PROF. W. A. MAURER
DA
UNIVERSIDADE MACKENZIE

LIÇÕES DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Oitava Edição

Livraria Nobel S. A.

PROF. W. A. MAURER

da

UNIVERSIDADE MACKENZIE

LIÇÕES

de

GEOMETRIA ANALÍTICA

OITAVA EDIÇÃO

1965

Livraria Nobel S. A.
Rua da Consolação, 49
SÃO PAULO

L I Ç Ã O 1

O PONTO DA RETA

1. GEOMETRIA ANALÍTICA — DEFINIÇÃO. A Geometria Analítica tem por objeto o estudo das propriedades das figuras geométricas (linhas e superfícies) com auxílio da análise algébrica. Estas figuras podem ser consideradas como conjuntos de pontos.

Para traduzir em forma algébrica as suas propriedades devemos, portanto, começar por estabelecer uma associação conveniente entre pontos e números.

2. COORDENADAS NA RETA. Já vimos na Álgebra como esta associação pode ser introduzida quando se faz corresponder aos pontos de uma reta o conjunto dos números positivos e negativos a partir de uma origem arbitrária O. (fig. 1).

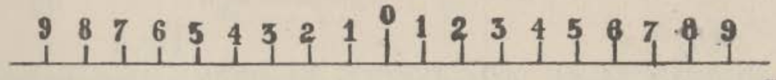

Fig. 1

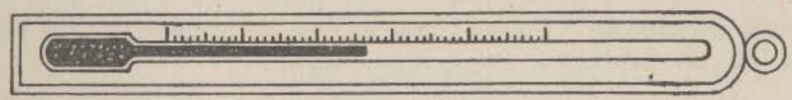

Fig. 2

Uma vez fixada esta origem, uma unidade de medida e um sentido positivo, a um ponto da reta, corresponde um número real e um único, e, inversamente, cada número real tem como imagem, um ponto e um só. À origem fazemos corresponder o número 0.

Um exemplo familiar de uma tal correspondência encontramos na escala dos termômetros comuns (de mercúrio). A uma posiçao determinada da coluna de mercúrio no tubo capilar do aparêlho fazemos corresponder o ponto 0 (origem) (fig. 2).

Esta posição corresponde a uma temperatura fixa (ponto de fusão do gêlo). Às temperaturas superiores, isto é, as posições que ocupam a extremidade do filete de mercúrio acima (ou à direita na fig. 2) da origem, fazemos corresponder números positivos. Às posições inferiores (ou à esquerda) atribuímos números negativos.

A unidade de medida é, neste caso, o grau centígrado e se representa geomètricamente pelo comprimento de que cresce a coluna de mercúrio quando a temperatura aumenta de 1/100 do aumento sofrido quando se passa da fusão do gêlo à ebulição da água.

Dá-se o nome de coordenada ou mais precisamente de abscissa de um ponto da reta em relação a uma origem dada ao número que, numa unidade prefixada, mede a sua distância a essa origem. Assim, na fig. 3, se OA = + 5, diremos que o ponto A tem por abscissa o número + 5. A abscissa do ponto B na mesma figura é OB = - 3.

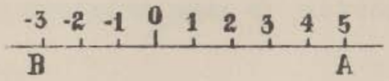

Fig. 3

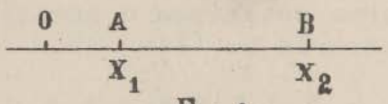

Fig. 4

3. DISTÂNCIA DE DOIS PONTOS NA RETA. Genèricamente representaremos a abscissa de um ponto da reta por x, e abscissas supostas conhecidas serão representadas por x afetado de um índice: x_1, x_2, x_3...

