos pela ordem dos elementos, e de linha para linha há diferença nos grupos pelo menos de um elemento. Como cada uma das combinações dos m elementos p a p dá tantos arranjos dos m elementos p a p quantas permutações pudermos fazer com os p elementos de cada uma, teremos:

$$C_m^p \times P_p = A_m^p$$

ou

$$C_m^p = \frac{A_m^p}{P_p} \qquad (8)$$

(*) Indicamos neste quadro as combinações dos m elementos 3 a 3 para melhor fixar idéias.

Esta é a primeira fórmula do número de combinações de m elementos p a p.

Substituindo A_m^p e P_p por seus valores, teremos outras expressões de C_m^p:

$$C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3.\ \ldots.\ p} \qquad (9)$$

Esta segunda fórmula diz: *o número de combinações de* m *elementos* p *a* p *é igual ao produto dos* p *números inteiros consecutivos decrescentes dos quais o maior é* m, *dividido pelo produto dos* p *primeiros números naturais*.

Como o resultado obtido por esta fórmula tem que ser um número inteiro, podemos concluir o teorema da aritmética: *o produto de* p *números inteiros e consecutivos é sempre divisível pelo produto dos* p *primeiros números naturais*.

EXERCÍCIO: — Quantas guardas diferentes de 3 homens podem ser feitas com 10 homens?

$$C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120.$$

Utilizando as fórmulas (3) e (5), em (8)

$$C_m^p = \frac{\dfrac{m\,!}{(m-p)\,!}}{p\,!}$$

ou

$$C_m^p = \frac{m\,!}{(m-p)\,!\,p\,!} \qquad (10)$$

Esta é a terceira fórmula do número de combinações de m elementos p a p.

EXERCÍCIO: — Calcular o número de combinações de 12 elementos 4 a 4.

$$C_{12}^4 = \frac{12\,!}{(12-4)\,!\,4\,!} =$$

$$= \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times1\times2\times3\times4}\ 495$$

Comparando êste cálculo com o que faríamos pela fórmula (9),

$$C_{12} = \frac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4} = 495$$

concluimos que é preferível na prática o uso desta fórmula. O interêsse da fórmula (10) é mais teórico, apresentando além do seu aspecto mais elegante uma condensação útil às deduções teóricas.

Os números C_m, particularmente o seu valor $\dfrac{m\,!}{(m-p)\,!\,p\,!}$,

são também representados por $\left(\dfrac{m}{p}\right)$, sugestão de Euler (1781), e por $\binom{m}{p}$ segundo A. von Ettinghausen (1827), lendo-se em ambos os casos *m sôbre p*. O número m é denominado *numerador*.

Êstes números $\binom{m}{p}$, para m inteiro positivo não inferior a p, são denominados *números combinatórios*, *números binomiais* ou *coeficientes binomiais*, estas duas últimas denominações provenientes de êles aparecerem no desenvolvimento da potência m do *binômio* x + a.

III — Façamos na fórmula (13) a substituição de m por $m-1$, $m-2$, $m-3$, . . ., $p-1$:

$$C^p_m = C^p_{m-1} + C^{p-1}_{m-1}$$

$$C^p_{m-1} = C^p_{m-2} + C^{p-1}_{m-2}$$

$$C^p_{m-2} = C^p_{m-3} + C^{p-1}_{m-3}$$

. . . .

$$C^p_p = C^p_{p-1} + C^{p-1}_{p-1}$$

Somando ordenadamente estas igualdades e suprimindo na igualdade resultante as parcelas comuns aos dois membros, lembrando que $C^p_{p-1} = 0$, teremos

$$C^p_m = C^{p-1}_{m-1} + C^{p-1}_{m-2} + \ldots + C^{p-1}_{p-1} \qquad (14)$$

Podemos também obter esta fórmula fazendo em (13) $m = m-1$, $m-2$, . . ., p, somando ordenadamente as igualdades resultantes e substituindo C^p_p por C^{p-1}_{p-1} que são, ambos, iguais a 1.

