

ALGACYR MUNHOZ MAEDER

CURSO

DE

MATEMÁTICA

1.º LIVRO COLEGIAL



EDIÇÕES MELHORAMENTOS

Johnston & Co. Kings

ALGACYR MUNHOZ MAEDER

Lente Catedrático
do Colégio Estadual do Paraná da Faculdade de Engenharia do
Paraná e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Paraná

CURSO
DE
MATEMÁTICA

1.º LIVRO
CICLO COLEGIAL

*De acôrdo com o programa oficial do Ensino Secundário
expedido e pôsto em vigor pela Portaria ministerial n. 170,
de 11 de julho de 1942 (Reforma Capanema).*



*Oferta
das
Edições Melhoramentos*

1 9 4 6

Edições Melhoramentos



PREFÁCIO

Destina-se este livro aos alunos do primeiro ano do ciclo colegial.

Seguindo rigorosamente o programa oficial vigente, reunimos no presente volume toda a matéria que se deve ventilar nos cursos clássico e científico, cujos programas se distinguem apenas em poucos pontos, isto é, no curso científico, são exigidos mais alguns dêles.

A matéria consta de três partes distintas: Aritmética teórica, Álgebra e Geometria dedutiva, as quais, como é mister, são aqui tratadas em partes nitidamente separadas.

Vários assuntos, principalmente no domínio da Aritmética teórica, já expostos sob o ponto de vista intuitivo nos primeiros anos do ciclo anterior, são agora encarados segundo o método dedutivo.

Em casos semelhantes, procuramos estabelecer a indispensável ligação com o que se estudou antes e evitar, sempre que possível, repetições fastidiosas e improdutivas.

Esperamos possa este trabalho atingir o seu objetivo, visando antes colaborar com os colegas que nos honram com a sua adoção, no sentido de facilitar-lhes a tarefa árdua do ensino da Matemática no curso secundário.

ALGACYR MUNHOZ MAEDER

Programa do Ciclo Colegial

1.º livro

ARITMÉTICA TEÓRICA

Unidade I: *A divisibilidade numérica* — 1. Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m. m. c. e do m. d. c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

ALGEBRA

Unidade II: *Os polinômios* — 1. Operações algébricas sobre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Unidade III: *O trinômio do 2.º grau* — 1. Decomposição em fatores do 1.º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2.º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica.

GEOMETRIA

Unidade IV: *O plano e a reta no espaço* — 1. Determinação de um plano. 2. Interseção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Noções sobre ângulos poliédricos.

Unidade V: *Os poliedros* — 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos.

ÍNDICE

ARITMÉTICA TEÓRICA

UNIDADE I

Capítulo I: *Adição de números inteiros*

Definição	9	Prova da adição	13
Propriedades da adição	10	Exercícios	13
Regra prática da adição	12		

Capítulo II: *Subtração de números inteiros*

Definição	15	Prova da subtração	20
Operações diretas e inversas ..	15	Expressões numéricas	20
Propriedades da subtração	16	Complemento aritmético	20
Princípios gerais	17	Exercícios	21
Regra prática da subtração ..	19		

Capítulo III: *Multiplicação de números inteiros*

Definição	24	Produto de uma soma por outra	31
Múltiplos de um número	24	Regra prática da multiplicação	31
Produtos de vários fatores ...	25	Prova da multiplicação	34
Propriedades da multiplicação	25	Exercícios	34

Capítulo IV: *Divisão de números inteiros*

Definição	37	Princípios gerais	41
Condições fundamentais da divisão	37	Regra prática da divisão	43
Divisão exata	38	Prova da divisão	46
Propriedades da divisão exata	39	Exercícios	46

Capítulo V: *Potenciação de números inteiros*

Definições	50	Produto da soma pela diferença de dois números	54
Propriedades	51	Diferença dos quadrados de números consecutivos	55
Quadrado da soma de dois números	53	Cubo da soma de dois números	55
Quadrado da diferença de dois números	53	Exercícios	56