Sejam (fig. 4) A e B dois pontos da reta, de abscissas x_1 e x_2 respectivamente. A distância AB será dada pela diferença entre as abscissas x_2 e x_1:

$$AB = x_2 - x_1$$

onde A (x_1) é a origem e B(x_3) é a extremidade do segmento AB.
Os segmentos AB e BA têm sinais contrários:

$$BA = x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1) = -AB$$

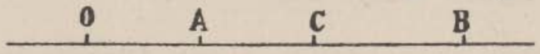

Fig. 5

4. RAZÃO DE SECÇÃO DE UM SEGMENTO. Sejam dados os pontos A e B de abscissas x_1 e x_2 respectivamente (fig. 5) e seja C um ponto interno ao segmento AB que o divide numa razão dada r:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r \qquad (1)$$

Dizemos neste caso que C divide $\overline{AB}$ (internamente) na razão r, ou ainda, que r exprime a razão simples de três pontos A, B e C. Conhecidas as abscissas de A e B (x_1 e x_2) trata-se de determinar a abscissa x do ponto C (fig. 5). Exprimindo os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ mediante as abscissas de suas extremidades, temos:

$$\overline{AC} = x - x_1 \quad \text{e} \quad \overline{CB} = x_2 - x$$

e substituindo em (1), resulta:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r \qquad (2)$$

relação da qual tiramos x. Temos sucessivamente:
(multiplicando os 2 membros de (2) por $(x_2 - x)$

$$x - x_1 = r\,(x_2 - x)$$

$x - x = rx_2 - rx$ (efetuando a multiplicação por r)
ou
$x + rx = x_1 + rx_2$ (isolando no 1º membro da incognita x)
ou ainda:
$x\,(1 + r) = x_1 + rx_2$ (pondo x em evidência no 1º membro)

Donde $$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad (3)$$

Em particular, para r = 1, temos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (3a)$$

que nos dá a abscissa do ponto médio do segmento AB.

Exemplo. Seja achar a abscissa do ponto que divide na razão 2/3 o segmento AB cujos extremos têm por abscissas — 3 e 7 respectivamente.

Solução. Fazendo $x_1 = -3$, $x_2 = 7$ e $r = 2/3$, e substituindo em (3), resulta:

$$x = \frac{-3 + (2/3).7}{1 + 2/3} = \frac{-9 + 14}{3 + 2} = \frac{5}{5} = 1$$

que é abscissa procurada.

Generalizando o problema anterior, diremos que um ponto C' do prolongamento de AB (fig. 5a), divide êste segmento externamente na razão r quando

$\frac{AC'}{C'B}$ vale r

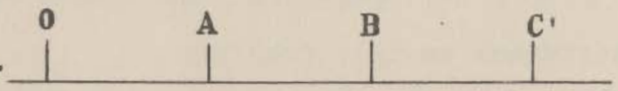

Fig.5a

Mas, neste caso, AC e CB têm sentidos contrários e, por conseguinte, a sua razão toma sinal negativo (quociente de positivo por negativo é negativo). Portanto, escrevemos:

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -r \text{ ou } \frac{x - x_1}{x_2 - x} = -r$$

chamando x a abscissa de C'. Resolvendo em x, obtemos:

$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r} \qquad (3b)$$

que equivale à fórmula (3) em que se substitui r por —r.

Observação. Esta última relação deixa de ter significado quando

r = 1, ou quando em (3) se faz r = — 1. Neste caso, e dizemos que C' está no ∞ .

$$\frac{AC'}{BC'} = -1$$

EXERCÍCIOS

1. Tomando as abscissas dos três pontos A, B e C de uma reta, em relação a uma origem O, provar a relação (de Chasles):

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

2. Generalizar a relação anterior, isto é, tomando n pontos A_1, A_2, A_3, ..., An, de abscissas x_1, x_2, ... x_n, respectivamente, provar que

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n} + \overline{A_n A_1} = 0.$$

3. Dados quatro pontos de uma reta A, B, C e D, provar a relação (de Euler): $\overline{AB}.\overline{CB} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$

4. Achar a abscissa do ponto C' que divide na razão 3/5 o segmento que une os pontos A (— 5) e B (3). Resp.: x = —2.

5. Achar a abscissa do ponto C' que divide o segmento de extremos A (—7) e B (5) na razão — 9/5. Resp. x = 20.

6. Dois pêsos de 9 gf e 12 gf respectivamente estão aplicados nos pontos A (— 2) e B (5) de uma reta. Achar a abscissa do ponto de aplicação da resultante. Resp. x = 2.

