F. A. LACAZ NETTO

TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES

3.a EDIÇÃO

1954

SÃO PAULO

F. A. LACAZ NETTO
Prof. Associado do Instituto Tecnicológico
de Aeronáutica

TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES

3.a EDIÇÃO

1954

SÃO PAULO

PREFÁCIO

No Brasil, atualmente, uma das falhas do ensino nos Colégios e Escolas Superiores, é a falta de compêndios onde o aluno encontre a matéria exigida nos programas oficiais.

A meu ver, êsse mal seria sanado, se todo professor publicasse suas lições, em forma de apostilas ou livros, ampliados de publicação em publicação.

De acôrdo com êsse meu ponto de vista, publico hoje a Teoria Elementar dos Determinantes, onde os alunos dos nossos colégios encontrarão a matéria que até agora lhes tem sido exigida, dessa importante e belíssima teoria, com fecundas aplicações em outros ramos da Matemática.

É êste livro um trabalho despretensioso, livro para estudantes, e por isso muito simples, com inúmeros e variados exercícios, que constituem seu último capítulo. Caso seja bem recebido, em nova edição acrescentar-lhe-ei outros capítulos sôbre determinantes funcionais e suas aplicações, bem como sôbre determinantes infinitos e cúbicos.

A parte relativa a formas e equações lineares - uma das mais importantes e também das mais fáceis aplicações da teoria dos determinantes, será objeto de outro livro que pretendo publicar. O motivo que me obrigou a não incluir, neste volume, um capítulo sôbre formas e equações lineares, foi a necessidade de apressar, por várias razões, a publicação dêste livro, que talvés preste algum auxílio aos nossos estudantes, dos quais ùltimamente tanto se tem exigido, sem lhes dar os meios necessários.

F.A.LACAZ NETTO.

São Paulo, Fevereiro de 1 943.

PREFÁCIO DA 2ª EDIÇÃO

Graças ao interesse do Prof. Wilson de Campos, publicamos pela segunda vez, êste nosso trabalho - Teoria Elementar dos Determinantes.

Como não esperávamos mais editá-lo, não escrevemos os capítulos sôbre determinantes cúbicos e determinantes de funções que, de acôrdo com nossa vontade, manifestada na primeira edição da obra, desejávamos acrescentar ao trabalho, em outra possível publicação dêle. Assim, a presente edição ainda se compõe dos mesmos capítulos da edição anterior, todos êles apenas corrigidos, salvo o VIII, sôbre a Regra de Cramer, em que a matéria, além de corrigida, foi levemente modificada, com pequeno acréscimo sôbre o princípio da identidade.

Terminamos êste prefácio com dois agradecimentos: o primeiro agradecimento, ao colega Wilson de Campos, a cujo interesse e trabalho devemos a presente publicação; o segundo, aos Srs. Lauro Modesto dos Santos e Roberto Cornibert, alunos da Escola Politécnica de São Paulo, cada um dos quais nos forneceu, de sua autoria, errata da Teoria Elementar dos Determinantes, facilitando-nos sobremaneira a correção do livro, para a edição que ora fazemos.

F.A.LACAZ NETTO

São José dos Campos, Outubro de 1 950.

PREFÁCIO DA 3ª EDIÇÃO

Mais uma vez publicamos Teoria Elementar dos Determinantes. Ainda nesta edição, não lhe acrescentámos os capítulos sôbre Determinantes Cúbicos, Determinantes Infinitos e Determinantes Funcionais, prometidos na primeira edição.

Desde o meado do ano, êsses capítulo estão escritos e revistos, mas por terem ficado longos demais, julgamos que não seria conveniente acrescentá-los à Teoria Elementar dos Determinantes.

No caso de reescrevermos êsse livro, usando outra notação, talvés incluamos aqueles capítulos, na obra refundida; êles poderão ainda aparecer em um compêndio que estamos escrevendo, sôbre matrizes.

Ao terminarmos o prefácio, mais uma vez agradecemos ao Prof. Wilson de Campos, o interêsse que tem demonstrado pela publicação de nossos trabalhos didáticos.

F.A.LACAZ NETTO.

São José dos Campos, Outubro de 1 953.

