ALGACYR MUNHOZ MAEDER

CURSO DE MATEMÁTICA

2.º LIVRO - CICLO COLEGIAL

4.ª EDIÇÃO

"Uso autorizado pelo Ministério da Educação e Saúde" - Registro N.º 1341

EDIÇÕES MELHORAMENTOS

40.

2/V-1

30.º MILHEIRO

Nos pedidos telegráficos basta citar o n.º **853**

DO PINHEIRO AO LIVRO UMA REALIZAÇÃO MELHORAMENTOS

OBRAS DO MESMO AUTOR
NAS
"EDIÇÕES MELHORAMENTOS"

Para o Curso Ginasial

Lições de Matemática — 1.ª série.
Lições de Matemática — 2.ª série.
Lições de Matemática — 3.ª série.
Lições de Matemática — 4.ª série.
Lições de Matemática — 5.ª série.

Posteriores à reforma Capanema:

Curso de Matemática — 1.ª série.
Curso de Matemática — 2.ª série.
Curso de Matemática — 3.ª série.
Curso de Matemática — 4.ª série.
Tábuas de Logaritmos.

Para o Curso Colegial

Curso de Matemática — 1.ª série.
Curso de Matemática — 2.ª série.
Curso de Matemática — 3.ª série.

PROGRAMA DO CICLO COLEGIAL

CURSO CLÁSSICO — 2.ª SÉRIE

ÁLGEBRA

Unidade I: *Progressões e logaritmos* — 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3. Resolução de algumas equações exponenciais simples.

Unidade II: *O binómio de Newton* — 1. Noções sobre análise combinatória. 2. Binómio de Newton.

GEOMETRIA

Unidade III: *Os corpos redondos* — 1. Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esféricos; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade IV: *Vector* — 1. Grandezas escalares e vectoriais. 2. Noção de vector; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vectores. 4. Vectores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade V: *Projecções* — 1. Projecção ortogonal de um vector sobre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projecção de um vector.

Unidade VI: *Funções circulares* — 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos de 30º, 45º e 60º.

Unidade VII: *Resolução de triângulos* — 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Uso das tábuas trigonométricas. 3. Resolução de triângulos rectângulos.

PROGRAMA DO CICLO COLEGIAL

CURSO CIENTÍFICO — 2.ª SÉRIE

ÁLGEBRA

Unidade I: *A função exponencial* — 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II: *O binómio de Newton* — 1. Noções sobre análise combinatória. 2. Binómio de Newton.

Unidade III: *Determinantes* — 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Cramer; teorema de Rouché.

Unidade IV: *Fracções contínuas* — Noções sobre fracções contínuas.

GEOMETRIA

Unidade V: *Os corpos redondos* — 1. Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade VI: *Vector* — 1. Grandezas escalares e vectoriais. 2. Noção de vector; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vectores. 4. Vectores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade VII: *Projecções* — 1. Projecção ortogonal de um vector sobre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projecção de um vector.

Unidade VIII: *Funções circulares* — 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$.

Unidade IX: *Transformações trigonométricas* — 1. Fórmulas de adição, subtracção, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3. Uso das tábuas trigonométricas.

Unidade X: *Equações trigonométricas* — Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.

Unidade XI: *Resolução de triângulos* — 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos rectângulos. 3. Resolução de triângulos obliquângulos. 4. Aplicações imediatas à topografia.

ÍNDICE

Capítulo VII: *Binómio de Newton*

Capítulo VIII: *Teoria dos determinantes*

Capítulo IX: *Aplicação dos determinantes aos sistemas de equações lineares*

Capítulo X: *Noções sobre fracções contínuas*

Capítulo XI: *Noções sobre geração e classificação das superfícies*

Capítulo XII: *Estudo do cilindro e do cone*

Capítulo XIII: *Estudo da esfera*

Capítulo XIV: *Vectores*

Capítulo XV: *Projecções*

Capítulo XVI: *Generalização das noções de arco e de ângulo*

Capítulo XVII: *Funções circulares ou trigonométricas*

Capítulo XVIII: *Redução ao primeiro quadrante*

Capítulo XIX: *Relações entre as funções circulares de um mesmo arco*

Capítulo XX: *Transformações trigonométricas*

Capítulo XXI: *Uso das tábuas trigonométricas*

Capítulo XXII: *Equações trigonométricas*

Capítulo XXIII: *Resolução de triângulos rectângulos*

Capítulo XXIV: *Resolução de triângulos obliquângulos*

Capítulo XXV: *Aplicações imediatas à topografia*

CAPÍTULO I

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1. Definições. — Dá-se a denominação de *progressão aritmética* a toda sucessão de números na qual a diferença entre cada número e o precedente é constante.

Os números que formam a progressão denominam-se *termos*, e a diferença constante entre cada termo e o precedente chama-se *razão* da progressão.

Assim, dizemos que a sucessão

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13, \ldots$$

é uma progressão aritmética de razão igual a 3.

Com efeito, temos

$$4-1=3,\quad 7-4=3,\quad 10-7=3, \ldots$$

Anàlogamente, a sucessão

$$9,\ 5,\ 1,\ -3,\ -7, \ldots$$

é uma progressão aritmética de razão igual a -4.

Indica-se que os números $a, b, c, \ldots l \ldots$ estão em progressão aritmética pela notação

$$\div a\,.\,b\,.\,c\,.\,\ldots\,.\,l\ldots,$$

e designa-se a razão pela letra r.

2. Progressão crescente e progressão decrescente. — A razão de uma progressão aritmética pode ser positiva ou negativa. Quando é positiva, a progressão diz-se *crescente*; no caso contrário, diz-se *decrescente*.

Exemplos: a progressão

$$\div 0\,.\,3\,.\,6\,.\,9\,.\,12\ldots \qquad (r=3)$$

é crescente, enquanto a progressão

$$:11.8.5.2.-1\ldots \qquad (r=-3)$$

é decrescente.

3. **Progressão limitada e progressão ilimitada.** — Dizemos que a progressão

$$:a.b.c.\ \ldots l\ldots$$

é *limitada* quando se compõe de um número finito de termos.

No caso contrário, a progressão diz-se *ilimitada*.

4. **Expressão do termo de ordem** n. — Seja a progressão

$$:a.b.c.d\ldots$$

Conforme a definição, temos

$$b=a+r,$$
$$c=b+r=a+r+r=a+2r,$$
$$d=c+r=a+2r+r=a+3r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Assim, o segundo termo (b) é igual ao primeiro mais uma vez a razão, o terceiro termo (c) é igual ao primeiro mais duas vezes a razão, o quarto termo (d) é igual ao primeiro mais três vezes a razão, etc.

Dizemos, então, que qualquer termo da progressão se obtém somando ao primeiro tantas vezes a razão quantos forem os termos que o precedem.

Designando por l o termo de ordem n, temos, pois,

$$\boxed{l=a+(n-1)\,r.} \qquad (1)$$

5. **Cálculo do primeiro termo.** — Partindo da fórmula estabelecida no parágrafo precedente, podemos deduzir fàcilmente as expressões dos demais elementos da progressão aritmética.

Assim é que, da expressão

$$l=a+(n-1)\,r,$$

deduz-se imediatamente

$$\boxed{a=l-(n-1)\,r,} \qquad (2)$$

expressão que fornece o valor de a quando são dados l, n e r.