7. Achar o baricentro dos pontos $P_1(x_1)$ e $P_2(x_2)$ aos quais estão associados os pesos P_1 e P_2 respectivamente.

(Chama-se baricentro dos pontos P_1 e P_2 aos quais estão associados os pêsos p_1 e p_2, o ponto P que divide o segmento $P_1 P_2$ na razão p_1/p_2)

$$\text{Resp. } x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}$$

8. Mostrar que a relação estabelecida no exercício anterior se estende ao caso de três P_1, P_2, P_3, isto é,

$$x = \frac{p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + p_3\, x_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

9. Achar os pontos que dividem harmônicamente na razão 5/3 o segmento cujos extremos têm por abscissas A (1) e B (9). (Dizemos que dois pontos dividem harmônicamente um segmento quando o dividem interna e externamente na mesma razão).

Resp.: $x = 6 . x' = 21$

11. São dados três pontos A($-$ 2), B(4) e C (7). Achar o conjugado harmônico de B em relação aos outros dois. (Dizem-se conjugados harmônicos os pontos que dividem harmônicamente um segmento).

Resp.: $x = 16$.

L I Ç Ã O 2

O PONTO NO PLANO

5. COORDENADAS NO PLANO. A associação entre números e pontos que acaba de ser introduzida na reta pode ser estendida ao plano (e mais tarde ao espaço), mas, neste caso, não basta um único número para determinar a posição de um ponto. Ainda aqui vamos começar por considerar um exemplo que, conquanto não se refira ao plano, serve a ilustrar a generalização do problema anterior.

6. COORDENADAS GEOGRÁFICAS. Em geografia nos familiarizamos com a noção de coordenadas geográficas (latitude e longitude), por meio das quais se pode determinar a posição de um local à superfície da terra tomando como sistema de REFERÊNCIA dois círculos máximos do globo terrestre: o equador e um meridiano inicial escolhido arbitràriamente. Neste caso são necessários e suficientes dois números QUALIFICADOS (ou relativos) para determinar sem ambigüidade a posição de um local. Assim, quando dizemos que um dado local se acha a 40^o long. E e 35^o lat. N, subentendemos que se deve medir um arco de 40^o ao longo do equador e a partir do meridiano de Greenwich para o Este e sôbre o meridiano que passa pela extremidade dêste arco, um arco de 35^o deve ser medido a partir do equador para o Norte (fig. 6). Para distinguir os dois sentidos em que a longitude E o O e a latitude N e S podem ser medidas, poderiamos estabelecer uma convenção de sinais, considerando positivas as longitudes quando a Este do meridiano inicial e negativas quando a Oeste dêste, e positivas as latitudes quando ao Norte do equador e negativas quando ao Sul. Convencionando ainda que o primeiro numero escrito indique a LONGITUDE e o segundo a LATITUDE, podemos dizer simplesmente que as coordenadas do local P, no exemplo acima, são os números relativos + 40 e + 35, subentendendo-se que a unidade de medida seja o grau. Anàlogamente, poderiamos escrever:

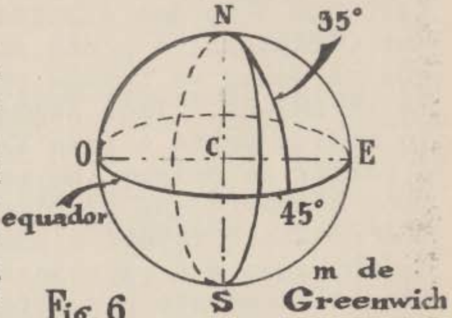

Fig. 6

($-$ 40, + 35) em lugar de 40^o long. O, 35^o lat. N

(para resolver êste problema é recomendável o uso de papel quadriculado ou milimetrado).

Seja construir o ponto de coordenadas — 4 e — 3 ou, como se diz correntemente, o ponto (— 4, —3). Numa folha de papel quadriculado, traçamos dois eixos perpendiculares entre si XX' e YY' que se cortam no ponto O (fig. 10). Tomando como unidade o lado dos quadrículos, medimos 4 à esquerda da origem (visto que 4 é negativo), e sôbre a paralela a YY', por êste ponto, medimos 3 abaixo do eixo XX' (visto que 3 é negativo). O extremo dêste segmento nos dá o ponto procurado P , de coordenadas —4 e — 3.