ANÁLISE COMBINATÓRIA COM REPETIÇÃO

ARRANJOS COM REPETIÇÃO

14. Arranjos com repetição ou arranjos completos *de* m *elementos tomados* p *a* p (p $\gtreqless$ m) *são os agrupamentos que podemos formar com êsses elementos de forma que cada agrupamento contenha* p *elementos, distintos ou não, e difira de todos os outros pela ordem ou pela natureza dos elementos que nêle entram.*

EXEMPLO: — Com os elementos a e b tomados 3 a 3 podemos formar os arranjos:

aaa *aab* *aba* *abb* *baa* *bab* *bba* *bbb*

Observaremos que enquanto nos arranjos simples temos sempre $p \leq m$, nos arranjos completos podemos ter $p \gtreqless m$

O número de arranjos com repetição de m elementos tomados p a p é representado pelos símbolos

$$(AR)^p_m \qquad \text{ou} \qquad (AR)_{m,\,p}\,.$$

15. Formação dos arranjos e cálculo do seu número. Consideremos os m elementos

$$a \quad b \quad c \quad \ldots \quad j \quad k \quad l$$

E' evidente que

$$(AR)^1_m = m$$

pois cada um dos elementos constitui um arranjo.

Para formar os arranjos completos dos m elementos 2 a 2, tomamos cada um dos arranjos completos dos m elementos 1 a 1 e à sua direita escrevemos cada um dos m elementos:

aa	*ab*	*ac*	...	*al*
ba	*bb*	*bc*	...	*bl*
.....	.....	.....	.....	.....
la	*lb*	*lc*	...	*ll*

Assim se fazendo não haverá *omissão* de nenhum dos arranjos porque isto obrigaria a falta de um dos arranjos completos dos m elementos 1 a 1; não haverá *repetição* porque os arranjos de cada linha diferem pelo segundo elemento e os de duas linhas diferentes diferem pelo primeiro elemento.

Como cada um dos arranjos dos m elementos 1 a 1 dá m arranjos de m elementos 2 a 2, teremos:

$$(AR)_m^2 = (AR)_m^1 \cdot m$$

Para formar os arranjos completos dos m elementos 3 a 3, tomamos cada um dos arranjos completos dos m elementos 2 a 2 e à sua direita colocamos cada um dos m elementos:

aaa	*aab*	*aac*	...	*aal*
aba	*abb*	*abc*	...	*abl*
.....	.....	.....	.....	.....
baa	*bab*	*bac*	...	*bal*
.....	.....	.....	.....	.....
lla	*llb*	*llc*	...	*lll*

Raciocinando como acima, teremos:

$$(AR)_m^3 = (AR)_m^2 \cdot m$$

De um modo geral — ver observação da página 12 — para formar os arranjos completos dos m elementos p a p, tomamos cada um dos arranjos completos dos m elementos $p-1$ a $p-1$ e à sua direita colocamos cada um dos m elementos. Obteremos assim *todos* os arranjos completos dos m elementos p a p, isto é, não haverá *omissão* de um dos arranjos porque isto obrigaria a falta de um dos arranjos dos m elementos $p-1$ a $p-1$ o

que não é possível porque supusemos formado o quadro dos arranjos completos dos m elementos $p-1$ a $p-1$; não haverá *repetição* porque dois arranjos provenientes de um mesmo arranjo dos m elementos $p-1$ a $p-1$ diferem pelo último elemento, e os arranjos provenientes de dois arranjos distintos dos m elementos $p-1$ a $p-1$ diferem por êstes dois arranjos. Como cada um dos arranjos completos dos m elementos $p-1$ a $p-1$ dá m arranjos dos m elementos p a p, teremos:

$$(AR)_m^p = (AR)_m^{p-1} \cdot m \qquad (15)$$

Fazendo nesta fórmula $p = 2, 3, 4, \ldots, p$, teremos:

$$(AR)_m^2 = (AR)_m^1 \cdot m$$

$$(AR)_m^3 = (AR)_m^2 \cdot m$$

$$(AR)_m^4 = (AR)_m^3 \cdot m$$

....