Capítulo VI: *Radiciação de números inteiros*

Definições	59	Extração da raiz cúbica	64
Raiz exata	59	Exercícios	69
Raiz quadrada	60		

Capítulo VII: *Sistemas de numeração*

Objeto da numeração	72	sistema da base b	72
Base de um sistema de numeração	72	Mudança de base	74
Representação dos números num		Operações no sistema de base b	76
		Exercícios	79

Capítulo VIII: *A divisibilidade numérica*

Definição	81	Provas das operações fundamentais	91
Teoremas gerais	81	Exercícios	92
Caracteres de divisibilidade ...	84		
Teoremas sobre restos	90		

Capítulo IX: <i>Máximo divisor comum</i>		
Definições	95	M. D. C. de vários números ... 98
Teorema	96	Teoremas sobre números primos
Algoritmo de Euclides	96	entre si
Teoremas	97	Exercícios
Capítulo X: <i>Mínimo múltiplo comum</i>		
Definições	103	M. m. c. de vários números ... 106
Teoremas	103	Exercícios
Capítulo XI: <i>Números primos</i>		
Números primos	109	número
Teorema de Euclides	109	Composição do máximo divisor
Crivo de Eratóstenes	110	comum
Reconhecimento dos números		Composição do mínimo múlti-
primos	111	plo comum
Decomposição em fatores primos	114	Exercícios
Formação dos divisores de um		
Capítulo XII: <i>Os números fracionários</i>		
Número fracionário	121	Simplificação de frações
Fração própria e fração impró-		Fração irredutível
pria	122	Redução ao mesmo denominador
Comparação de frações	122	Operações sobre frações
Número mixto	123	Número racional
Propriedade fundamental	124	Exercícios
Capítulo XIII: <i>Números decimais</i>		
Fração decimal	141	Conversão de frações ordiná-
Propriedade fundamental	143	rias em decimais
Redução ao mesmo denomi-		Dízimas periódicas
nador	143	Determinação da fração gera-
Comparação de frações decimais	143	triz
Operações sobre frações de-		Teoremas
cimais	144	Exercícios
Quociente aproximado	147	
Capítulo XIV: <i>Noções sobre cálculo numérico aproximado</i>		
Os números irracionais	162	Algarismos decimais exatos ... 165
Cálculo numérico aproximado .	163	Operações abreviadas
Erro absoluto	163	Regra de Oughtred
Erro relativo	164	Exercícios

ALGEBRA

UNIDADE II

Capítulo XV: <i>Os polinômios; operações algébricas sobre polinômios</i>		
Polinômio	181	Operações algébricas sobre poli-
Valor numérico. Termos seme-		nômios
lhantes	181	Quadrado de polinômios
Polinômio ordenado. Polinômio		Cubo de polinômios
completo	183	Exercícios
Polinômio como função	183	

Capítulo XVI: <i>Divisão de polinômios</i>		
Divisão algébrica	194	Propriedades
Prática da operação	194	Polinômios ordenados crescente-
Regra	195	mente
Indicação prática	196	Exercícios
Casos de impossibilidade	200	
Capítulo XVII: <i>Identidade de polinômio</i>		
Polinômio idênticamente nulo .	204	Método dos coeficientes a deter-
Polinômios idênticos	204	minar
Polinômios de mais de uma va-		Identidades clássicas
riável	207	Exercícios
Capítulo XVIII: <i>Divisão por $x + a$</i>		
Divisão por $x + a$	213	Valor numérico
Condição de divisibilidade ...	213	Divisão por $bx - a$
Formação do quociente	214	Decomposição de um polinômio
Regra de Ruffini	215	Divisão de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$
Dispositivo prático de Ruffini	217	Exercícios
Determinação do resto	217	