6. **Cálculo da razão.** — Da expressão (1),

$$l=a+(n-1)\,r,$$

deduz-se

$$l-a=(n-1)\,r.$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente de r, obtemos

$$\boxed{r=\frac{l-a}{n-1}.} \qquad (3)$$

7. **Cálculo do número de termos.** — Voltemos, ainda, à expressão (1)

$$l=a+(n-1)\,r.$$

Passando a para o primeiro membro, temos

$$l-a=(n-1)\,r,$$

$(n-1)r = l-a$

$n-1 = \frac{l-a}{r}$

ou, efectuando a operação indicada no segundo membro,

$$l-a=nr-r.$$

$\boxed{n = \frac{l-a}{r}+1}$

Passando r para o primeiro membro, vem

$$l-a+r=nr.$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente de n, resulta

$$n=\frac{l-a+r}{r},$$

ou

$$\boxed{n=\frac{l-a}{r}+1} \qquad (4)$$

8. **EXERCICIOS.**

1.º *Calcular o 12.º termo de uma progressão aritmética na qual o primeiro termo é 2 e a razão 3.*

Sendo dados

$$a=2, \quad r=3 \quad \text{e} \quad n=12,$$

obtemos, com auxílio da fórmula (1),

$$l = a + (n-1)\,r,$$
$$l = 2 + (12 - 1) \times 3,$$
$$l = 35.$$

2.º *Calcular o número de termos da progressão aritmética na qual o primeiro termo é 10, o último 60 e a razão 5.*

Temos

$$a = 10, \quad r = 5 \quad \text{e} \quad l = 60.$$

Aplicando a fórmula (4)

$$n = \frac{l-a}{r} + 1,$$

encontramos

$$n = \frac{60-10}{5} + 1,$$

$$n = 11.$$

3.º *Calcular a razão da progressão aritmética na qual a soma do terceiro termo com o sétimo é 30 e a soma do quarto com o nono é 36.*

Temos

$$a_3 = a + 2r$$
$$a_7 = a + 6r$$
$$a_4 = a + 3r$$
$$a_9 = a + 8r.$$

Somando a primeira igualdade com a segunda e depois a terceira com a quarta, vem

$$a_3 + a_7 = 2a + 8r$$
$$a_4 + a_9 = 2a + 11r.$$

Substituindo as somas indicadas nos primeiros membros pelos valores dados e invertendo as igualdades, temos

$$2a + 8r = 30$$
$$2a + 11r = 36.$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda, encontramos

$$3r = 6,$$
$$r = 2.$$

9. **Propriedade.** — *Em toda progressão aritmética limitada, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.*

Consideremos a progressão

$$:a\,.\,b\,.\,c\,.\,d \ldots h \ldots h' \ldots m\,.\,n\,.\,p\,.\,l,$$

na qual os termos c e n são equidistantes dos extremos.

De acordo com a fórmula fundamental (1), temos

$$c = a + 2r \quad \text{e} \quad l = n + 2r,$$

ou, tirando, na segunda expressão, o valor de n,

$$c = a + 2r \quad \text{e} \quad n = l - 2r.$$

Somando, membro a membro essas igualdades, encontramos

$$c + n = a + l.$$

Em geral, considerando dois termos, h e h', de ordens tais que haja m termos antes de h e m termos depois de h', teremos sempre

$$h = a + mr \quad \text{e} \quad h' = l - mr,$$

e, consequentemente,

$$h + h' = a + l.$$

10. **Soma dos termos de uma progressão aritmética.** — Seja a progressão

$$:a\,.\,b\,.\,c \ldots\ldots m\,.\,p\,.\,l.$$

Designando por S a soma dos termos, vem

$$S = a + b + c \ldots + m + p + l,$$

ou

$$S = l + p + m \ldots + c + b + a.$$

Somando ordenadamente as igualdades formadas, temos

$$2S = (a+l) + (b+p) + (c+m) + \ldots + (m+c) + \\ + (p+b) + (l+a).$$

Notando que as expressões contidas nos parênteses indicam a soma dos extremos da progressão ou a de termos equidistantes dos extremos, e que essas expressões são tantas quantos são os termos da progressão, segue-se que

$$2S = (a+l)\,n,$$

$$\boxed{S = \frac{(a+l)\,n}{2},} \qquad (5)$$

expressão que fornece o valor da soma dos termos de uma progressão aritmética quando são dados a, l e n.

11. **Observação.** — O valor de S pode ser também expresso em função de a, n e r.

Com efeito, substituindo, na fórmula (5), l por

$$a + (n-1)\,r,$$

obtemos

$$S = \frac{[a + a + (n-1)\,r] \times n}{2},$$

$$S = \frac{[2a + (n-1)\,r] \times n}{2},$$

$$S = \frac{2an + nr\,(n-1)}{2}, \qquad (6)$$

fórmula que fornece o valor de S em função de a, n e r.

12. **EXERCICIOS.**

1.º *Calcular a soma dos termos da progressão aritmética na qual o primeiro é 3, o último 31 e o número deles 15.*

Temos

$$a = 3, \quad l = 31 \quad \text{e} \quad n = 15.$$

Aplicando a fórmula (5)

$$S = \frac{(a+l)\,n}{2}$$

encontramos

$$S = \frac{(3+31)\,15}{2}$$

$$S = 255.$$

2.º *Estabelecer a expressão da soma dos* n *primeiros números ímpares.*

Temos

$$a = 1, \quad r = 2 \quad \text{e} \quad n = n.$$

Aplicando a fórmula (6)

$$S = \frac{2an + nr\,(n-1)}{2},$$

obtemos

$$S = \frac{2n + 2n\,(n-1)}{2},$$

$$S = \frac{2n + 2n^2 - 2n}{2},$$

$$S = n^2,$$

a saber, a soma dos n primeiros números ímpares é igual ao quadrado de n.

13. **Interpolação aritmética.** — Dados dois números, a e l, *inserir* entre eles m meios aritméticos significa formar uma progressão aritmética com $m+2$ termos na qual a e l sejam os extremos.

Assim é que, inserindo, por exemplo, entre os números

$$2 \quad \text{e} \quad 16,$$

6 meios aritméticos, se obtém a progressão

$$\div 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16,$$

em que o número de termos é

$$n = 2 + 6 = 8.$$

Devemos notar que, para formar qualquer progressão mediante a inserção de meios aritméticos, basta determinar-lhe a razão.

Consideremos, pois, os números

$$a \ldots\ldots\ldots\ldots l,$$

entre os quais se quer inserir m meios aritméticos.

Evidentemente, o número de termos da progressão procurada será

$$n = m + 2$$

Substituindo, pois, na fórmula

$$r = \frac{l-a}{n-1}$$

n por $m+2$, obtemos

$$r = \frac{l-a}{m+2-1},$$

$$r = \frac{l-a}{m+1}. \qquad (7)$$

Conhecida a razão, forma-se directamente a progressão.

5. $\left(\frac{6}{5}\right)^x = 1{,}728.$ R. $x = 3.$

6. $2^{x+1} = 64.$ R. $x = 5.$

7. $3^{x+2} = 243.$ R. $x = 3.$

8. $2^{x+1} + 2^x = 96.$ R. $x = 5.$

9. $3^{x+1} - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 75.$ R. $x = 3.$

10. $2^x + 4^x = 72.$ R. $x = 3.$

11. $2^{x+1} + 4^x = 80.$ R. $x = 3.$

12. $2^{x+3} + 4^{x+1} = 96.$ R. $x = 2.$

13. $3^{x+3} + 9^{x+2} = 810.$ R. $x = 1.$

14. $\log x = \log 20 - \log 4.$ R. $x = 5.$

15. $2 \log x = \log 36.$ R. $x = 6.$

16. $3 \log x = \log 64.$ R. $x = 4.$

17. $\log x = 2 \log 12 - 3 \log 6.$ R. $x = \frac{2}{3}.$

18. $2^{3x} = 512.$ R. $x = 3.$

19. $3^{2x} = 81.$ R. $x = 2.$

20. $5^{2x} + 3 \times 5^x - 40 = 0.$ R. $x = 1.$

$2^x(2+1) = 96$
$2^x = \frac{96}{3} = 32$
$2^x = 32 = 2^5 \quad x = 5$

nota $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$
Ex III

11) $2^{x+1} + 2^{2x} = 80$
$2 \cdot 2^x + 2^{2x} - 80 = 0$
$y^2 + 2y - 80 = 0$
$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+320}}{2}$

12) $2^{x+3} + 2^{2(x+1)} = 96$
$2^3 \cdot 2^x + 2^2 \cdot 2^{2x} - 96 = 0$
$4 \cdot 2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 96 = 0$
$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$
$y^2 + 2y - 24 = 0$
$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}$
$y' = 4 \quad 2^x = 4 \quad x = 2$
$y'' = -6$

$\frac{3^{x+1}}{3^{x-2}} = 3^{x+1-x+2} = 3^3$

Ex. 9.

a) $3^{x+1} - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 75$
$3^{x-2}(3^3 - 3 + 1) = 75$
$3^{x-2} \times 25 = 75$
$3^{x-2} = \frac{75}{25} = 3$
$\therefore x - 2 = 1$
$x = 3$

b) $3^{x+1} - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 75$
$3^{x+1}(1 - 3^{-2} + 3^{-3}) = 75$
$3^{x+1}\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}\right) = 75$
$3^{x+1}\left(\frac{27 - 3 + 1}{27}\right) = 75$
$3^{x+1} \times \frac{25}{27} = 75$
$3^{x+1} = 75 \times \frac{27}{25}$
$3^{x+1} = 81$
$3^{x+1} = 3^4$
$\therefore x + 1 = 4, \; x = 3$

Conclusão: Para colocar em evidência um fator comum escolher o fator tal que não dê expoente negativo.