$$(AR)_m^p = (AR)_m^{p-1} \cdot m$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades e suprimindo na igualdade resultante os fatores comuns aos dois membros, lembrando que $(AR)_m^1 = m$, teremos:

$$(AR)_m^p = m^p \qquad (16)$$

Exercício: — Quantos arranjos com repetição podemos fazer com 25 letras distintas 3 a 3 ?

$$(AR)_{25}^3 = 25^3 = 15\ 625$$

Convenção: — Para $p = 1$, a fórmula (15) dá

$$(AR)_m^1 = (AR)_m^0 \cdot m \quad \therefore \quad m = (AR)_m^0 \cdot m \quad \therefore$$

$$(AR)_m^0 = 1.$$

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

16 — No caso particular de $p = m$, os arranjos com repetição de m elementos p a p denominam-se *permutações com repetição*, e teremos:

$$(PR)_p = p^p \qquad (17)$$

EXEMPLO: — Com os elementos a, b e c, tomados 3 a 3, podemos formar $3^3 = 27$ permutações com repetição:

aaa	*aab*	*aac*
aba	*abb*	*abc*
aca	*acb*	*acc*
baa	*bab*	*bac*
bba	*bbb*	*bbc*
bca	*bcb*	*bcc*
caa	*cab*	*cac*
cba	*cbb*	*cbc*
cca	*ccb*	*ccc*

17 — **Problema:** — Quantas permutações podemos fazer com *m letras*

$$a \quad b \quad c \quad \ldots \quad j \quad k \quad l$$

das quais α são iguais a a, β iguais a b, ..., λ iguais a l?

Temos $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m$.

Consideremos m pontos em linha reta e nêles coloquemos de todos os modos possíveis as α letras iguais a a. O número de disposições que obteremos será o número de combinações simples dos m pontos α a α, isto é, C^α_m.

Colocadas as α letras iguais a a, sobrarão, em cada disposição, $m - \alpha$ pontos nos quais poderemos escrever as β letras

iguais a b de tantos modos diferentes quantas forem as combinações dos $m - \alpha$ pontos β a β, isto é, $C^\beta_{m-\alpha}$. O número total de disposições contendo as α letras iguais a a e as β letras iguais a b, será, pois, $C^\alpha_m \cdot C^\beta_{m-\alpha}$

Colocadas as α letras iguais a a e as β letras iguais a b, sobrarão em cada disposição $m - \alpha - \beta$ pontos nos quais poderemos colocar as γ letras iguais a c de tantos modos diferentes quantas forem as combinações dos $m - \alpha - \beta$ pontos γ a γ; logo, o número de disposições distintas contendo as α letras iguais a a, as β letras iguais a b e as γ letras iguais a c, será

$$C^\alpha_m \cdot C^\beta_{m-\alpha} \cdot C^\gamma_{m-\alpha-\beta}$$

Prosseguindo anàlogamente, chegaremos a ter que colocar as λ letras iguais a l, e então teremos $m - \alpha - \beta - \ldots - \chi = \lambda$ pontos para colocar as λ letras iguais a l, isto é, só poderemos colocar as letras l em cada uma das disposições anteriores de uma única maneira, visto só terem sobrado λ pontos; cada uma das disposições anteriores dará um número de novas disposições contendo as λ letras iguais a l igual a C^λ_λ que é igual a 1.

Teremos, então, que o número total de permutações será

$$P^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}_m = C^\alpha_m \cdot C^\beta_{m-\alpha} \cdot C^\gamma_{m-\alpha-\beta} \cdot \ldots \cdot C^\lambda_\lambda$$

Substituindo os símbolos dos números de combinações por seus valores (12), teremos:

$$P^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}_m = \frac{m!}{(m-\alpha)!\,\alpha!} \cdot \frac{(m-\alpha)!}{(m-\alpha-\beta)!\,\beta!} \cdot \frac{(m-\alpha-\beta)!}{(m-\alpha-\beta-\gamma)!\,\gamma!} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda!}{0!\,\lambda!}$$

ou, simplificando:

$$P^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}_m = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!} \qquad (18)$$

sendo $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m$.