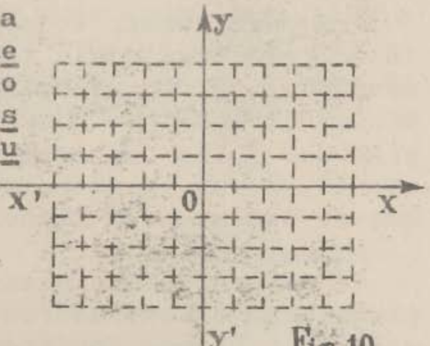

Fig. 10

Obs. Os dois eixos XX' e YY' decompõem o plano em quatro REGIÕES OU QUADRANTES. No 1º quadrante (XOY) tanto a abscissa como a ordenada são positivas; no 2º quadrante (YOX') a abscissa é negativa e a ordenada é positiva; no 3º quadrante (X'OY'), são ambas negativas, e no 4º (Y'OX), a abscissa é positiva e a ordenada é negativa.

8. COORDENADAS OBLÍQUAS. Um sistema de coordenadas retilíneas pode ainda consistir, de um modo geral, de dois eixos que se cortam obliquamente, sob um ângulo dado ω (ômega) (fig. 11). Conservando as designações e as convenções associadas ao sistema retangular, podemos introduzir as coordenadas retilíneas oblíquas de um ponto no plano mediante a seguinte construção:

Dado um ponto genérico P do plano, traçamos por êste ponto as paralelas aos eixos Oy e Ox respectivamente. A primeira encontra o eixo dos x em M e a segunda encontra o eixo dos y em N. Diremos coordenadas (oblíquas) de P, os números x = PN = OM e y = PM. Como no sistema retangular, x se diz a abscissa e y a ordenada de P.

OBS. Na prática, dá-se preferência ao sistema retangular, posto que as fórmulas correspondentes se caracterizam, em geral por sua maior simplicidade. Contudo, há casos em que é vantajoso o emprêgo de coordenadas oblíquas.

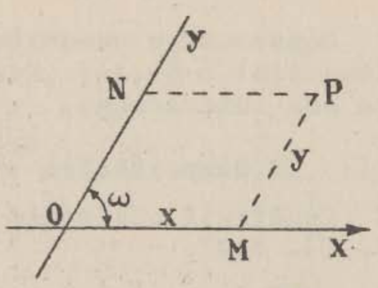

Fig. 11

EXERCÍCIO

1. Construir os seguintes pontos : (2,3), (2 —1), (4, — 3), (—2,5), (— 4, —4), (3,0), (0,1), (0,—2), (0,0), (7, —8).

2. O centro de 1 quadrado está na origem de um sistema de coordenadas e os lados são paralelas aos eixos. Se o lado tem 4 unidades, achar as coordenadas dos vértices.

3. O centro de gravidade de um triângulo equilátero de 6 unidades de lado está na origem de um sistema de coordenadas e a base é paralela ao eixo dos x. Achar as coordenadas dos vértices.

Resp. $(0, 2\sqrt{3})$, $(3, -\sqrt{3})$ e $(-3, -\sqrt{3})$.

4. O centro de um hexágono regular de 2 unidades de lado coincide com a origem de um sistema de coordenadas, e dois lados são paralelos ao eixo dos x. Achar as coordenadas dos vértices.

Resp. $(1,\sqrt{3})$, $(2,0)$, $(1,-\sqrt{3})$, $(-1,-\sqrt{3})$, $(-2,0)$ e $(-1, \sqrt{3})$,.

5. Três vértices consecutivos de um paralelogramo são os pontos (6,0), (0,0) e (2,3). Achar o quarto vértice.

Resp. (8,3)

6. Construir o triângulo cujos vértices são (3,2), (—2,5) e (— 4, —3).

L I Ç Ã O /3/

RELAÇÕES ENTRE PONTOS

9. DISTÂNCIA DE DOIS PONTOS. (Eixos retangulares). Sejam P_1 e P_2 dois pontos dados, (x_1, y_1) e (x_2, y_1) as suas coordenadas e $d = P_1 P_2$ a distância procurada. Traçamos $P_1 M = y_1$, $P_2N = y_2$ e P_1 Q paralela ao eixo dos x (fig. 12).
No triângulo retângulo P_1P_2Q temos: (relação de Pitágoras)