13) $3^{x+3} + 9^{x+2} = 810$
$3^3 \cdot 3^x + 3^{2x+4} = 810$
$3^4 \cdot 3^{2x} + 3^3 \cdot 3^x - 810 = 0$
$3 \cdot y^2 + y - 30 = 0$
$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-30)}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{6}$

Capítulo VI

NOÇÕES SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

79. **Preliminares.** — Com os objectos de uma colecção podem ser formados agrupamentos de diversos tipos, os quais se distinguem pelo critério adoptado na sua constituição.

Os objectos que formam um agrupamento denominam-se *elementos* do agrupamento. — Assim, os agrupamentos

$$abc, \quad acb, \quad cba, \ldots$$

são constituídos pelos elementos a, b e c.

O número de elementos de um agrupamento indica a sua *ordem* ou classe. — Assim, o agrupamento

$$abcd$$

é de quarta ordem.

Os agrupamentos de segunda, terceira e quarta ordem denominam-se, respectivamente, *binários*, *ternários* e *quaternários*.

Quanto ao modo de formação, distinguem-se os seguintes: *arranjos*, *permutações* e *combinações*.

80. **Arranjos simples.** — *Arranjos* de m elementos, tomados n a n, são os agrupamentos que se podem formar com n dos elementos dados, de modo que cada um difira do outro pela *ordem* ou pela *qualidade* dos seus elementos.

Consideremos alguns exemplos.

Com as três primeiras letras do alfabeto, tomadas duas a duas, podem formar-se os seguintes arranjos:

$$ab, \quad ba, \quad ca$$
$$ac, \quad bc, \quad cb.$$

Tomando, três a três, as quatro primeiras letras, os arranjos que se podem obter são

abc, *bac*, *cab*, *dab*,
abd, *bad*, *cad*, *dac*,
acb, *bca*, *cba*, *dba*,
acd, *bcd*, *cbd*, *dbc*,
adb, *bda*, *cda*, *dca*,
adc, *bdc*, *cdb*, *dcb*.

Para representar o número de arranjos que se podem formar com m elementos, tomados n a n, usa-se o símbolo

$$A_m^n$$

em que m indica o número de elementos dados, e n o grau de cada grupo.

E' de notar que m e n são números inteiros, e que

$$n < m.$$

81. **Cálculo do número de arranjos.** — Procuremos calcular o número de arranjos possíveis entre as m primeiras letras do alfabeto,

$$a, b, c, d, \ldots\ldots l,$$

tomadas, uma a uma, duas a duas, três a três, ... n a n.

Evidentemente, se tomarmos, um a um, os elementos dados, o número total dos arranjos que se podem formar é igual ao número desses elementos.

Forma-se, assim, o primeiro quadro de arranjos,

$$a, b, c, d, \ldots\ldots l,$$

e temos

$$A_m^1 = m.$$

Depois, colocando, à direita de cada arranjo do quadro anterior, cada um dos $m-1$ elementos restantes, obtemos os arranjos, dois a dois, dos m elementos dados, a saber,

ab, *ba*, *ca*, *da*, ... *la*,
ac, *bc*, *cb*, *db*, ... *lb*,
ad, *bd*, *cd*, *dc*, ... *lc*,
....
al, *bl*, *cl*, *dl*, ... *lk*.

m-1 m-1 etc

Se notarmos que cada elemento dado fornece, no caso presente, $m-1$ arranjos, e que são em número de m esses elementos, segue-se que o número total de arranjos binários, assim formados, é de

$$m(m-1).$$

Consequentemente:

$$A_m^2 = m(m-1).$$ $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

Consideremos, agora, os arranjos dos m elementos, tomados três a três.

Para formá-los, devemos colocar, em seguida a cada arranjo binário considerado no quadro anterior, cada um dos $m-2$ elementos restantes.

Obtemos, destarte, os arranjos ternários

abc, *acb*, *adb*, ... *bac*, *bca*, *bda*, ...
abd, *acd*, *adc*, ... *bad*, *bcd*, *bdc*, ...
abe, *ace*, *ade*, ... *bae*, *bce*, *bde*, ...
....
abl, *acl*, *adl*, ... *bal*, *bcl*, *bdl*, ...

m-2 m-2 etc

Notando que cada arranjo origina $m-2$ novos arranjos, segue-se que os $m(m-1)$ arranjos considerados no quadro anterior, produzem

$$m(m-1)(m-2)$$

arranjos ternários. — Portanto:

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

Anàlogamente, chegaríamos a que

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3),$$

e assim por diante.

Examinando os resultados obtidos, concluímos que, em cada caso, o número de arranjos é dado por um produto de tantos factores quantos são os elementos de cada agrupamento e que esses factores decrescem consecutivamente, sendo o primeiro igual ao número de elementos dados.

De modo geral, temos

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)],$$

expressão que também pode ser posta sob a forma

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1). \qquad (1)$$

A fórmula supra permite-nos obter o número de arranjos simples de m elementos, tomados n a n.

82. **EXERCÍCIOS.**

1.º *Calcular o número de arranjos que se podem formar em 10 objectos, tomados 5 a 5.*

São dados

$$m = 10 \quad \text{e} \quad n = 5.$$

Aplicando a fórmula

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1),$$

encontramos

$$A_{10}^5 = 10(10-1)(10-2)(10-3)(10-4),$$

$$A_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6,$$

$$A_{10}^5 = 30\,240.$$

2.º *Formar todos os arranjos ternários que se podem obter com as cinco primeiras letras do alfabeto.*

Solução:

abc,	*abd,*	*abe,*	*acb,*	*acd,*	*ace,*
adb,	*adc,*	*ade,*	*aeb,*	*aed,*	*aec,*
bac,	*bad,*	*bae,*	*bca,*	*bcd,*	*bce,*
bda,	*bdc,*	*bde,*	*bea,*	*bec,*	*bed,*
cab,	*cad,*	*cae,*	*cba,*	*cbd,*	*cbe,*
cda,	*cdb,*	*cde,*	*cea,*	*ceb,*	*ced,*
dab,	*dac,*	*dae,*	*dba,*	*dbc,*	*dbe.*
dca,	*dcb,*	*dce,*	*dea,*	*deb,*	*dec,*
eab,	*eac,*	*ead,*	*eba,*	*ebc,*	*ebd,*
eca,	*ecb,*	*ecd,*	*eda,*	*edb,*	*edc.*

3.º *O número total de arranjos binários de* n *objectos é 72; calcular* n.

Temos

$$A_n^2 = n(n-1),$$

ou, substituindo,

$$n(n-1) = 72,$$

$$n^2 - n - 72 = 0.$$

Resolvendo essa equação, vem

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{2},$$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2},$$

$$n = \frac{1 \pm 17}{2}.$$

Notando que sòmente a raiz positiva convém ao problema, temos

$$n = 9.$$

83. **Permutações simples.** — *Permutações* de m elementos são os agrupamentos que com eles se podem formar de modo que cada um contenha todos os elementos dados e se diferencie de outro pela ordem dos seus elementos.

Consideremos alguns exemplos.

As permutações que se podem formar com as letras a e b são as seguintes:

$$ab \quad \text{e} \quad ba.$$

As permutações que se podem formar com as letras a, b e c são as seguintes:

abc, bac, cab,
acb, bca, cba.