EXERCÍCIO: — Quantas permutações podemos fazer com as letras da palavra *matemática?*

$$P = \frac{10\,!}{2!\;3!\;2!\;1!\;1!\;1!} = 151\;200.$$

OBSERVAÇÃO: — Como P tem que ser inteiro, podemos concluir o *teorema*: $m\,!$ é sempre divisível por $\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!\,\dots\,\lambda\,!$ sempre que $\alpha+\beta+\gamma+\;\dots\;+\lambda \leq m$.

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

18. Combinações com repetição ou combinações completas *de* m *elementos tomados* p *a* p $(\,p \gtreqless m\,)$ *são os agrupamentos que podemos formar com êsses* m *elementos de forma que cada grupo contenha* p *elementos, repetidos ou não, e difira de todos os outros menos por um dos elementos.*

Assim, com os elementos a e b, tomados 3 a 3, podemos formar as combinações

$$aaa \qquad aab \qquad abb \qquad bbb$$

que convencionalmente escrevemos

$$a^3 \qquad a^2\,b \qquad ab^2 \qquad b^3$$

Observaremos que enquanto nas combinações simples temos sempre $p \leq m$, nas combinações completas podemos ter $p \gtreqless m$

O número de combinações completas de m elementos p a p é representado pelos símbolos

$$(CR)^p_m \quad \text{ou} \quad (CR)_{m,\,p}\,.$$

Rey Pastor (*), representa por $C'_{m,p}$.

19. Formação das combinações. Para formar as combinações completas de m elementos p a p, alinhados em ordem alfabética ou numérica, tomamos cada uma das combinações

(*) Obra citada.

completas dos m elementos $p-1$ a $p-1$ e à sua direita escrevemos o último elemento que êle contém e cada um dos seguintes. Assim obteremos as combinações completas dos m elementos p a p, sem omissão nem repetição. A justificativa é análoga à das combinações simples.

Assim, as combinações completas dos m elementos

$$a \qquad b \qquad c \qquad \dots \qquad j \qquad k \qquad l$$

tomados 1 a 1 são êsses próprios elementos.

As combinações completas dêsses mesmos m elementos tomados 2 a 2, serão:

aa	*ab*	*ac*	...	*al*
	bb	*bc*	...	*bl*
		cc	...	*cl*
			...	...
				ll

As combinações completas dos m elementos 3 a 3, serão:

aaa	*aab*	*aac*	...	*aal*	
	abb	*abc*	...	*abl*	
		acc	...	*acl*	
		...	...	...	
	bbb	*bbc*	...	*bbl*	(q)
		bcc	...	*bcl*	
		...	...	...	
				lll	

e assim por diante.

20. Cálculo do número de combinações completas. Para calcular o número de combinações completas de m elementos p a p, suponhamos formado o quadro (q) (*) das combinações completas dos m elementos p a p e contemos de dois modos

*) Êsse quadro contém as combinações completas dos m elementos 3 a 3. No raciocínio que vamos fazer a seguir suporemos, por motivo didático e sem inconveniente algum, que êle contenha as combinações completas dos m elementos p a p.

POTENCIAÇÃO DE POLINÔMIOS

29. Fórmula de Leibnitz (1676). 1.ª DEDUÇÃO: — Calculemos a expressão geral do desenvolvimento de

$$(a + b + c + \dots + l)^m$$

sendo m inteiro e positivo.