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{P_2Q}^2 \qquad (1)$$

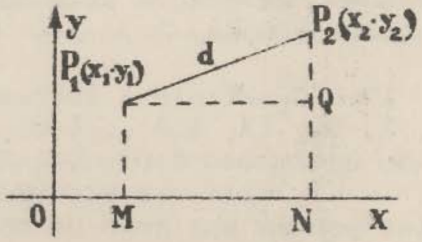

Fig. 12

Mas, $\overline{P_1P_2} = d$

$\overline{P_1Q} = \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} =$

$= x_2 - x_1$

$$\overline{P_2Q} = \overline{P_2N} - \overline{QN} = \overline{P_2N} - \overline{P_1M} = y_2 - y_1$$

Substituindo êstes valores em (1), vem:

$$(1) \qquad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ou, extraindo a raiz aos dois membros:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que exprime a distância dos dois pontos em função de suas coordenadas.

Obs. Esta fórmula é válida quaisquer que sejam os quadrantes em que se acham os pontos dados. Devemos lembrar, porém, que o sinal, que figura nos binômios

$(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$ é um sinal de subtração e que os números x_1, x_2, y_1 e y_2 são números relativos (que podem ser positivos ou negativos), aos quais se aplicam as regras de soma e subtração dos números relativos.

EXEMPLO: Achar a distância entre os pontos $P_1(-2,3)$ e $P_2(6, -3.)$ SOLUÇÃO: No caso em aprêço:

$x_1 = -2, y_1 = 3$

$x_2 = 6 \quad y_2 = -3$

Substituindo na fórmula (1) temos:

$$d = \sqrt{(-2-6)^2 + 3 - (-3)^2} =$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (3+3)^2} =$$

$$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$$

$d = 10$

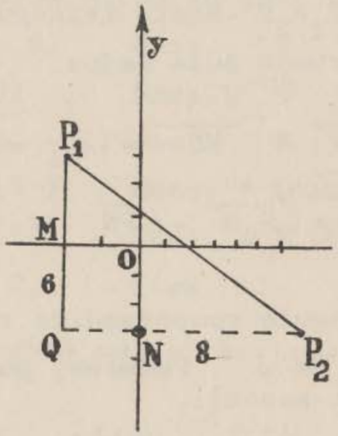

Fig. 13

Verificação geométrica: Localizados os pontos P_1 e P_2 (fig. 13), traçamos P_1 M, paralela ao eixo dos y, e P_2 N, paralela ao eixo dos x, as quais se cortam em Q, formando o triângulo retângulo $P_1 QP_2$, que tem por hipotenusa a distância procurada $P_1 P_2 = d_1$ e por catetos, respectivamente,

$\overline{P_2Q} = \overline{P_2N} + \overline{NQ} = 6 + 2 = 8$ e $\overline{P_1Q} = \overline{P_1M} + \overline{MQ} =$
$= 3 + 3 = 6.$

A relação de Pitágoras aplicada ao triângulo retângulo $P_1 QP_2$ nos daria o mesmo resultado obtido acima mediante a aplicação direta da fórmula (1).

10. DISTÂNCIA DE DOIS PONTOS. (Eixos oblíquos): - Determinar a distância $d = P_1 P_2$ de dois pontos dados $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ num sistema de eixos oblíquos

$(xOy = \omega)$. (fig. 14).

Construidas as ordenadas $\overline{P_1M} = y_1$ e $P_2N = y_2$, tracemos $\overline{P_1P}$ paralela ao eixo dos x, formando o triângulo obtusângulo P_1P_2P. Neste triângulo conhecemos dois lados:

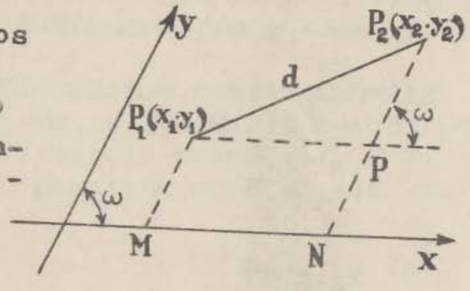

Fig. 14

$$\overline{P_1P} = \overline{MN} = x_2 - x_1 \quad \text{e}$$

$$\overline{P_2P} = \overline{P_2N} - \overline{PN} = y_2 - y_1$$

e o ângulo compreendido entre êles: P_1PP_2 que é suplemento de ω. Podemos, por conseguinte, escrever (lei dos co-senos):