UNIDADE III

Capítulo XIX: <i>O trinômio do 2.º grau: decomposição em fatores; sinais</i>		
Definição	227	Sinais do trinômio
Raízes do trinômio	227	Resumo
Decomposição do trinômio ...	228	Exercícios
Capítulo XX: <i>Inequações do 2.º grau</i>		
Definição	238	Exercícios
Resolução	238	
Capítulo XXI: <i>Noção de variável e de função</i>		
Preliminares	243	Funções
Variáveis independentes	243	Estudo de algumas funções ..
Capítulo XXII: <i>Variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica</i>		
Preliminares	253	Representação gráfica
Variações do trinômio	253	
Capítulo XXIII: <i>Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos</i>		
Acréscimo de uma função ...	260	Continuidade de uma função ..
Interpretação gráfica	262	Máximos e mínimos
Funções crescentes e funções		Problemas
decrecentes	263	Exercícios

GEOMETRIA

UNIDADE IV

Capítulo XXIV: *O plano e a reta no espaço*

O plano	273	Posições relativas de dois planos	277
Determinação do plano	274	Paralelismo de retas e planos	278
Geração do plano	275	Reta e plano perpendiculares	281
Posições relativas de uma reta e um plano	275	Teorema das três perpendiculares	285
Posições relativas de duas retas	276		

Capítulo XXV: *Diedros. Planos perpendiculares entre si*

Definições	287	Propriedades dos diedros	290
Planos perpendiculares. Diedro reto	288	Planos perpendiculares	291
Ângulo plano de um diedro	289	Projeções	293
Diedros complementares e suplementares	290	Linha de maior declive de um plano	295

Capítulo XXVI: *Ângulos poliédricos*

Definições	297	poliédrico	299
Relações entre as faces de um triedro	298	Igualdade de triedros	301
Soma das faces de um ângulo		Triedros suplementares	303

Capítulo XXVII: *Os poliedros*

Definições	308	Pirâmide	316
Prisma	309	Tronco de pirâmide	316
Paralelepípedo	310	Área lateral da pirâmide regular	319
Área lateral de um prisma	313	Área total da pirâmide regular	320
Área total de um prisma	314	Área lateral do tronco de pirâmide regular	320
Área total de um paralelepípedo retângulo	315	Exercícios	320

Capítulo XXVIII: *Volumes dos poliedros*

Volume de um poliedro	325	quo	330
Medida dos volumes	325	Volume do prisma	331
Volume do paralelepípedo retângulo	328	Exercícios	333
Volume do cubo	329	Volume da pirâmide	337
Volume do paralelepípedo reto	330	Volume do tronco de pirâmide	338
Volume do paralelepípedo obli-		Exercícios	341

UNIDADE V

Capítulo XXIX: *Poliedros regulares*

Teorema de Euler	346	Área do octaedro regular	353
Soma dos ângulos das faces de um poliedro	348	Área do dodecaedro regular	353
Poliedros regulares	349	Área do icosaedro regular	353
Poliedros conjugados	352	Volume do tetraedro regular	354
Área do tetraedro regular	352	Volume do hexaedro regular	355
Área do hexaedro regular	352	Volume do octaedro regular	355
		Exercícios	357

CURSO DE MATEMÁTICA

CAPÍTULO I

ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

1. **Soma de números naturais.** — Consideremos dois conjuntos A e B, sem elementos comuns. Juntando todos os objetos contidos em A e B de modo a formarem um só conjunto S, dizemos que este é a *soma* dos conjuntos dados e que o número que lhe corresponde é a soma dos números correspondentes aos conjuntos A e B⁽¹⁾.

Para indicar que o conjunto S é a soma dos conjuntos A e B, escrevemos

$$S = A + B.$$

Sendo esse conceito aplicável ao caso de mais de dois conjuntos, podemos adotar, para a soma de números naturais, a definição dada a seguir.

2. **Definição.** — *Soma de dois ou mais números naturais é o número que contém tôdas as unidades dos números dados, e somente essas.*

Para indicar que *s* é a soma dos números *a, b, c, ... l*, escreve-se

$$a + b + c + \dots + l = s.$$

Os números *a, b, c, ... l*, denominam-se *parcelas* e *s* *soma*.

A operação mediante a qual se obtém a soma de dois ou mais números chama-se *adição*.