Esta potência é o produto de m fatores iguais a

$(a + b + c + \dots + l)$, isto é,

$$(a + b + c + \dots l)^m =$$

$$= (a + b + c + \dots + l) \,.$$

$$. \, (a + b + c + \dots + l) \dots (a + b + c + \dots + l)$$

Para obter êste produto teremos que fazer a soma de todos os produtos que podemos formar de m fatores tomando um e sòmente um têrmo de cada polinômio. Cada um dêsses produtos será da forma

$$a^\alpha \; b^\beta \; c^\gamma \; \dots \; l^\lambda$$

sendo $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m$, e aparecerá no produto dos polinômios tantas vêzes quantas forem as permutações com repetição de m letras das quais α são iguais a a, β iguais a b, ..., λ iguais a l, isto é, um número de vêzes igual a

$$\frac{m\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\dots\,\lambda\,!}$$

O têrmo geral da potência m do polinômio será, pois,

$$\frac{m!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\ldots\,\lambda\,!}\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,\ldots\,l^{\lambda}$$

e a fórmula da potência m do polinômio será

$$(a+b+c+\ldots+l)^m =$$

$$= \Sigma\,\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\ldots\,\lambda\,!}\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,\ldots\,l^{\lambda}$$

sendo $\alpha+\beta+\ldots+\lambda = m$.

2.ª Dedução: — Pela fórmula do binômio de Newton, temos:

$$(a+b+c+\ldots+l)^m = (a+x)^m = \Sigma C^{\alpha}_{m}\,a^{\alpha}\,x^{m-\alpha}$$

$$x^{m-\alpha} = (b+c+\ldots+l)^{m-\alpha} = (b+y)^{m-\alpha} =$$

$$= \Sigma\,C^{\beta}_{m-\alpha}\;b^{\beta}\,y^{m-\alpha-\beta}$$

$$y^{m-\alpha-\beta} = (c+d+\ldots+l)^{m-\alpha-\beta} =$$

$$= (c+z)^{m-\alpha-\beta} = \Sigma\,C^{\gamma}_{m-\alpha-\beta}\,c^{\alpha}\,z^{m-\alpha-\beta-\gamma}$$

. . . .

$$t^{m-\alpha-\beta-\ldots-\iota} = (k+l)^{m-\alpha-\ldots-\iota} = \Sigma\,C^{\chi}_{m-\alpha-\beta-\ldots-\iota}\;k^{\chi}\,l^{\lambda}$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades e simplificando na igualdade resultante os fatores comuns aos dois membros, teremos:

$$(a+b+c+\ldots+l)^m =$$

$$= \Sigma\,C^{\alpha}_{m}\,a^{\alpha}\,.\,\Sigma\,C^{\beta}_{m-\alpha}\;b^{\beta}\;\;\Sigma\,C^{\gamma}_{m-\alpha-\beta}\,c^{\gamma}\,\ldots$$

$$\ldots\,\Sigma C^{\chi}_{m-\alpha-\beta-\ldots-\iota}\;\;k^{\chi}\,l^{\lambda}$$

Lembrando que o produto de duas somas é igual à soma dos produtos de cada têrmo de uma por cada têrmo de outra, isto é, $\Sigma\,a\,.\,\Sigma\,b = \Sigma\,ab$, temos:

$$(a+b+c+\ldots+l)^m =$$

$$= \Sigma\,C^{\alpha}_{m}\;.\;C^{\beta}_{m-\alpha}\;.\;C^{\gamma}_{m-\alpha-\beta}\;\ldots\;C^{\chi}_{m-\alpha-\beta\ldots\iota}\,a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\alpha}\,\ldots\,k^{\chi}\,l^{\lambda} =$$

$$= \Sigma\,\frac{m!}{(m-\alpha)\,!\alpha!}\;.\;\frac{(m-\alpha)\,!}{(m-\alpha-\beta)\,!\beta!}\;.\;\frac{(m-\alpha-\beta)\,!}{(m\text{-}\alpha\text{-}\beta\text{-}\gamma)\,!\gamma}\;\ldots$$

$$\frac{(m\text{-}\alpha\text{-}\beta\text{-}\ldots\text{-}\iota)\,!-}{(m\text{-}\alpha\text{-}\beta\text{-}\ldots\iota\text{-}\chi)\,!\chi}\;a^{\alpha}\;b^{\beta}\;c^{\alpha}\;\ldots\;k^{\chi}\,l^{\lambda} =$$

$$= \Sigma\,\frac{m!}{\alpha!\beta!\alpha!\ldots\chi!\lambda!}\;a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}\,\ldots\,k^{\chi}\,l^{\lambda}$$

Esta é a fórmula devida a Leibnitz que a comunicou a João Bernouilli em 1695.