Capítulo Primeiro

RESUMO HISTÓRICO

A teoria dos determinantes aparece quase contemporâneamente, nos fins do século XVII, com LEIBNIZ, na Alemanha, e KOWA, no Japão.

Ambos imaginaram a teoria dos determinantes, no estudo de um problema de eliminação; LEIBNIZ, procurando eliminar as incógnitas de um sistema linear de n+1 equações com n incógnitas; KOWA, procurando eliminar uma incógnita num sistema de n+1 equações de grau n.

A teoria foi depois reinventada por CRAMER, em 1.750, e empregada de maneira mais ou menos inconsciente, segundo MANSION, por BEZOUT, WANDERMONDE, LAPLACE, LAGRANGE, GAUSS e WRONSKI.

LAPLACE chamava de resultante, o que chamamos agora de determinante; esta palavra é devida a GAUSS, que entretanto, não a usou no sentido que lhe emprestamos hoje, e sim no de discriminante. Foi CAUCHY que usou este vocábulo no sentido atual. Foi também com LOUIS AUGUSTIN CAUCHY que, em 1 812, esta doutrina tornou-se um ramo distinto da Álgebra; a partir dessa época, foi, então, usada de maneira fecunda por JACOBI, CAYLEY, SILVESTER, HERMITE, CLEBSCH, GORDON e outros.

*

Capítulo Segundo

MATRIZ QUADRADA E DETERMINANTE: GENERALIDADES E DEFINIÇÃO. REGRA DE SARRUS OU DO OTÓGONO ESTRELADO.

1 - Matriz quadrada. Dados n^2 números $(n > 1)$, dispostos ordenadamente em n linhas (horizontais) e n colunas (verticais), todos dentro de 2 barras duplas, chamamos a esse quadro, matriz quadrada de ordem n.

Um número de u'a matriz quadrada tem o nome de elemento da matriz.

Geralmente todos os elementos de u'a matriz são representados por u'a mesma letra, afetada de 2 índices: a_{rs}, por exemplo. O primeiro índice denota a ordem da linha a que pertence o elemento, e o segundo, a ordem da coluna.

U'a matriz quadrada de ordem n é, portanto, um quadro da forma:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

A matriz quadrada de ordem n, cujos elementos são representados pela letra a (afetada de 2 índices) é também representada pelo símbolo

$$\begin{Vmatrix} a_{rs} \end{Vmatrix} \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \ldots n \\ s = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

2 - A u'a matriz quadrada, associa-se, por definição, um número que se chama o determinante da matriz. Para simplificar a definição dêsse número, associado a u'a matriz quadrada, vejamos antes algumas definições preliminares.

3 - Produto deduzido de u'a matriz quadrada. Um produto de n fatores, onde figure sempre, como fator, um elemento de cada linha e coluna, de u'a matriz quadrada de ordem n, recebe o nome de produto deduzido dessa matriz.

Resulta da definição, que num produto deduzido de u'a matriz de ordem n, figura sempre um elemento e um só, de cada linha e coluna.

4 - Um produto deduzido de u'a matriz

$$\begin{Vmatrix} a_{rs} \end{Vmatrix} \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \ldots n \\ s = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

é, portanto, uma expressão da forma

$$a_{r_1 s_1} \; a_{r_2 s_2} \; \ldots \; a_{r_n s_n}$$

onde

$$r_1 \; r_2 \; \ldots \; r_n$$

$$s_1 \; s_2 \; \ldots \; s_n$$

representam duas permutações quaisquer dos números

$$1, 2, \ldots n$$

Como a ordem dos fatôres é arbitrária, podemos trocar a ordem dêles num produto deduzido, de maneira que:

a) ou os primeiros índices,
b) ou os segundos índices,

formem a permutação principal

$$1,\ 2,\ \dots\ n$$

Um produto deduzido de u'a matriz quadrada

$$\left\| a_{rs} \right\| \quad \begin{matrix} r = 1,\ 2,\ \dots\ n \\ s = 1,\ 2,\ \dots\ n \end{matrix}$$

poderá, portanto, ter a forma

$$a_{1s_1}\ a_{2s_2}\ \dots\ a_{ns_n}$$

ou

$$a_{r_1 1}\ a_{r_2 2}\ \dots\ a_{r_n n}$$

onde

$$s_1\ s_2 \dots s_n \quad e \quad r_1\ r_2 \dots\ r_n$$

ainda representam duas permutações dos números

$$1,\ 2,\ \dots\ n$$

5 - Produtos deduzidos distintos. Dois produtos deduzidos de u'a matriz quadrada dizem-se distintos, quando pelo menos os elementos de uma certa linha (ou coluna) que figurarem nesses produtos, pertencerem a colunas (ou linhas) diferentes.