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1P}^2 + \overline{P_2P}^2 - 2\,\overline{P_1P}.\,\overline{P_2P}.\,\cos P_1PP_2$$

ou visto que $d = P_1P_2$

$\overline{P_1P} = x_2 - x_1$ $\overline{P_2P} = y_2 - y_2 - y_1$ $\cos P_1PP_2 = -$ $- \cos\omega$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$\cos\omega$ e extraindo a raiz quadrada (positiva):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega}$$

que é a expressão da distância procurada. Como se vê, esta fórmula é bem mais complicada do que a fórmula (1), e se reduz a esta quando $\omega = \pi/2$.

EXERCÍCIOS

1. Achar a distância entre os pontos (- 2,1) e (4,9).

   Resp. 10

2. Achar a distância entre os pares de pontos:

a)	(2,6)	e	(7, - 6)	Resp. 13
b)	(- 1,2)	e	(2,3)	Resp. $\sqrt{10}$
c)	(1,2)	e	(- 3, - 1)	Resp. 5
d)	(- 7,6)	e	(2,3)	Resp. $3\sqrt{10}$
e)	(- 4, - 4)	e	(5,1)	Resp. $3\sqrt{10}$
f)	(5,4)	e	(- 7,1)	Resp. 13

3. Achar os lados do triângulo cujos vértices são (1,2), (- 1, - 2), e (2, - 3).

   Resp. $2\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ $\sqrt{26}$

4. Achar o perímetro do triângulo cujos vértices são: (- 4,3), (5,3) e (11, - 5).

   Resp. 36

5. Um segmento tem por comprimento $2\sqrt{17}$. As coordenadas de um extremo são (3,6), e o outro tem por ordenada 8. Achar a abscissa dêste segundo extremo.

   Resp. x = - 5 ou x = 11.

6. Mostrar que os pontos (7,3), (5,5) e (- 1, - 3) são os vértices de um triângulo isósceles.

7. Mostrar que os pontos (5,6), (1, - 2) e (- 3,0) são vértice de um triângulo retângulo.

8. Mostrar que os pontos (1,1), (- 1, - 1) e ($-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$) são os vértices de um triângulo equilátero.

L I Ç Ã O 4

RAZÃO DE SECÇÃO DE UM SEGMENTO

11. DIVISÃO DE UM SEGMENTO NUMA RAZÃO DADA. Seja determinada as coordenadas do ponto P, que divide o segmento $P_1 P_2$ (fig. 15), numa razão dada r, em função da coordenadas de suas extremidades.

Sejam (x_1, y_1) as coordenadas de P_1, (x_2, y_2) as de P e (x, y) as coordenadas procuradas do ponto P. Se P divide o segmento $P_1 P_2$ numa razão dada r, devemos ter:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r$$

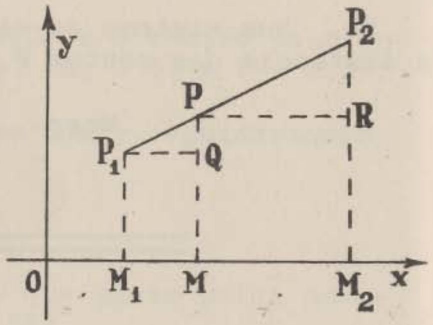

Fig. 15

Pelos pontos P_1 e P tiremos as paralelas P_1Q e PR ao eixo, formando os dois triângulos retângulos semelhantes P_1QP e PRP_2 (têm ângulos dois a dois iguais).