3. **Observação.** — O conceito de soma pode ser estendido ao caso em que, entre os números dados, figure zero, mediante as relações

$$a + 0 = a,$$

$$0 + 0 = 0,$$

(1) As operações aritméticas fundamentais, bem como as indispensáveis noções sobre conjuntos, foram apresentadas praticamente no primeiro ciclo do curso.

as quais nos permitem aplicar as definições enunciadas nos parágrafos anteriores aos números inteiros ⁽¹⁾.

Dizemos, então, que

$$a + b = a,$$

se $b = 0$, e bem assim que

$$a + b = b,$$

se $a = 0$.

Ademais, acentuemos que, de acôrdo com as relações admitidas, a soma de dois números é nula quando êsses números são ambos iguais a zero. — Assim,

$$a + b = 0,$$

quando $a = 0$ e $b = 0$.

4. Conseqüência. — *A soma de dois números inteiros é igual ou maior que qualquer dêles.*

Dada a soma

$$a + b = s,$$

temos, pois,

$$s \geq a \text{ e } s \geq b.$$

5. Propriedades da adição. — Da definição de adição, decorrem as propriedades enunciadas a seguir.

I. *A adição é operação que conduz sempre a um resultado único.*

Por apresentar esta propriedade, a adição diz-se *unívoca*.

Com efeito, reunindo as unidades de dois ou mais números não se podem encontrar resultados diferentes.

De acôrdo com esta propriedade, dados os números

$$a = a',$$

$$b = b',$$

$$c = c',$$

temos

$$a + b + c = a' + b' + c',$$

isto é, somando membro a membro várias igualdades obtém-se outra igualdade.

(1) Números naturais: 1, 2, 3, ... e zero.

II. *A ordem das parcelas não influi na soma.*

Assim, a adição é operação *comutativa*.

Com efeito, se juntarmos aos elementos do conjunto A os elementos do conjunto B, formaremos um novo conjunto S. Evidentemente, êste é o mesmo que se obtém quando juntamos aos elementos de B os elementos de A.

Designando respectivamente por a , b e s os números correspondentes aos conjuntos A, B e S, temos, pois,

$$a + b = b + a.$$

III. *A soma não se altera quando se substituem duas ou mais parcelas pela sua soma.*

Assim, a adição é operação *associativa*.

Com efeito, dados os números a , b e c , somar ao número a o número b e depois o número c é o mesmo que reunir às unidades de a as unidades de $b + c$. — Assim:

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Exemplo:

$$3 + 5 + 7 = 3 + 12.$$

IV. *A soma não se altera quando se substitui qualquer parcela pela soma de duas ou mais das quais a mesma é a soma.*

Por apresentar esta propriedade, diz-se que a adição é operação *dissociativa*.

Com efeito, consideremos a igualdade.

$$a + b + c = a + (b + c).$$

De acôrdo com a conhecida propriedade das igualdades, podemos escrever

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

A soma efetuada $(b + c)$ fica, dêsse modo, substituída pela soma indicada $b + c$. — Exemplo:

$$5 + 12 = 5 + 4 + 8.$$

V. *Somando-se o mesmo número aos membros de uma desigualdade, obtém-se outra desigualdade do mesmo sentido ⁽¹⁾.*

(1) As principais propriedades das desigualdades foram estabelecidas no primeiro ciclo do curso.

Por apresentar esta propriedade, a adição diz-se operação *monotônica*.

Assim, dados os números a e b , sendo

$$a < b,$$

temos

$$a + c < b + c.$$

Exemplo: dados os números

$$5 < 7,$$

temos

$$5 + 3 < 7 + 3.$$

6. Regra prática da adição. — A regra prática da adição, já conhecida do estudante, funda-se nas propriedades estabelecidas no parágrafo precedente.

Consideremos o caso geral, que é o da soma de números de vários algarismos.