Escólio. Colocados os fatôres de maneira que os primeiros (segundos) índices formem sempre a mesma permutação (principal), teremos produtos distintos, quando os segundos (primeiros) índices formarem permutações diferentes.

6 - Teorema. O número de produtos distintos de u'a matriz quadrada de ordem n, é n!.

Imediato, com a observação anterior.

7 - Termos deduzido de u'a matriz quadrada. Chamamos termo deduzido de u'a matriz quadrada, a um produto dessa matriz, multiplicando por uma potência de -1, cujo expoente seja a soma dos números que indiquem as inversões das permutações dos primeiros e segundos índices.

Um termo deduzido de u'a matriz quadrada

$$\left\| a_{rs} \right\| \quad \begin{matrix} r = 1,\ 2,\ \dots\ n \\ s = 1,\ 2,\ \dots\ n \end{matrix}$$

é, portanto, uma expressão do tipo

$$(-1)^{\epsilon + \sigma}\ a_{r_1 s_1}\ a_{r_2 s_2}\ \dots\ a_{r_n s_n}$$

ou

$$(-1)^{\sigma}\ a_{1s_1}\ a_{2s_2}\ \dots\ a_{ns_n}$$

ou ainda

$$(-1)^{\epsilon}\ a_{r_1 1}\ a_{r_2 2}\ \dots\ a_{r_n n}$$

onde ϵ e σ denotam respectivamente o número de inversões das permutações

$$r_1\ r_2 \dots\ r_n \quad e \quad s_1\ s_2 \dots\ s_n$$

em relação à permutação

$$1,\ 2,\ \dots\ n$$

tomada como principal.

8 - Entre os têrmos e produtos deduzidos de u'a matriz quadrada podemos estabelecer uma correspondência biunívoca, considerando-se correspondentes um produto e o têrmo que se forma dêle.

Resulta dessa definição, que um têrmo deduzido ou se confunde com o produto deduzido correspondente, ou é igual a êle, com o sinal trocado, segundo as permutações dos primeiros e segundos índices sejam afins ou não afins.

No caso das permutações serem afins

$$\varrho + \sigma \equiv 0 \ldots 2$$

e o têrmo confunde-se com o produto correspondente; no caso contrário,

$$\varrho + \sigma \not\equiv 0 \ldots 2$$

e o têrmo é igual ao produto correspondente com o sinal trocado.

9 - Convém observar que trocando-se a ordem de 2 fatôres, num têrmo deduzido, o sinal do têrmo não se altera, pois, a troca implica u'a mudança de classe não só na permutação dos primeiros índices, como na dos segundos, e a soma $\varrho + \sigma$ permanece com a mesma paridade.

Por esse motivo, podemos escrever os fatores num têrmo deduzido, de maneira que os primeiros índices, ou os segundos, formem a permutação principal.

10 - Têrmos deduzidos distintos. Dois têrmos deduzidos de u'a matriz quadrada dizem-se distintos, quando os produtos correspondentes forem distintos.

11 - Teorema. O número de têrmos deduzidos distintos de u'a matriz de ordem n, é n!.

Consequência do teorema do nº 6.

12 - Definição de determinante. Chamamos determinante de u'a matriz quadrada, a soma de todos os têrmos deduzidos distintos dessa matriz.

O determinante associado a u'a matriz de ordem n, também chamaremos determinante de ordem n.

Observação: usaremos indiferentemente as palavras matriz e determinante, quando o emprêgo não provocar confusão.

13 - Produtos principal e secundário. Dada a matriz

$$\left\| a_{rs} \right\| \quad \begin{matrix} r = 1, 2, \ldots n \\ s = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

ao produto

$$a_{11} \; a_{22} \; \cdots \; a_{nn}$$

cujos fatôres têm os índices iguais, chamamos principal; ao produto

$$a_{1n} \; a_{2,n-1} \; \cdots \; a_{n1}$$

cuja soma dos índices nos fatôres é igual a n + 1, chamamos secundário.