Portanto, são proporcionais os lados correspondentes e podemos escrever, as proporções:

$$\frac{\overline{P_1Q}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} \quad e \quad \frac{\overline{PQ}}{\overline{P_2R}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

Mas,

$$\overline{P_1Q} = \overline{M_1M} = \overline{MO} - \overline{M_1O} = x - x_1$$

$$\overline{PR} = \overline{MM_2} = \overline{M_2O} - \overline{MO} = x_2 - x$$

$$\overline{PQ} = \overline{PM} - \overline{QM} = \overline{PM} - \overline{P_1M_1} = y - y_1$$

$$\overline{P_2R} = \overline{P_2M_2} - \overline{RM_2} = \overline{P_2M_2} - \overline{PM} = y_2 - y$$

enfim, por hipótese:

$$\frac{\overline{P_1P}}{PP_2} = r$$

Substituindo êsses valores nas proporções acima, temos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r \quad e \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$$

expelindo os denominadores, resulta:

$$x - x_1 = r\,(x_2 - x) \text{ e}$$

$$y - y_1 = r\,(y_2 - y)$$

ou, abrindo os parênteses: $x - x_1 = rx_2 - rx$ e $y - y_1 = ry_2 - ry$.

Isolando x na primeira e y na segunda, vem:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad e \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

que são as coordenadas procuradas.

Obs. _ **Na dedução que acabamos de fazer, partimos da suposição que o ponto P esteja no interior do segmento dado.**

Pode acontecer porém, que o ponto P esteja sôbre o prolongamento do segmento P_1P_2, isto é, seja externo

a êle (fig. 16).

Neste caso, a razão

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = -r$$

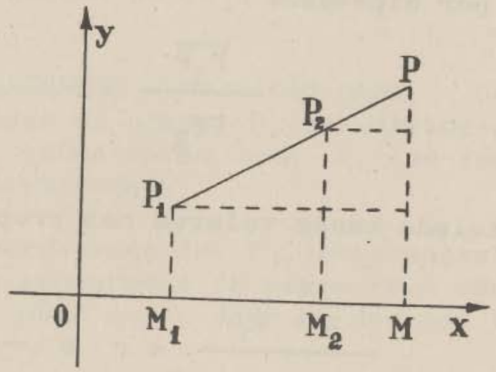

Fig. 16

as fórmulas (II), tomam a forma:

$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r}$$

e (IIa)

$$y = \frac{y_1 - ry_2}{1 - r}$$

A razão r pode ser dada, como em geral sucede, em forma de uma fração ordinária irredutível, r_1/r_2.

Substituindo nas expressões (II), a razão r por essa fração, e simplificando, vem:

(IIb) $$x = \frac{r_2x_1 + r_1x_2}{r_1 + r_2} \quad \text{e} \quad y = \frac{r_2y_1 + r_1y_2}{r_1 + r_2}$$

12. CASO PARTICULAR. PONTO MEIO DE UM SEGMENTO. Se P ocupa o ponto meio do segmento P_1P_2 isto é, se $P_1P = PP_2$, a razão

$r = \frac{P_1P}{PP_2} = 1$ e as fórmulas (II), se reduzem a:

(III) $$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

que são as coordenadas do ponto meio de um segmento, em função das coordenadas de suas extremidades.

EXEMPLO I: Achar as coordenadas do ponto que divide na razão 2:5 o segmento que une os pontos (- 4,5) e (3, - 2).

Solução: Seja P_1 (- 4,5) e P_2 (3, - 2) (fig. 17). Traçando o segmento $P_1 P_2$, determinar sôbre êle um ponto P, tal que:

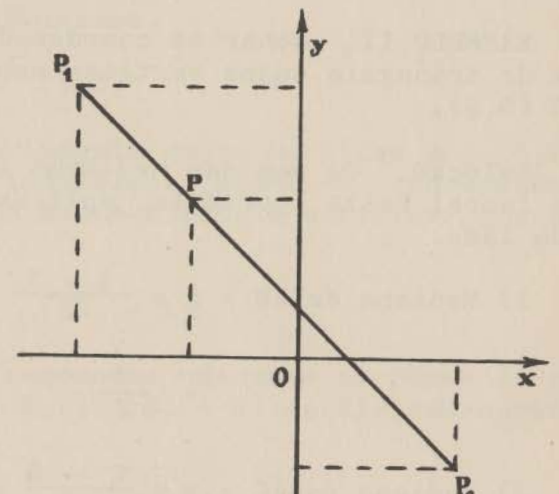

Fig. 17

$$\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \frac{2}{5} \text{ ou } \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{5}$$

Fazendo

$x_1 = -4, \; y_1 = 5$

$x_2 = 3, \; y_2 = -2$

$r_1 = 2 \quad r_2 = 5$

e substituindo êstes valores nas fórmulas (IIb), temos:

$$x = \frac{5(-4) + 2.3}{2 + 5} = \frac{-20 + 6}{7} = -2$$

$$y = \frac{5 . 5 + 2(-2)}{2 + 5} = \frac{25 - 4}{7} = 3$$

que são as coordenadas procuradas.