Observações: I. A potência de um polinômio sendo um polinômio homogêneo e completo do grau m em relação aos seus têrmos, terá um número de têrmos igual a $(CR)_m{}^p$ (ver o exercício 58 da *análise combinatória*).

II. Os números $\dfrac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$, por analogia com os coeficientes binomiais são denominados *coeficientes polimoniais*.

Para aplicar esta fórmula temos que fazer tôdas as hipóteses possíveis para valores inteiros e positivos de α, β, γ, $\ldots$, λ, tendo-se em qualquer caso $\alpha+\beta+\ldots+\lambda = m$

30. Aplicações: — I. QUADRADO DE UM POLINÔMIO:

$$(a + b + c + \ldots + l)^2$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0 \end{cases} \quad \frac{2!}{2!\,0!\,0!\ldots0!} a^2 b^0 c^0 \ldots l^0 = a^2$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = \delta = \ldots \lambda = 0 \end{cases} \quad \frac{2!}{1!\,1!\,0!\,0!\ldots0!} a\; b\; c^0 \ldots l^0 = 2ab$$

$$(a + b + c + \ldots + l)^2 = \Sigma\, a^2 + \Sigma 2\, ab = \Sigma\, a^2 + 2\,\Sigma\, ab$$

REGRA: — O quadrado de um polinômio é igual à soma dos quadrados dos seus têrmos mais a soma dos duplos produtos distintos dêsses têrmos 2 a 2.

EXEMPLO: — $(1 + 2x - 3x^2)^2 = 1 + 4\,x^2 +$

$$+ 9x^4 + 2.1.\;2x + 2.1\;(-3x^2) + 2.2x\;(-3x^2) =$$

$$= 1 + 4x^2 + 9x^4 + 4x - 6x^2 - 12x^3 =$$

$$= 1 + 4x - 2x^2 - 12x^3 + 9x^4$$

II. CUBO DE UM POLINÔMIO: $(a + b + c + \ldots + l)^3$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0 \end{cases} \quad \frac{3!}{3!\,0!\,0!\ldots0!} a^3\,.\,b^0 c^0 \ldots l^0 = a^3$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = \delta = \ldots = \lambda = 0 \end{cases} \quad \frac{3!}{2!\,1!\,0!\,0!\ldots0!} a^2\, b\, c^0 \ldots l^0 = 3a^2\, b$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \\ \delta = \varepsilon = \ldots = \lambda = 0 \end{cases} \quad \frac{3!}{1!\,1!\,1!\,0!\,0!\ldots0!} a\; b\; c\; d^0 \ldots l^0 = 6\; abc$$

$$(a + b + c + \ldots + l)^3 = \Sigma\, a^3 + \Sigma\, 3a^2\, b + \Sigma\, 6abc =$$

$$+ \Sigma\, a^3 + 3\,\Sigma\, a^2\, b + 6\,\Sigma\, abc$$

REGRA: — O cubo de um polinômio é igual à soma dos cubos dos seus têrmos, mais o triplo da soma dos produtos dos quadrados de cada têrmo por cada um dos outros, mais 6 vêzes a soma dos produtos distintos dos têrmos tomados 3 a 3.