Os têrmos correspondentes aos produtos principal e secundário, chamam-se também têrmos principal e secundário.

14 - Com as considerações anteriores, podemos dizer que um determinante de u'a matriz quadrada é a soma dos produtos que se obtém do produto principal:

1) conservando-se os primeiros índices (os segundos índices),

2) permutando-se os segundos (os primeiros),

êste determinante e invertendo-se a ordem dos membros na igualdade anterior, temos

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1r}\cdots a_{1s}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2r}\cdots a_{2s}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nr}\cdots a_{ns}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots \overset{\overset{r}{\downarrow}}{(a_{1r}+ka_{1s})}\cdots a_{1s}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots (a_{2r}+ka_{2s})\cdots a_{2s}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots (a_{nr}+ka_{ns})\cdots a_{ns}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Como já observamos, demonstrado o teorema para êsse caso particular, segue imediatamente o teorema generalizado.

Nota: O teorema de Jacobi é importantíssimo no cálculo de determinantes. Por meio dele, consegue-se reduzir a zero todos os elementos de uma fila, menos um, e assim abaixar a ordem de um determinante, aplicando-se os teoremas do nº 33 ou 34, que serviram de base à demonstração do teorema de Laplace.

*

Capítulo Sétimo

DETERMINANTES PARTICULARES: DETERMINANTES COM ELEMENTOS NULOS E DETERMINANTE DE CAUCHY OU VANDERMONDE

40 - Teorema. Se nume determinante, os elementos de um lado da diagonal principal forem nulos, o determinante reduz-se ao têrmo principal.

Seja o determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vamos provar que

$$A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

Aplicando-se o teorema do nº 33 temos

$$A = a_{11}\, A_1$$

sendo

$$A_1 = A_{11}$$

Aplicando-se ainda o teorema do nº 33 ao determinante A_1, temos

$$A_1 = a_{22} A_2$$

sendo A_2 o adjunto de a_{22} em $A_1 = A_{11}$.

Aplicando-se, portanto, sucessivamente o teorema do nº 33, temos

$$A = a_{11} A_1$$
$$A_1 = a_{22} A_2$$
$$A_2 = a_{33} A_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n-2} = a_{n-1,n-1} A_{n-1}$$
$$A_{n-1} = a_{nn}$$

Multiplicando-se membro a membro essas igualdades, e simplificando-se o resultado, concluimos que

$$A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}, \qquad \text{q.e.d.}$$

41 - Teorema. Se num determinante de ordem n, os elementos de um lado da diagonal secundária forem nulos, o determinante reduz-se ao têrmo secundário, i.é., ao produto secundário, multiplicado por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Seja o determinante

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vamos provar que

$$A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

Com efeito, aplicando-se o teorema de nº 34, temos

$$A = (-1)^{(n+1)} a_{1n} A_1$$

sendo

$$A_1 = \alpha_{1n}$$

Aplicando-se novamente o teorema do nº 34, ao determinante $A_1 = \alpha_{1n}$, temos

$$A_1 = (-1)^{1+(n-1)} a_{2,n-1} A_2$$

onde A_2 representa o menor complementar de $a_{2,n-1}$ em $A_1 = \alpha_{1n}$.

Aplicando-se, portanto, sucessivamente o teorema do nº 34, temos

$$A = (-1)^{n+1} a_{1n} A_1$$

$$A_1 = (-1)^{n} a_{2,n-1} A_2$$

$$A_2 = (-1)^{n-1} a_{3,n-2} A_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_{n-3} = (-1)^4 a_{n-2,3} A_{n-2}$$

$$A_{n-2} = (-1)^3 a_{n-1,2} a_{n1}$$

Multiplicando-se membro a membro as igualdades anteriores, e simplificando-se o resultado, concluímos que

$$A = (-1)^{3+4+\dots+(n+1)} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$$

O teorema, portanto, ficará demonstrado se provarmos que

$$3 + 4 + \dots + (n+1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \dots 2$$