Seja efetuar a soma seguinte:

$$728 + 269 + 534.$$

Notando que todo número pode ser considerado como a soma dos valores relativos dos seus algarismos, isto é, como a soma das unidades das diversas ordens nêle contidas, temos

$$728 = 700 + 20 + 8$$

$$269 = 200 + 60 + 9$$

$$534 = 500 + 30 + 4.$$

Se somarmos as parcelas que figuram nos segundos membros dessas igualdades, teremos reunido tôdas as unidades contidas nos números dados, obtendo, dêsse modo, a sua soma.

Por outro lado, como essa soma pode ser efetuada em qualquer ordem, somaremos primeiramente as unidades, depois as dezenas, depois as centenas, etc.

Temos

$$8 \text{ unidades} + 9 \text{ unidades} + 4 \text{ unidades} = 21 \text{ unidades},$$

isto é, duas dezenas e uma unidade.

Somando, agora, as 2 dezenas assim obtidas e as dezenas das parcelas, vem

$$2 \text{ dez.} + 2 \text{ dez.} + 6 \text{ dez.} + 3 \text{ dez.} = 13 \text{ dez.},$$

isto é, uma centena e três dezenas.

Somando a centena assim obtida e as dos números dados, temos

$$1 \text{ cent.} + 7 \text{ cent.} + 2 \text{ cent.} + 5 \text{ cent.} = 15 \text{ cent.},$$

isto é, um milhar e cinco centenas.

Encontramos, dêsse modo, um número formado de 1 milhar, 5 centenas, 3 dezenas e 1 unidade. — Portanto:

$$728 + 269 + 534 = 1531.$$

7. Prova da adição. — *Prova* de uma operação é outra operação que se efetua para verificar a exatidão do resultado obtido na primeira.

Pode-se fazer a prova da adição, alternando-se a ordem das parcelas e efetuando-a novamente. De acôrdo com a *propriedade comutativa*, o segundo resultado deve ser igual ao primeiro.

Outra prova usada na adição é a seguinte: somam-se separadamente as parcelas em grupos, depois somam-se os totais obtidos. De acôrdo com a *propriedade associativa*, o segundo resultado deve ser igual ao primeiro.

Devemos acentuar que, quando nas duas operações, se obtém o mesmo resultado, é *provável* que êste seja a soma procurada; quando os resultados obtidos são diferentes, uma das operações está errada.

8. Observação. — Além das aplicações citadas nos parágrafos anteriores — prática da operação e sua prova — as propriedades da adição aplicam-se ao cálculo mental, permitindo substituir uma soma dada por somas de números cujos resultados se possam obter com maior facilidade ⁽¹⁾.

9. EXERCÍCIOS.

1. Que propriedade justifica a igualdade

$$a + b + c = b + c + a.$$

R. comutativa.

(1) *Curso de Matemática*, 1.ª série, 1.º ciclo, capítulo X.

2. Que propriedade justifica a igualdade

$$5 + 4 + 7 = 9 + 7.$$

R. associativa.

3. Que propriedade justifica a igualdade

$$5 + 10 = 5 + 2 + 4 + 4.$$

R. dissociativa.

4. Que propriedades justificam a igualdade

$$a + 2 + b + 3 + c + 4 = (a + b + c) + 9.$$

R. comutativa e associativa.

5. Que propriedades justificam a igualdade

$$12 + (a + b) = a + b + 4 + 8.$$

R. dissociativa e comutativa.

CAPÍTULO II

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

10. Definição. — *Diferença de dois números inteiros, enunciados em certa ordem, é um terceiro número que, somado ao segundo, dá como resultado o primeiro.*

Assim, designando por a , b e d três números inteiros e sendo

$$d + b = a,$$

diz-se que d é a diferença dos números a e b e escreve-se

$$a - b = d.$$

O primeiro número denomina-se *minuendo* e o segundo *subtraendo*; a operação mediante a qual se obtém a diferença de dois números chama-se *subtração*.

Pode-se também dar à diferença de dois números, a e b , a denominação de *resto* ou de *excesso* de a sobre b .

11. Condições de possibilidade. — Tendo em conta que o minuendo é igual à soma do subtraendo com o resto,

$$a = b + d,$$

para que a subtração seja possível, o minuendo deve ser igual ou maior que o subtraendo.