Obs. Deve-se notar que r_1 é o número correspondente ao segmento P_1P adjacente a P_1 e r_2 correspondente a

Obs. A ordem em que se tomam os pontos não afeta o resultado ; assim, se fizessemos $P_1 (3, -1)$ e $P_2 (-1,2)$, isto é, $x_1 = 3$, $y_1 = -1$, $x_2 = -1$ e $y_2 = 2$, teríamos anàlogamente:

$$m = \frac{2 - (-1)}{-1 - 3} = \frac{2 + 1}{-4} = -\frac{3}{4}$$

17. ÂNGULO DE DUAS RETAS: Duas retas que se cortam formam dois pares de ângulos respectivamente suplementares. Sejam MP e NP duas retas que se encontram em P (fig. 21), formando um ângulo (agudo) φ e sejam α_1 e α_2 as suas inclinações. O ângulo α_2 é um ângulo extremo no triângulo MNP e é, portanto, igual à soma dos ângulos internos não adjacentes, donde:

$$\alpha_2 = \varphi + \alpha_1 \quad \text{ou} \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

que nos permite achar o ânfulo formado por duas retas quando se conhecem às suas inclinações.

Este ângulo pode ainda ser expresso diretamente em função dos declives das retas dadas, lembrando a relação trigonométrica:

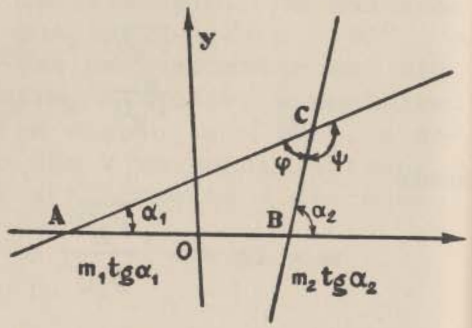

Fig. 21

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1\ tg\alpha_2}$$

Fazendo $m_1 = tg\alpha_1$ e $m_2 = tg\alpha_2$ e substituindo na fórmula acima, temos:

$$tg\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

que é a expressão procurada.

Obs. O ângulo φ será agudo ou obtuso conforme seja positiva ou negativa a expressão:

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Se visamos achar o ângulo agudo entre duas retas, basta tomar a expressão acima com sinal positivo, posto que ângulos suplementares tenham tangentes numèricamente iguais mas de sinais contrários. Como as expressões:

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \text{e} \quad \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

são iguais e de sinais contrários, basta, para obter o ângulo agudo entre duas retas, dispor na fórmula os declives m_1 e m_2 de modo a torná-la positiva.

EXEMPLO I : Achar o ângulo agudo formado pelas retas cujos declives são $-1/2$ e $1/3$ respectivamente.

Solução: Fazendo $m_1 = -\frac{1}{2}$ e $m_2 = \frac{1}{3}$ e substituindo na fórmula (V), acharemos:

$$tg\ \varphi\ \frac{\frac{1}{3} - (-\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}} = 1.$$

$$\therefore \quad \varphi = 45^o$$

Obs. Se tivessemos feito $m_1 = \frac{1}{3}$ e $m_2 = -\frac{1}{2}$, obteriamos $tg\ \varphi = -1$ e $\varphi = 135^o$, isto é, teríamos o ângulo obtuso formado pelas retas (suplemento do anterior).

II. Achar o ângulo que a reta determinada pelos pontos A(9, - 1) e B(3,3), faz com a reta que passa por C(- 2,3) e D(6,5).

Solução: Dados dois pontos de cada reta, podemos achar os respectivos declives. Chamando m_1 o declive da primeira, temos segundo (IV):