As permutações que se podem formar com as letras a, b, c e d são as seguintes:

abcd,	*bacd,*	*cabd,*	*dabc,*
abdc,	*badc,*	*cadb,*	*dacb,*
acbd,	*bcad,*	*cbad,*	*dbac,*
acdb,	*bcda,*	*cbda,*	*dbca,*
adbc,	*bdac,*	*cdab,*	*dcab,*
adcb,	*bdca,*	*cdba,*	*dcba.*

Para formar esses quadros colocámos, sucessivamente, ao lado de cada objecto dado, cada uma das permutações que se podem formar com os objectos restantes.

Ademais, notemos que, de acordo com a definição, as permutações de m elementos são os arranjos dos m elementos, tomados m a m.

O número de permutações que se podem formar com m elementos representa-se simbòlicamente por

$$P_m.$$

84. **Cálculo do número de permutações.** — Para obter o número de permutações possíveis com m elementos, basta calcular o número de arranjos simples desses m elementos, tomados m a m.

Voltemos, pois, à fórmula (1)

$$A_m^n = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Tendo em vista que

$$n = m,$$

segue-se que

$$P_m = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-m+1),$$
$$P_m = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\times 1,$$

ou, ainda, notando que os factores do segundo membro da expressão supra são números inteiros consecutivos decrescentes,

$$P_m = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\times 3\times 2\times 1.$$

Finalmente, invertendo a ordem dos factores, encontramos

$$P_m = 1\times 2\times 3\times 4\ldots\times m. \qquad (2)$$

Para indicar o produto dos m primeiros números consecutivos, empregam-se os símbolos

$$\underline{|m} \quad \text{ou} \quad m!,$$

o segundo dos quais foi proposto por Kramp.

Ao produto

$$m!$$

dá-se a denominação de *factorial* de m.

Adoptando o símbolo de Kramp, a fórmula (2) pode ser escrita do modo seguinte:

$$P_m = m! \qquad (3)$$

85. **EXERCICIOS.**

1.º *De quantos modos pode ser representado o produto* ABC?

Evidentemente, o produto dado pode ser representado de tantos modos distintos quantas são as permutações possíveis das letras A, B e C.

Aplicando, pois, a fórmula (2), encontramos

$$P_3 = 1\times 2\times 3,$$
$$P_3 = 6.$$

abc bac
acb cab
bca cba

2.º *Calcular o número de permutações simples que se podem formar com cinco objectos distintos.*

Aplicando a fórmula (2), obtemos

$$P_5 = 1\times 2\times 3\times 4\times 5,$$
$$P_5 = 120.$$

36 × 6 = 216   24 × 5 = 120

86. **Combinações simples.** — Combinações de m elementos, tomados n a n, são os diversos agrupamentos que se podem formar com os elementos dados, tomando n de cada vez, e de modo que um se distinga de outro por conter um ou mais elementos diferentes.

Os objectos a serem combinados podem agrupar-se um a um, dois a dois, três a três, ... n a n.

Consideremos alguns exemplos.

Com as três primeiras letras do alfabeto podem ser formadas as combinações binárias

$$ab,\quad ac,\quad bc.$$

Combinando, duas a duas, as letras, a, b, c e d, obtemos as combinações

$$\begin{array}{lll} ab, & bc, & cd, \\ ac, & bd, & \\ ad. & & \end{array}$$

Por outro lado, as combinações ternárias possíveis das cinco primeiras letras são

$$\begin{array}{lll} abc, & bcd, & cde, \\ abd, & bce, & \\ abe, & bde, & \\ acd, & & \\ ace, & & \\ ade. & & \end{array}$$

Achar o *quarto termo* dos desenvolvimentos

8. de $(a+b)^7$. R. $35a^4b^3$.
9. de $(3a-2b)^5$. R. $720a^2b^3$.
10. de $(3x+2a)^8$. R. $108\,864a^3x^5$.

Procurar o *quinto termo* dos desenvolvimentos

11. de $(1+3x)^5$. R. $405x^4$.
12. de $(a-2b)^7$. R. $560a^3b^4$.
13. de $(2x-3y)^5$. R. $810xy^4$.

Calcular o *termo médio* dos desenvolvimentos

14. de $(x+a)^6$. R. $20a^3x^3$.
15. de $(x+a)^{10}$. R. $252a^5x^5$.
16. de $(5-4a)^4$. R. $2\,400a^2$.

Efectuar os desenvolvimentos seguintes:

17. $\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\right)^4$. R. $\frac{a^4}{16}+\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{6}+\frac{2a}{27}+\frac{1}{81}$.
18. $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)^4$. R. $\frac{a^4}{81}+\frac{2a^3b}{27}+\frac{a^2b^2}{6}+\frac{ab^3}{6}+\frac{b^4}{16}$.
19. $\left(2x+\frac{a}{2}\right)^4$. R. $16x^4+16ax^3+6a^2x^2+a^3x+\frac{a^4}{16}$.
20. $(x+\sqrt{3})^4$. R. $x^4+4x^3\sqrt{3}+18x^2+12x\sqrt{3}+9$.

Capítulo VIII

TEORIA DOS DETERMINANTES

106. **Permutação fundamental.** — Dados n elementos distintos

$$a,\ b,\ c, \ldots l,$$

se estabelecermos certa ordem na sua sucessão, a ordem alfabética por exemplo, a permutação

$$abc \ldots l,$$

escolhida entre as que se podem formar com esses elementos, recebe a denominação de permutação *fundamental*, principal ou directa.

Quando os elementos dados são representados por letras, adopta-se como fundamental a permutação em que as letras se sucedem na ordem alfabética, e quando o são por uma mesma letra afectada de índices, toma-se para fundamental aquela em que os índices se sucedem na ordem natural. — Exemplo:

$$a_1a_2a_3 \ldots a_n.$$

107. **Inversões de uma permutação.** — Em qualquer permutação de n elementos, dizemos que dois deles formam *inversão* quando estão em ordem contrária à que apresentam na permutação fundamental. Permut. Fund.

Assim, a permutação abc.

$$acb$$

apresenta uma inversão: cb; na permutação

$$cab$$

há duas inversões: ca e cb.

Para se obter o número de inversões de uma permutação, basta comparar cada elemento com todos os que o seguem em relação à ordem na permutação fundamental.

108. Classe de uma permutação. — Diz-se que uma permutação é de *classe par* ou de *classe ímpar*, conforme seja par ou ímpar o número de suas inversões.

Assim, dizemos que a permutação

abcd

$$dacb$$

é de classe par, por isso que apresenta quatro inversões:

$$da, \; dc, \; db \;\; \text{e} \;\; cb.$$

109. Teorema. — *Quando se trocam dois elementos de uma permutação, esta muda de classe.*

I. Admitindo, primeiramente, que os elementos sejam consecutivos, consideremos a permutação

Perp. Fund a...bcde...l

$$a \ldots cbde \ldots l \quad (1)$$ impar

de m elementos dados.

Trocando os elementos b e d, formemos a permutação

$$a \ldots cdbe \ldots l. \quad (2)$$ par

Como os elementos que precedem b e os que sucedem d permanecem fixos, é bem de ver que todas as inversões que cada um desses elementos pode formar com os $m-2$ elementos restantes não se alteram.

Assim, as permutações (1) e (2) diferem apenas pela posição relativa dos elementos b e d.

Se esses elementos formarem inversão em (1), na passagem da permutação (1) para a permutação (2), o número total de inversões diminuirá de uma unidade; se não formarem, aumentará de unidade.

Em qualquer caso, portanto, a permutação primitiva muda de classe.

II. Consideremos, agora, a permutação

Perm. Fun a...bc...de...l

$$a \ldots cb \ldots ed \ldots l \quad (1)$$ Par.

de m elementos e sejam c e d dois elementos não consecutivos, entre os quais existem p outros.

Para mudar a posição relativa dos elementos c e d, podemos fazer c avançar sucessivamente p posições e d retroceder $p+1$ posições.

Forma-se, assim, a permutação

$$a \ldots db \ldots eb \ldots l. \quad (2)$$

c

Na passagem de (1) para (2), efectuaram-se, portanto,

$$p + p + 1 = 2p + 1$$

permutações de dois elementos consecutivos.

E, como o número $2p+1$ é ímpar, segue-se, conforme a demonstração anterior, que a permutação (1) mudou de classe.

110. Corolário. — *As permutações de classe par de* m *elementos são em número igual às de classe ímpar.*

De acordo com o teorema precedente, se, em todas as permutações de m elementos, invertemos dois elementos prefixados, cada permutação de classe par se transforma em permutação de classe ímpar, e vice-versa.