Assim, dada a diferença

$$a - b = d,$$

deve-se ter

$$a \geq b.$$

12. Operações diretas e inversas. — Designemos por a , b e c três números tais que

$$c = a + b. \quad (1)$$

De acôrdo com a propriedade comutativa da adição, temos

$$c = b + a. \quad (2)$$

Das relações (1) e (2), deduzimos, por definição de diferença,

$$c - a = b,$$

$$c - b = a.$$

Tendo em vista essas igualdades, pode-se dizer que a subtração consiste em, dada a soma de dois números e um deles, determinar o outro.

Como vimos, na adição de dois números dados, deduz-se diretamente outro, chamado *resultado*; na subtração, conhecido o resultado da adição e um dos dados, deduz-se o outro dado.

Dizemos, então, que a adição é *operação direta* e que a subtração é *operação inversa* da adição, ou simplesmente, que adição e subtração são *operações inversas*.

13. Propriedades da subtração. — I. *A subtração é operação que conduz sempre a um resultado único.*

Assim, a subtração é operação *unívoca*.

Com efeito, a subtração

$$a - b$$

não pode produzir resultados diferentes, por isso que, de acôrdo com a propriedade unívoca da adição, só há um número que, somado a b , dá como resultado o número a .

Esta propriedade pode ser também enunciada assim: dados os números

$$a = a',$$

$$b = b',$$

temos

$$a - b = a' - b',$$

isto é, subtraindo membro a membro duas igualdades, obtém-se outra igualdade.

II. *Subtraindo o mesmo número dos membros de uma desigualdade, obtém-se outra desigualdade do mesmo sentido.*

Esta é a propriedade *monotônica* da subtração.

Assim, dada a desigualdade

$$a < b,$$

dizemos que

$$a - c < b - c.$$

Com efeito, admitindo que

$$a - c \geq b - c,$$

teríamos, somando c a ambos os membros desta desigualdade, pela propriedade monotônica da adição,

$$a \geq b,$$

o que é contrário à hipótese. — Portanto:

$$a - c < b - c.$$

Exemplo: dada a desigualdade

$$10 < 12,$$

temos

$$10 - 4 < 12 - 4,$$

$$6 < 8.$$

14. Princípios gerais. — I. *A diferença de dois números não se altera somando-se ou subtraindo-se o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo.*

Seja a diferença

$$a - b = c.$$

Por definição, temos

$$c + b = a.$$

Somando aos membros desta igualdade o número d , vem

$$c + b + d = a + d,$$

ou, conforme a propriedade associativa da adição,

$$c + (b + d) = a + d.$$

Indicando esta igualdade que o número c , somado com $(b + d)$, dá como resultado $(a + d)$, segue-se que c é a diferença dos números $(a + d)$ e $(b + d)$. — Logo:

$$(a + d) - (b + d) = c.$$

De modo análogo, demonstra-se a segunda parte da proposição.

Exemplos:

$$15 - 7 = (15 + 3) - (7 + 3) = 8,$$

$$12 - 8 = (12 - 5) - (8 - 5) = 4.$$

II. Para somar um número à diferença indicada de dois outros, basta somá-lo ao minuendo e do resultado subtrair o subtraendo.

Assim, dizemos que

$$(a - b) + c = (a + c) - b.$$

Com efeito, seja a diferença

$$a - b = d.$$

De acôrdo com a definição, temos

$$d + b = a.$$

Somando o número c aos membros desta igualdade, vem

$$(d + b) + c = a + c,$$

ou, tendo em vista as propriedades da adição,

$$(c + d) + b = a + c.$$

Notando que $(c + d)$, somado a b , dá como resultado $(a + c)$, segue-se que $(c + d)$ é a diferença de $(a + c)$ e b :

$$a + c - b = c + d.$$

Substituindo d por $a - b$, vem

$$a + c - b = c + a - b,$$

$$(a - b) + c = (a + c) - b.$$

Exemplo:

$$(9 - 5) + 4 = (9 + 4) - 5 = 8.$$

III. Para subtrair de um número uma soma indicada, subtraem-se dêsse número sucessivamente as parcelas da soma.

Assim, dizemos que

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Fazendo

$$a - (b + c) = s,$$

temos, de acôrdo com a definição de diferença

$$s + (b + c) = a,$$

ou, tendo em vista as propriedades da adição,

$$(s + c) + b = a,$$

ou, ainda, por definição de diferença,

$$s + c = a - b,$$

$$s = a - b - c.$$

Portanto:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Exemplo:

$$15 - (3 + 4) = 15 - 3 - 4 = 8.$$

IV. Para subtrair de um número uma diferença indicada, soma-se êsse número ao subtraendo e do resultado subtrai-se o minuendo.

Assim, dizemos que

$$a - (b - c) = (a + c) - b.$$

Façamos

$$a - (b - c) = s.$$

Somando c aos dois têrmos do primeiro membro, com o que essa relação não se altera, vem

$$a + c - (b - c + c) = s,$$

$$a + c - b = s.$$

Portanto:

$$a - (b - c) = a + c - b.$$

Exemplo:

$$16 - (7 - 5) = 16 + 5 - 7 = 14.$$

15. **Regra prática da subtração.** — A regra prática da subtração funda-se nas propriedades estabelecidas nos parágrafos anteriores.

Seja efetuar a subtração seguinte:

$$865 - 523.$$

Notemos que o minuendo é formado de 8 centenas, 6 dezenas e 5 unidades, e o subtraendo de 5 centenas, 2 dezenas e 3 unidades.

Subtraindo as unidades de cada ordem do subtraendo das unidades de mesma ordem do minuendo, vem

5 unidades — 3 unidades = 2 unidades
 6 dezenas — 2 dezenas = 4 dezenas
 8 centenas — 5 centenas = 3 centenas.

Obtemos, dêsse modo, a diferença

$$865 - 523 = 342.$$

Se alguma dessas subtrações não fôr possível, acrescentam-se ao algarismo do minuendo dez de suas unidades e ao subtraendo uma unidade de ordem imediatamente superior, com o que a diferença não se altera, pois a unidade somada ao subtraendo equivale às dez somadas ao minuendo.

16. Prova da subtração. — Pode-se fazer a prova da subtração, somando o resto ao subtraendo; conforme a definição, o resultado assim obtido deve ser igual ao minuendo.

Outra prova usada na subtração consiste em subtrair o resto do minuendo e verificar se essa diferença é igual ao subtraendo (n.º 12).

17. Expressões numéricas. — Consideremos a expressão

$$S = a - b - c + d,$$

denominando termos *aditivos* os precedidos do sinal + e *subtrativos* os precedidos do sinal —.

De acôrdo com os princípios estabelecidos, podemos escrever

$$a - b - c + d = a - (b + c) + d = (a + d) - (b + c).$$

Portanto:
$$S = (a + d) - (b + c).$$

O valor de uma expressão numérica é igual à diferença entre a soma dos seus termos aditivos e a soma dos seus termos subtrativos.

18. Complemento aritmético. — Dá-se a denominação de *complemento aritmético* de um número à diferença entre a unidade decimal que lhe é imediatamente superior e o próprio número.

Assim, o complemento aritmético de

$$3528 \text{ é } 6472,$$

por isso que

$$10\ 000 - 3\ 528 = 6\ 472.$$

Estabeleçamos a regra prática para a obtenção do complemento aritmético de um número qualquer. — Seja, por exemplo, o número

$$5\ 432.$$

Conforme a definição, temos

$$c = 10\ 000 - 5\ 432.$$

Mas, fazendo

$$10\ 000 = 9\ 990 + 10,$$

podemos escrever

$$c = 9\ 990 + 10 - 5\ 432,$$

expressão que equivale às seguintes:

$$\begin{aligned} 9\ 990 + 10 - 5\ 432 &= (9\ 990 + 10) - (5\ 430 + 2) = \\ &= 9\ 990 + 10 - 5\ 430 - 2 = (9\ 990 - 5\ 430) + (10 - 2) = \\ &= 4\ 560 + 8 = 4\ 568. \end{aligned}$$

Portanto

$$c = 4\ 568.$$

Assim, para obter o complemento aritmético de um número, subtrai-se de 9 cada algarismo do número dado, exceto o último significativo à direita, que se subtrai de 10, conservando-se os zeros finais.