EXEMPLO: — $(1 + x - 2x^2)^3 =$

$$1 + x^3 - 8x^6 + 3.\;1^2\;.\;x + 3.\;1^2\;(-2x^2) +$$

$$+ 3.\;x^2\;.\;1 + 3\;x^2\;(-2x^2) + 3\;(-2x^2)^2\;.\;1 +$$

$$+ 3\;(-2x^2)^2\;x + 6.\;1.\;x\;(-2x^2) =$$

$$= 1 + x^3 - 8\;x^6 + 3x - 6x^2 +$$

$$+ 3x^2 - 6x^4 - 12x^5 - 12\;x^3 =$$

$$= 1 + 3\;x - 3\;x^2 - 11\;x^3 + 6\;x^4 - 12x^5 - 8\;x^6$$

III. QUARTA POTÊNCIA DE UM POLINÔMIO.

Procedendo como nos casos anteriores, teremos:

$$(a + b + c + \ldots + l)^4 = \Sigma\, a^4 +$$

$$+ 4\,\Sigma\, a^3\, b + 6\,\Sigma\, a^2\, b^2 +$$

$$+ 12\,\Sigma\, a^2\, bc + 24\,\Sigma\, abcd$$

2. Calcular o têrmo em x^4 de $(1 - 2x + x^2)^5$.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 1 \quad \therefore \; \alpha_1 = \alpha_3 + 1 \\ \alpha_2 = 4 - 2\alpha_3 \end{cases}$$

Como os três números α_1, α_2 e α_3 têm que ser inteiros e positivos, pela segunda desigualdade devemos ter

$$\alpha_3 \leq 2 \quad \therefore \quad \alpha_3 = 0, 1, 2$$

Para	$\alpha_3 = 0$	temos	$\alpha_1 = 1$	e	$\alpha_2 = 4$
	$\alpha_3 = 1$	temos	$\alpha_1 = 2$	e	$\alpha_2 = 2$
	$\alpha_3 = 2$	temos	$\alpha_1 = 3$	e	$\alpha_2 = 0$

Levando êstes valores em (I) teremos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 4 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \frac{5!}{1!\,4!\,0!} \cdot 1^1\,(-2x)^4\,(x^2)^0 = 80\,x^4$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 1 \end{array}\right\} \frac{5!}{2!\,2!\,1!}\, 1^2\,(-2x)^2\,x^2 = 120\,x^4$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 2 \end{array}\right\} \frac{5!}{3!\,0!\,2!}\, 1^3\,(-2x)^0\,(x^2)^2 = 10\,x^4$$

O têrmo em x^4 é $80\,x^4 + 120\,x^4 + 10\,x^4 = 210\,x^4$. O coeficiente de x^4 é 210.

Bibliografia.

A. Sainte-Laguë — Avec des Nombres et des Lignes — 3.ª édition — Librairie Vuibert — Paris — 1946.

Aubert (P.) et Papelier (G.) — *Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie*. Tome II. 6e édition. Paris. Librairie Vuibert. 1924.

Bourdon (M.) — *Eléments d'Algèbre*. Gauthiers — Villars. Imprimeur — Librairie. Paris. 1907.

Boyer (Jacques) — *Histoire des Mathématiques*. Gauthiers — Villars. Imprimeur — Librairie. Paris. 1900.

Caraça (Bento de Jesus) — *Lições de Álgebra e Análise*. 1.º volume. Lisboa. 1935.

Carias de Oliveira (Benjamim) — *Exercícios resolvidos de Matemática*. Jornal do Comércio — Rodrigues & Cia. Rio de Janeiro. 1941.

Comberouse (Charles De) — *Algèbre Elémentaire. Gauthiers Villars*. Imprimeurs — Librairie. Paris. 1911.

Costa (H.) — Roxo (E.) — (Castro (O.) — *Exercícios de Álgebra*. 2.ª edição. Livraria Rrancisco Alves. 1928.

Cunha (Haroldo Lisbôa da) — *Pontos de Álgebra Complementar*. Rio de Janeiro. 1939.

Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi por *L. Berzolari, G. Vivanti* e *D. Gigli*. Editore Ulrico Hœpli. Milano. 4 vols., 1943-1944.