Assim, nas m permutações consideradas há tantas pares quantas ímpares, e o número de umas como o de outras é

$$\frac{m!}{2}.$$

111. Matrizes. — Dá-se a denominação de *matriz* ao quadro constituído pelo conjunto de $m.n$ elementos, dispostos em m linhas horizontais e n linhas verticais.

Designando os elementos considerados por uma mesma letra afectada de dois índices, representa-se a matriz do modo seguinte:

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \ldots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \ldots a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m^1 & a_m^2 & a_m^3 \ldots a_m^n \end{Vmatrix}$$

em que o índice inferior indica a linha horizontal ou *fila* a que pertence o elemento e o superior a respectiva linha vertical ou *coluna*.

Pode-se adoptar também a representação seguinte:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}$$

onde o primeiro índice indica a ordem da fila e o segundo a da coluna do elemento considerado.

Dessas notações, usaremos apenas a primeira.

112. **Matriz quadrada.** — A matriz pode ser *rectangular* ou quadrada, conforme seja $m \neq n$ ou $m = n$. Na matriz quadrada, o número de elementos é n^2, dizendo-se que n é a ordem da matriz.

A matriz quadrada é, pois, um quadro do tipo

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \ldots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \ldots a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 \ldots a_n^n \end{Vmatrix}$$

Na matriz quadrada, os elementos

$$a_1^1, \quad a_2^2, \quad a_3^3, \quad \ldots a_n^n,$$

cada um dos quais tem os índices iguais, chamam-se elementos principais, e o seu conjunto constitui a *diagonal principal* da matriz.

Por outro lado, os elementos

$$a_n^1, \quad a_{n-1}^2, \quad a_{n-2}^3, \quad \ldots a_1^n,$$

nos quais a soma dos índices é $n+1$, formam a *diagonal secundária* da matriz.

Ao produto dos elementos da diagonal principal,

$$a_1^1 \quad a_2^2 \quad a_3^3 \ldots a_n^n,$$

dá-se a denominação de *termo principal*, e ao produto dos elementos da diagonal secundária,

$$a_n^1 \quad a_{n-1}^2 \quad a_{n-2}^3 \ldots a_1^n,$$

a de *termo secundário*.

113. **Determinantes.** — Chama-se *determinante* de uma matriz quadrada a soma algébrica dos produtos que se obtêm efectuando todas as permutações dos índices superiores do

Coluna

linha (fila)

termo principal, fixados os inferiores, e afectando-se os produtos do sinal + ou —, conforme a permutação dos índices superiores seja de classe par ou de classe ímpar em relação à permutação fundamental (n. 110).

Geralmente, representa-se o determinante de uma matriz pela própria matriz. — Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \ldots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \ldots a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \ldots a_3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

Além dessa representação, devida a Jacobi, usam-se, ainda, entre outros, os símbolos

l = fila
c = coluna

$$\Sigma(\pm a_1^1 \quad a_2^2 \ldots a_n^n)$$

s = Coluna
r = fila

$$|a_r^s|, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

$|a_{lc}|, (l, c = 1, 2, \ldots n)$

114. **Observações.** — I. O determinante de uma matriz quadrada também pode ser obtido fixando-se os índices superiores e permutando-se de todos os modos possíveis os índices inferiores do termo principal.

II. O determinante de ordem n tem $n!$ termos.

III. O número de termos positivos do determinante é igual ao de termos negativos.

IV. Cada termo do determinante contém um, e sòmente um, elemento de cada linha ou coluna da matriz.

Por brevidade, deixamos de justificar a primeira observação. Quanto às demais, decorrem imediatamente da definição adoptada no parágrafo 113.

115. **Determinante de segunda ordem.** — Consideremos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

no qual o termo principal, como vimos, é

$$a_1^1 \quad a_2^2.$$

Conservando os índices inferiores e permutando os superiores, formam-se os produtos

$$a_1^1 \quad a_2^2 \quad \text{e} \quad a_1^2 \quad a_2^1.$$

Notando que o primeiro produto é positivo e o segundo negativo, temos, conforme a definição

$$\Delta = a_1^1 \quad a_2^2 - a_1^2 \quad a_2^1.$$

Assim, o determinante de segunda ordem é igual ao termo principal menos o termo secundário.

Consideremos um exemplo numérico.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 5 \times 4.$$

116. Determinante de terceira ordem. — Consideremos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

A+B+C −(D+E+F)

cujo termo principal é

$$a_1^1 \quad a_2^2 \quad a_3^3.$$

Permutando de todos os modos possíveis os índices superiores e tendo em vista os sinais dos produtos formados, segue-se, conforme a definição, que

$$\Delta = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1.$$

O número, antes o termo indica
o número de inversões.

117. Regra de Sarrus. — Na prática, o desenvolvimento do determinante de terceira ordem pode ser feito mediante a regra que damos a seguir, devida a Sarrus.

À direita da terceira coluna, repetem-se as duas primeiras na ordem em que se acham no determinante.

$$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^1 & a_3^2 \end{array}$$

Tomam-se com o respectivo sinal os produtos dos elementos situados na diagonal principal e nas linhas paralelas a essa diagonal, e com o sinal trocado os produtos dos elementos da diagonal secundária e dos situados em linhas paralelas a essa diagonal.

118. EXERCÍCIO.

Calcular o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus, vem

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

de onde resulta

$$\Delta = 2 \times 2 \times 2 + 5 \times 4 \times 5 + 3 \times 3 \times 3 - 5 \times 2 \times 3 - \\ - 3 \times 4 \times 2 - 2 \times 3 \times 5.$$

Efectuando as operações indicadas, encontramos

$$\Delta = 51.$$

14. Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$ R. 136.

15. Calcular o determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 25 & 9 & 16 & 4 \\ 125 & 27 & 64 & 8 \end{vmatrix}$$ R. — 12.

16. Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \\ -4 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (5-3+2-4) & -3 & 2 & -4 \\ (-3+2-4+5) & 2 & -4 & 5 \\ (2-4+5-3) & -4 & 5 & -3 \\ (-4+5-3+2) & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ R. 0.

17. Calcular o produto

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$ R. 14.

18. Calcular o produto

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ R. 630.

19. Justificar a igualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a & b_1 - b \\ a_2 - a & b_2 - b \end{vmatrix}$$

20. Justificar a igualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = -(x-y)(x-z)(y-z).$$

CAPÍTULO IX

APLICAÇÃO DOS DETERMINANTES AOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

139. Preliminares. — Chama-se *equação linear* toda equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

na qual $x_1, x_2, \ldots x_n$ são incógnitas, $a_1, a_2, \ldots a_n$ e b números dados.

Quando $b = 0$, a equação linear diz-se *homogênea*. — Exemplo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

Os valores das incógnitas que transformam uma equação linear em identidade constituem a sua *solução* (1).

Ao conjunto de equações lineares da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

dá-se a denominação de *sistema de equações*.

Apresentam particular interesse ao nosso estudo os sistemas nos quais o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Os valores das incógnitas que transformam *simultâneamente* as equações do sistema em identidades constituem a *solução* do sistema.

Dizemos que um sistema de equações é *possível*, quando admite solução; no caso contrário, o sistema diz-se *impossível*.

Um sistema possível é *determinado* quando tem uma única solução, e *indeterminado* quando tem mais de uma.

Dois sistemas de equações dizem-se *equivalentes* quando admitem a mesma solução.

(1) Vide Curso de Matemática, 1.º ciclo, 4.ª série, cap. II.

140. **Sistemas de n equações com n incógnitas.** — Seja o sistema

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \dots + a_n^n x_n = b_n. \end{cases}$$

Os sistemas desse tipo podem ser resolvidos, no domínio da Álgebra elementar, pelos conhecidos processos de eliminação. Entretanto, quando $n > 3$, a aplicação de tais processos exige longo desenvolvimento de cálculo, tornando-se, por isso mesmo, muito trabalhosa.

Procurando resolver de modo mais simples o problema da eliminação das incógnitas nos sistemas de equações lineares, Leibniz iniciou pesquisas que deram origem à teoria dos determinantes, da qual nos ocupámos no capítulo anterior.