19. Exercícios resolvidos. — 1.º *Que alteração sofre a diferença de dois números quando se somam m unidades ao maior e se subtraem n unidades do menor?*

Consideremos os números

$$a > b,$$

cujas diferenças é

$$a - b.$$

Indicando as operações expressas no enunciado, os números que figuram na nova subtração representam-se do modo seguinte:

$$a + m,$$

$$b - n,$$

e a diferença entre ambos assim:

$$(a + m) - (b - n).$$

Aplicando os princípios conhecidos, podemos escrever

$$(a + m) - (b - n) = a + m - b + n = (a - b) + (m + n).$$

A diferença dos números dados aumenta, portanto, de

$$(m + n).$$

2.º *A soma dos três números que figuram em uma subtração é 58. Achar o minuendo.*

Designando respectivamente por m , s e r o minuendo, o subtraendo e o resto, temos

$$m + s + r = 58.$$

Mas, pela definição de diferença, sabemos que

$$m = s + r.$$

Em vista desta relação, a igualdade precedente equivale às seguintes:

$$m + m = 58,$$

$$2m = 58.$$

Assim, a soma dos três números que figuram na subtração é igual ao dôbro do minuendo. — Logo:

$$m = 29.$$

3.º *Que resultado se obtém juntando a diferença de dois números à sua soma, e subtraindo a diferença dos mesmos números de sua soma?*

Sejam

$$a > b$$

os números dados.

Indicando as operações expressas no enunciado, vem

$$(a - b) + (a + b),$$

$$(a + b) - (a - b).$$

No primeiro caso, temos

$$(a - b) + (a + b) = a - b + a + b = 2a.$$

No segundo caso, temos

$$(a + b) - (a - b) = a + b - a + b = 2b.$$

Assim, juntando a diferença de dois números à sua soma, obtém-se o dôbro do maior; subtraindo a diferença de dois números de sua soma, obtém-se o dôbro do menor.

20. Exercícios propostos.

1. Qual a alteração da soma de dois números quando se substituem êsses números pelos seus consecutivos? R. aumenta de 2.

2. Que alteração sofre a diferença de dois números quando se somam 5 unidades ao maior e 2 unidades ao menor? R. aumenta de 3.
3. Qual a alteração da diferença de dois números quando se subtraem 7 unidades do minuendo e 3 do subtraendo? R. diminui de 4.
4. Que alteração sofre a diferença de dois números quando se somam 3 unidades ao maior e se subtraem 2 unidades do menor? R. aumenta de 5.
5. Qual a alteração da diferença de dois números quando se subtraem 5 unidades do minuendo e se somam 7 unidades ao subtraendo? R. diminui de 12.
6. A soma dos três números que figuram em uma subtração é 90. Achar o minuendo. R. 45.
7. A soma dos três números que figuram em uma subtração é 150 e o resto é 35. Achar o subtraendo. R. 40.
8. Achar os três números que figuram em uma subtração, sabendo-se que a sua soma é 160 e que o resto excede o subtraendo de 10. R. 80, 35 e 45.
9. A soma dos três números que figuram em uma subtração é 168. Achar o resto, sabendo-se que o mesmo é igual ao subtraendo. R. 42.
10. Dados os números $a < b < c < \dots < l$, achar a soma das diferenças que se obtêm subtraindo cada número do que se lhe segue imediatamente. R. $s = l - a$.

682
08 30
0



COM 340 PÁGINAS - ILUSTRADO - Cr\$ 40,00

N.º 820

PREÇO: Cr\$ 30,00