F. G. M. — *Exercices de Géométrie*. Librairie Générale. Paris. 7e édition.

F. I. C. — *Elementos de Álgebra*. Livraria Garnier. Rio de Janeiro — Paris. 1926.

Fourrey (E.) — *Récréations Arithmétiques* — 5e édition. Paris. Librairie Viubert.

F. T. D. — *Álgebra Elementar*. Curso Superior. Parte do mestre. Livraria Francisco Alves. Rio de Janeiro. 1941.

Gaudiot (P.) — *Notions D'Algèbre Supérieure*. Cinquième édition. Éditions Eyrolles. 1947. Paris.

Lacroix (S. — F.) — *Eléments d'Algèbre*. 22e éditions. Gauthiers — Vilars. Imprimeur — Librairie. Paris. 1868.

Matemática — 2.º Ciclo — 2.ª Série — *Euclides Roxo, Haroldo Cunha, Roberto Peixoto, Cesar Dacorso Netto*. 3.ª edição. Livraria Francisco Alves. Rio de Janeiro. 1946.

MAURICIO KRAITCHIK — *Matemáticas Recreativas* — El Ateneo — Buenos Aires — 1946.

NIEWENGLOWSKI (B.) — *Cours d'Algèbre* — 7e édition. Librairie Armand Colin. Paris. 1914.

PINCHERLE (SALVATORE). *Algebra Complementare*. Parte Prima. *Analisi Algebrica*. Ulrico Hœpli — Editore. Quarta edizione. 1923.

QUESTIONI RIGUARDANTI LE MATEMATICHE ELEMENTARI — *Federigo Enriques*. Nicola Zannichelli — editore. vols. Bologna. 1925-1926.

REY PASTOR (J.) — *Elementos de Analisis Algebraico*. 5.ª edition. Madrid. 1939.

SALINAS Y ANGULO (*D. Ignacio*) y BENITEZ y PARODÍ (D. MANUEL) — *Álgebra*. 8.ª edicion. Imprenta Clasica Española. Madrid. 1921.

SERRÃO (ALBERTO NUNES) — *Análise Algébrica*. 2.ª edição. Livraria do Globo. Pôrto Alegre. 1945.

SEVERI (FRANCESCO) — *Lezioni di Analisi*. Vol. primo. 2.ª edizione. Nicola Zannichelli. Bologna — 1938.

THIRÉ (CECIL) — *Exercícios de Álgebra*. 1.ª edição. Livraria Francisco Alves. Rio de Janeiro. 1927.

TANNERY (JULES) — *Léçons d'Algèbre e d'Analyse*. Tome premier. Gauthiers Villars, Imprimeur — Librairie. Paris. 1906.

ÍNDICE

N.º 4.037 — Oficinas Gráficas da Livraria Francisco Alves

Extrato do Catálogo da Livraria Francisco Alves

ROBERTO PEIXOTO

Cálculo Vetorial
Geometria Analítica de 1 e 2 dimensões (com Problemas).
Geometria Analítica de 3 dimensões
Problemas de Geometria Analítica de 3 dimensões

R. PEIXOTO — E. ROXO — H. L. CUNHA — C. DACORSO

Matemática — 2.º Ciclo — Primeira Série
" — " " — Segunda "
" — " " — Terceira "

ROBERTO PEIXOTO — NICANOR LEMGRUBER

Matemática — Curso Ginasial — Primeira Série
" — " " — Segunda "
" — " " — Terceira "
" — " " — Quarta "

G. N. DE MELO e CUNHA

Desenho Geométrico e Elementar

CESAR CANTANHEDE

Curso de Organização do Trabalho

MATILDE MATTARAZO GARGIULO

Pagine Italiane

RENATO KEHL

Guia Sinótico de Filosofia
Atráves da Filosofia

OLAVO BILAC e GUIMARÃES PASSOS

Tratado de Versificação
Dicionário de Rimas

PAULO CESAR MACHADO SILVA

Stages in the evolution of English

Remetemos nosso catálogo gratis, a quem o pedir