Depois de Leibniz, outros matemáticos, entre os quais se contam Cramer, Bezout, Laplace e Vandermonde, orientaram seus trabalhos nesse campo fértil, dando tão grande desenvolvimento à teoria dos determinantes que lhe permitiu se constituir actualmente em notável algoritmo de ampla aplicação na Análise e na Geometria.

141. **Regra de Cramer.** — Consideremos o sistema de n equações lineares com n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n &= b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \dots + a_n^n x_n &= b_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Designando por Δ o determinante dos coeficientes das incógnitas, vem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^n \\ \dots & \dots\dots\dots \\ a_n^1 & a_n^2 \dots a_n^n \end{vmatrix}$$

Ademais, representando por

$$A_1^r, \quad A_2^r, \quad \dots A_n^r$$

os complementos algébricos dos elementos da coluna r, multipliquemos a primeira equação por A_1^r, a segunda por $A_2^r, \dots$ a última por A_n^r.

Somando, depois, as n equações assim obtidas, vem

$$(a_1^1 A_1^r + a_2^1 A_2^r + \dots + a_n^1 A_n^r)\, x_1 + (a_1^2 A_1^r + a_2^2 A_2^r + \dots + a_n^2 A_n^r)\, x_2 +$$
$$+ \dots + (a_1^r A_1^r + a_2^r A_2^r + \dots + a_n^r A_n^r)\, x_r + \dots$$
$$+ (a_1^n A_1^r + a_2^n A_2^r + \dots + a_n^n A_n^r)\, x_n = b_1 A_1^r + b_2 A_2^r + \dots + b_n A_n^r.$$

Notando que o primeiro membro dessa equação é o determinante Δ segundo os coeficientes de x e bem assim que os coeficientes das demais incógnitas são nulos, podemos escrever

$$\Delta x_r = b_1 A_1^r + b_2 A_2^r + \dots + b_n A_n^r. \qquad (2)$$

Por outro lado, o segundo membro dessa equação é o desenvolvimento pela coluna n do determinante

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots b_1 \dots a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 \dots b_2 \dots a_2^n \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 & a_n^2 \dots b_n \dots a_n^n \end{vmatrix}$$

que se obtém do determinante Δ, substituindo os coeficientes da incógnita x pelos termos independentes que figuram nas equações.

Substituindo em (2), vem

$$\Delta x_r = \Delta_r, \quad (r = 1, 2, \dots n).$$

Podemos, desse modo, formar o sistema

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_1 \\ \Delta x_2 = \Delta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \Delta x_n = \Delta_n \end{cases} \qquad (3)$$

equivalente ao sistema (1), uma vez que toda solução de um sistema de equações lineares satisfaz qualquer equação resultante de combinação linear das equações que o constituem.

Admitindo $\Delta \neq 0$, deduzimos das equações do sistema (3) os seguintes valores:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

solução que satisfaz também as equações do sistema (1).

Tendo em vista esse resultado, podemos enunciar a regra seguinte, devida a Cramer:

Um sistema de n *equações lineares com* n *incógnitas, cujo determinante dos coeficientes das incógnitas não é nulo, tem uma única solução, sendo o valor de cada incógnita dado por uma fracção que tem para denominador esse determinante e para numerador o determinante que do mesmo se deriva, substituindo os coeficientes da incógnita considerada pelos termos independentes que figuram nas equações correspondentes.*

142. EXERCICIO.

Resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 43 \\ 3x + 2y + 4z = 41 \\ 5x + 3y + 2z = 53. \end{cases}$

O determinante dos coeficientes das incógnitas é

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo-o pela regra de Sarrus, encontramos

$$\Delta = 51.$$

Formando os demais determinantes de acordo com a regra, vem

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 43 & 5 & 3 \\ 41 & 2 & 4 \\ 53 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 357; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 43 & 3 \\ 3 & 41 & 4 \\ 5 & 53 & 2 \end{vmatrix} = 204$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 43 \\ 3 & 2 & 41 \\ 5 & 3 & 53 \end{vmatrix} = 153.$$

Obtemos, desse modo, os valores seguintes:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{357}{51} = 7$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{204}{51} = 4$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{153}{51} = 3.$$

143. Determinante principal. — Consideremos um sistema de n equações lineares com m incógnitas:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^m x_m = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^m x_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^m x_m = b_n. \end{cases}$$

Tomando os coeficientes das incógnitas, obtém-se a matriz rectangular

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^m \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots a_n^m \end{Vmatrix} \qquad (A)$$

denominada *matriz incompleta* do sistema.

Por outro lado, acrescentando a essa matriz a coluna formada pelos termos conhecidos, obtemos a *matriz completa* do sistema:

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^m & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^m & b_2 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 \ldots a_n^m & b_n \end{Vmatrix} \qquad (B)$$

Dada a matriz incompleta (A) do sistema, se tomarmos de um modo qualquer p linhas e p colunas, sendo p um número que não supere m e n, formamos uma matriz quadrada ou um determinante, denominado *menor de ordem* p da matriz considerada.

A ordem máxima do determinante ou determinantes diferentes de zero que se podem extrair da matriz A chama-se *característica* dessa matriz.

Assim, a matriz A tem característica p quando dela se pode extrair um menor diferente de zero de ordem p e os menores de ordem superior a p são nulos.

Qualquer determinante diferente de zero de ordem máxima extraído de uma matriz rectangular chama-se *determinante principal* da matriz ou do sistema.

Admitindo que seja p a ordem do determinante principal do sistema

$$\left|\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^m x_m = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^m x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^m x_m = b_n. \end{array}\right.$$

podemos sempre dispor as equações e as incógnitas que nele figuram de modo que os elementos do determinante principal sejam os coeficientes das p primeiras incógnitas nas p primeiras equações.

Designando por D o determinante principal do sistema considerado, temos, então,

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \ldots a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 \ldots a_2^p \\ \ldots & \ldots\ldots \\ a_p^1 & a_p^2 \ldots a_p^p \end{vmatrix}$$

As incógnitas cujos coeficientes formam o determinante principal denominam-se *incógnitas principais* e as equações que contêm esses coeficientes, *equações principais*.

Consideremos um exemplo. — Seja o sistema

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y + 5z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ 4x - 6y + 10z = 4 \\ 2x + 3y + 5z = 12, \end{array}\right.$$

no qual $n = 4$ e $m = 3$.

A matriz incompleta do sistema será, como vimos,

$$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \end{Vmatrix} \qquad (A)$$

Da matriz (A) poderemos deduzir quatro determinantes de terceira ordem, dos quais são, evidentemente, nulos os dois que contêm as duas últimas filas, de vez que estas são constituídas de elementos correspondentes proporcionais (n.º 123).

Dentre os determinantes de terceira ordem que se deduzem da matriz (A), consideremos, apenas, o seguinte:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -6 & 10 \end{vmatrix}$$

formado com as três primeiras filas da matriz (A).

Desenvolvendo-o, vem

$$\Delta' = 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 0 = 0.$$

Como esse determinante também é nulo, segue-se que o determinante principal do sistema será um determinante da segunda ordem não nulo deduzido da matriz.

Dentre esses determinantes de segunda ordem, temos

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Sendo $\Delta'' \neq 0$, segue-se que Δ'' é um determinante principal do sistema proposto.

Ademais, como $p = 2$, as incógnitas principais são x e y e as equações principais são

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y + 5z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8. \end{array}\right.$$

144. Determinantes característicos. — Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^m x_m = b_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^m x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \dots + a_n^m x_m = b_n. \end{cases}$$

de n equações com m incógnitas.

Formando a matriz incompleta, temos

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 \dots a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^m \\ \dots & \dots\dots \\ a_n^1 & a_n^2 \dots a_n^m \end{matrix} \right\|$$

Admitamos que o determinante principal do sistema seja

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^p \\ \dots & \dots\dots \\ a_p^1 & a_p^2 \dots a_p^p \end{vmatrix}$$

em que $p \leqq m,\ n$.

Se colocarmos abaixo da última fila desse determinante os elementos correspondentes de uma das filas da matriz que nele não figuram, e bem assim, à direita da última coluna, os termos conhecidos das equações principais e o da equação correspondente à fila acrescida, formaremos um determinante de ordem $p+1$, denominado *determinante característico*, relativo à equação considerada.

Designando por Δ_s o determinante característico relativo à equação de ordem s, sendo $s > p$, temos, conforme a definição,

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \dots a_1^p & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^p & b_2 \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ a_p^1 & a_p^2 \dots a_p^p & b_p \\ a_s^1 & a_s^2 \dots a_s^p & b_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & b_1 \\ & & b_2 \\ & D & \dots \\ & & b_p \\ a_s^1 & a_s^2 \dots a_s^p & b_s \end{vmatrix}$$

Se fizermos

$$s = p+1, \quad p+2, \dots m,$$

obteremos todos os determinantes característicos relativos às equações que seguem à de ordem p.

145. Teorema de Rouché. — *Para que um sistema de* m *equações lineares com* n *incógnitas admita solução é necessário e suficiente que os seus determinantes característicos sejam todos nulos.*

Preenchida essa condição, se a ordem do determinante principal for igual ao número de incógnitas, o sistema terá uma única solução; se for menor, o sistema será indeterminado.

Voltemos ao sistema de m equações lineares com n incógnitas representando por $E_1, E_2, \dots E_m$ os primeiros membros das equações que o constituem:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n - b_1 = E_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n - b_2 = E_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \dots + a_m^n x_n - b_m = E_m. \end{cases}$$

O sistema toma, então, a forma

$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ \dots\dots \\ E_m = 0. \end{cases}$$

Admitindo que o determinante principal do sistema seja

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 \dots a_1^2 & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 \dots a_2^p \\ \dots & \dots\dots \\ a_p^1 & a_p^2 \dots a_p^p \end{vmatrix}$$

consideremos o determinante de ordem $p+1$:

20. Quantos graus tem o ângulo do fuso correspondente à cunha esférica cujo volume é igual aos 2/5 do volume da esfera? R. 144°.

21. Um segmento esférico de uma base tem 12 cm de altura. Calcular o volume desse segmento, tendo-se em conta que o raio da base mede 8 cm. R. 2 110,080 cm³.

22. Calcular o volume do segmento esférico de 30 cm de altura, sendo 15 cm e 12 cm os raios das bases. R. 31 509,90 cm³.

23. Um segmento esférico de uma base tem 414.480 dm³ de volume e 6 dm de altura. Calcular o raio da base desse segmento. R. 5,65 dm.

24. Calcular o volume do sólido gerado pela revolução completa do triângulo equilátero de 2 dm de lado em torno da paralela a um dos lados, traçada pelo vértice oposto. R. 12,56 dm³.

25. Calcular o volume do sólido gerado pela revolução completa do semi-hexágono regular de 4 m de lado em torno do diâmetro. R. 201,398 448 m³.

26. Calcular o volume da esfera inscrita no cubo de aresta igual a 3,6 dm. R. 24,416 640 dm³.

27. Calcular o volume da esfera inscrita no cubo de área igual a 37,50 m². R. 8,177 083 m³.

28. Calcular o volume do cubo inscrito na esfera de 6 dm de raio. R. 332,544 dm³.

29. Calcular o volume do cubo inscrito na esfera de área igual a ...... 40,694 4 dm³. R. 8,978 688 dm³.

30. Calcular o volume da esfera inscrita no cilindro de 0,45 m de raio e 0,9 m de altura. R. 0,381 510 m³.

31. Calcular o volume do cone circunscrito à esfera de raio igual a 3 dm. R. 254,340 dm³.

32. Estabelecer a relação entre os volumes da esfera e do cone circunscrito.

R. $\frac{4}{9}$.

33. Estabelecer a relação entre os volumes da esfera e do cilindro circunscrito.

R. $\frac{2}{3}$.

34. Calcular o volume da esfera em função da aresta, a, do cubo circunscrito.

R. $V = \frac{\pi a^3}{6}$.

35. Calcular o volume do cubo em função do raio, R, da esfera inscrita. R. $V = 8R^3$.

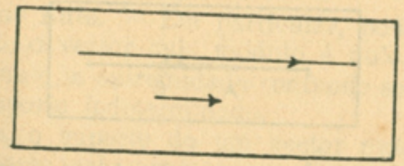
36. Calcular o volume do cubo inscrito na esfera de raio R.

R. $V = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$.

Capítulo XIV

VECTORES

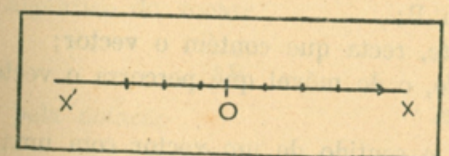
258. Noções preliminares. — Recordemos que, associando a qualquer recta o sentido em que deva ser percorrida por um móvel que nela se desloque, obtemos a *recta orientada.*



O sentido assim fixado chama-se *sentido positivo* e o que lhe é oposto, *sentido negativo.*

O sentido positivo pode ser indicado por uma flecha, colocada sobre a recta, ou por uma flecha paralela à recta, figura acima.

Por outro lado, se marcarmos sobre a recta orientada $x'x$ um ponto arbitrário O e escolhermos a unidade de comprimento, obteremos um *eixo.*



O ponto O, denominado origem, divide o eixo em dois *semi-eixos*, um positivo e outro negativo.

O semi-eixo positivo é aquele que tem a orientação positiva do eixo, e o negativo é o que tem a orientação contrária.

259. Grandezas escalares e vectoriais. — Como vimos no primeiro ciclo deste curso, as grandezas científicas podem ser classificadas em *escalares* e *vectoriais.*

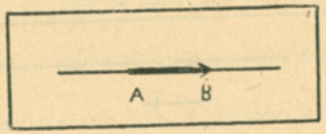
Grandeza escalar é toda grandeza que pode ser definida independentemente do conceito de orientação.

Como exemplo de grandezas escalares, citemos as seguintes: a distância de dois pontos, a massa ou o volume de um corpo, a quantidade de calor de um corpo, etc.

Grandeza vectorial é toda grandeza cuja definição não pode prescindir dos conceitos de direcção e sentido.

O deslocamento rectilíneo de um ponto, a velocidade de um móvel, a aceleração, etc., são grandezas vectoriais.

A cada grandeza escalar associamos um número real e a cada grandeza vectorial um elemento abstracto, denominado *vector*.



260. Noção de vector. — *Vector* é o ente matemático constituído de um número real qualquer, de uma direção e de um sentido.

O vector é representável por um segmento orientado.

No vector AB, o ponto A é chamado origem e o ponto B *extremidade*.

Caracteriza-se o vector AB pelos elementos seguintes:

a) *módulo* ou valor absoluto, número que mede a distância de A a B;

b) *suporte*, recta que contém o vector;

c) *sentido*, o do móvel que percorra o vector da origem à extremidade.

Indica-se o sentido de um vector com uma flecha e representa-se o vector de origem A e extremidade B pela notação

$$\overrightarrow{AB}.$$

261. Classificação. — Do ponto de vista das aplicações, classificam-se os vectores do modo seguinte: vectores livres, vectores localizados em um ponto e vectores deslizantes.

Diz-se que um vector é *livre* quando a sua origem pode ser um ponto qualquer do espaço.

O vector é *localizado em um ponto* quando a sua origem é um ponto fixo do espaço.

Vector deslizante é aquele que pode deslizar sobre o seu suporte. E' também chamado vector localizado em um eixo.

262. Vector unitário. — Dá-se a denominação de *vector unitário* a um vector de módulo igual à unidade.

Vector unitário de um eixo é o vector unitário que tem por suporte esse eixo e cujo sentido é o sentido positivo do eixo.

Evidentemente, o vector unitário de um eixo define o eixo.

263. Vector nulo. — Em particular, pode-se considerar um *vector nulo*, o vector cujo módulo é nulo.

No vector nulo, a extremidade confunde-se com a origem, sendo o seu suporte indeterminado.

Com efeito, o suporte de um vector nulo é uma recta qualquer que passa pelo ponto a que fica reduzido o vector.

Ademais, a noção de sentido deixa de existir no vector nulo.

264. Valor algébrico de um vector. — *Valor algébrico* de um vector deslizante é o número relativo que exprime o módulo do vector, precedido do sinal + quando o sentido do vector é o sentido positivo do eixo, e do sinal — no caso contrário.

O valor algébrico do vector

$$\overrightarrow{AB}$$

representa-se pela notação

$$\overline{AB},$$

e o seu módulo simplesmente por

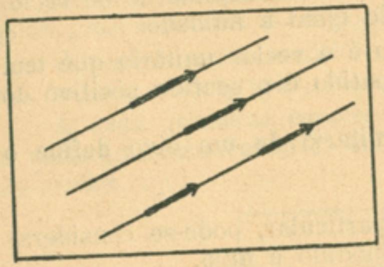
$$AB.$$

265. Vectores colineares e vectores complanares. — Dois vectores livres dizem-se *colineares* quando os seus suportes são paralelos à mesma recta.

Três ou mais vectores livres são *complanares* quando os seus suportes são paralelos ao mesmo plano.

Evidentemente, o vector nulo pode ser considerado paralelo a qualquer outro vector.

266. Vectores equipolentes. — Dois ou mais vectores são *equipolentes* quando têm os seus suportes paralelos ou confundidos, o mesmo sentido e o mesmo módulo.



Para indicar a equipolência de dois vectores, emprega-se o sinal de igualdade:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Estas igualdades recebem a denominação de *equipolências* e estão subordinadas às mesmas leis das igualdades numéricas. Assim:

I. *Todo vector é equipolente a si mesmo.* — Exemplo:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$$

II. *Sendo um vector equipolente a outro, este é equipolente ao primeiro.*

Exemplo: dados os vectores

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

temos

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.$$

III. *Dois vectores equipolentes a um terceiro são equipolentes entre si.*

Exemplo: dados os vectores

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF},$$

temos

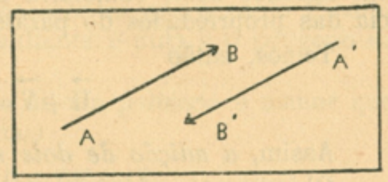
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}.$$

267. Vectores simétricos. — Dois vectores dizem-se *simétricos* ou opostos quando são paralelos, têm módulos iguais e sentidos contrários.

Sendo $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A'B'}$ vectores opostos, temos

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}.$$

Dados dois vectores opostos, dizemos que todo vector equipolente ao primeiro é oposto a todo vector equipolente ao segundo.



Quando os suportes de dois vectores opostos se confundem, caso em que ficam localizados no mesmo eixo, dizemos que os vectores são *directamente opostos*.

Acentuemos, ainda, que dois vectores opostos a um mesmo terceiro são equipolentes.

268. Adição de vectores livres. — I. Consideremos, preliminarmente, o caso da soma de dois vectores livres.

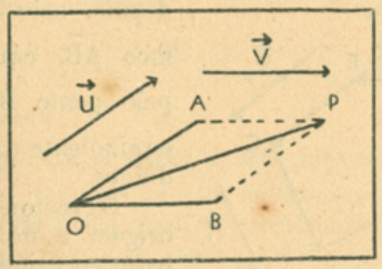
Sejam

$$\vec{U} \text{ e } \vec{V}$$

dois vectores não colineares.

Por um ponto arbitrário do espaço, O, conduzamos o vector $\overrightarrow{OA}$, equipolente a $\vec{U}$, e depois $\overrightarrow{AP}$, equipolente a $\vec{V}$.

O vector $\overrightarrow{OP}$, que tem para origem a do vector $\vec{U}$ e para extremidade a do vector $\vec{V}$, é a *soma geométrica* ou *resultante* dos vectores $\vec{U}$ e $\vec{V}$.



Escrevemos, então,

$$\overrightarrow{OP} = \vec{U} + \vec{V}.$$

Por outro lado, é fácil verificar que a resultante obtida independe da ordem em que se tomam os dois vectores dados.

Com efeito, conduzindo $\overrightarrow{OB}$, equipolente a $\vec{V}$, e depois, pela extremidade desse vector, o vector equipolente a $\vec{U}$, a extremidade deste coincidirá com o ponto P, em consequência das propriedades do paralelogramo.

Temos, então

$$\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}.$$

Assim, *a adição de dois vectores é comutativa.*

Observemos, ademais, que o vector soma obtido é a diagonal do paralelogramo construído com o lados OA e OB.

Além disso, no triângulo OAP, temos, conforme a conhecida propriedade,

$$OP < OA + AP$$

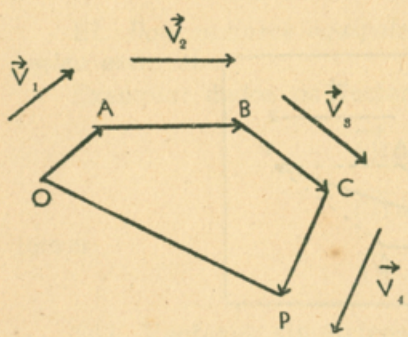
$$OP > OA - AP.$$

Assim, o módulo da resultante de dois vectores não colineares é menor que a soma dos módulos dos vectores dados e maior que a sua diferença.

II. Consideremos, agora, o caso de mais de dois vectores livres: sejam os vectores

$$\vec{V}_1,\ \vec{V}_2,\ \vec{V}_3, \ldots$$

Por um ponto arbitrário do espaço, O, conduzamos o vector $\overrightarrow{OA}$, equipolente a $\vec{V}_1$; depois, pelo ponto A, tracemos $\overrightarrow{AB}$, equipolente a $\vec{V}_2$; pelo ponto B, tracemos $\overrightarrow{BC}$, equipolente a $\vec{V}_3$, e assim por diante.



O vector, que tem como origem a do vector equipolente ao primeiro vector dado e como extremidade a do vector equipolente ao último, é a *resultante* ou *soma geométrica* dos vectores considerados.

Designando por S o vector soma, temos, então

$$\overrightarrow{OP}=\vec{S}=\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3+\ldots$$

O contorno poligonal OABC... P denomina-se *polígono dos vectores.*

Como é fácil imaginar, pode suceder que o ponto P coincida com O, caso em que a resultante é nula e o polígono se diz fechado.

Notando que qualquer lado de um polígono é menor que a soma de todos os outros, temos

$$OP < OA + AB + BC + CP.$$

Assim, o módulo da resultante ou soma geométrica de três ou mais vectores não colineares é menor que a soma dos módulos desses vectores.

269. **Propriedades da adição de vectores.** — I. *A adição de vectores é uma operação unívoca.*

Com efeito, dados vários vectores, só existe um vector que seja a soma desses vectores.

II. *A adição de vectores é uma operação comutativa.*

Consideremos a soma de vectores livres

$$\vec{U}+\vec{V}+\vec{X}+\vec{T}.$$

Como vimos no parágrafo precedente, a adição de dois vectores livres é comutativa.

Assim, permutando, sucessivamente, dois vectores consecutivos, podemos escrever

$$\vec{U}+\vec{V}+\vec{X}+\vec{T}=\vec{U}+\vec{V}+\vec{T}+\vec{X}=\vec{U}+\vec{T}+\vec{V}+\vec{X},$$

e assim por diante.

III. *A adição de vectores é uma operação associativa.*

Com efeito, vejamos que a resultante de três ou mais vectores não se modifica quando substituímos um grupo qualquer de vectores pela sua soma geométrica parcial.

Seja a soma

$$\vec{S}=\vec{U}+\vec{V}+\vec{X}+\vec{T}.$$

OBRAS SERTANISTAS

ERICH FREUNDT
ÍNDIOS DE MATO GROSSO

FRANCISCO DE BARROS JÚNIOR
CAÇANDO E PESCANDO POR TODO O BRASIL — III
CAÇANDO E PESCANDO POR TODO O BRASIL — IV

HÉRCULES FLORENCE
VIAGEM FLUVIAL DO TIETÊ AO AMAZONAS

AMAZONAS DE ARAGÃO
PESCARIAS FLUVIAIS NO BRASIL

HAROLDO CÂNDIDO DE OLIVEIRA
ÍNDIOS E SERTANEJOS DO ARAGUAIA

MÁRIO BALDI
UONI-UONI CONTA SUA HISTÓRIA

MANOEL RODRIGUES FERREIRA
TERRAS E ÍNDIOS DO ALTO XINGU

EDIÇÕES MELHORAMENTOS

N.º 853