Ora

$$3+4+\dots+(n+1) = \frac{(n+4)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)+4(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2-n}{2} + \frac{4(n-1)}{2}$$

Sendo $\frac{4(n-1)}{2}$ um número par

$$3 + 4 + \dots + (n+1) \equiv \frac{n^2-n}{2} \equiv \frac{n(n-1)}{2} \dots 2$$

Logo

$$A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{1n}, \quad \text{q.e.d.}$$

42 - <u>Determinante de Cauchy, de Vandermonde ou de potências</u>. Chamamos determinante de Cauchy, de Vandermonde ou de potências, a um determinante (de ordem n, cuja primeira linha (coluna) é constituída de unidades, a segunda linha (coluna), de números quaisquer, a terceira, dos quadrados dêsses números ... a última das suas potências de ordem (n-1).

Um determinante de Vandermonde é, pois, um determinante da forma

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Os elementos da segunda fila (linha ou coluna) paralela à fila de unidades, caracterizam um determinante de Cauchy, que é indicado com o símbolo

$$V\,(a_1, a_2, \dots a_n)$$

Os elementos $a_1, a_2, \dots a_n$ de um determinante de Vandermonde, chamaremos <u>elementos característicos do</u> determinante.

43 - <u>Teorema</u>. Um determinante de Vandermonde é igual ao produto de tôdas as diferenças possíveis entre seus elementos característicos, com a condição do primeiro índice ser maior do que o segundo.

O produto da proposição anterior é indicado com o símbolo

$$\prod_{r>s}(a_r-a_s)$$

e, portanto,

$$V(a_1, a_2, \ldots a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{r>s}(a_r-a_s)$$

Para demonstrar êste teorema, demonstraremos primeiro a relação de recorrência

$$V(a_1,a_2,\ldots a_n)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1).V(a_2,a_3,\ldots a_n) \quad (1)$$

Com efeito, dado o determinante

$$V(a_1, a_2, \ldots a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

de uma coluna qualquer (a partir da última) tiremos o antecedente multiplicada por a_1, o que não altera seu valor (teorema de Jacobi)

$$V(a_1,a_2,\ldots a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2^2-a_2a_1 & a_2^3-a_2^2a_1 & \ldots & a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_1 \\ 1 & a_3-a_1 & a_3^2-a_3a_1 & a_3^3-a_3^2a_1 & \ldots & a_3^{n-1}-a_3^{n-2}a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n-a_1 & a_n^2-a_na_1 & a_n^3-a_n^2a_1 & \ldots & a_n^{n-1}-a_n^{n-2}a_1 \end{vmatrix}$$

Daí temos

$$V(a_1,a_2,\ldots a_n)=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2^2-a_2a_1 & a_2^3-a_2^2a_1 & \ldots & a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_1 \\ a_3-a_1 & a_3^2-a_3a_1 & a_3^3-a_3^2a_1 & \ldots & a_3^{n-1}-a_3^{n-2}a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-a_1 & a_n^2-a_na_1 & a_n^3-a_n^2a_1 & \ldots & a_n^{n-1}-a_n^{n-2}a_1 \end{vmatrix}$$

Fatorando-se os elementos do último determinante, temos ainda

$$V(a_1,a_2,\ldots a_n)=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & a_2^2(a_2-a_1) & \ldots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & a_3^2(a_3-a_1) & \ldots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & a_n^2(a_n-a_1) & \ldots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

E, pondo-se (a_2-a_1), (a_3-a_1) ... (a_n-a_1) em evidência, no determinante, ficamos com

$$V(a_1,a_2,\dots a_n)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ou

$$V(a_1,a_2,\dots a_n)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)V(a_2,a_3,\dots a_n)$$

Demonstrada essa <u>relação de recorrência</u>, o teorema o é imediato. Com efeito,

$$V(a_1,a_2,a_3\dots a_n)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_{n-1}-a_1)(a_n-a_1)V(a_2,a_3\dots a_n)$$

$$V(a_2,a_3,a_4\dots a_n)= \quad (a_3-a_2)\dots(a_{n-1}-a_2)(a_n-a_2)V(a_3,a_4\dots a_n)$$

....

$$V(a_{n-2},a_{n-1},a_n) = \quad (a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})V(a_{n-1},a_n)$$

$$V(a_{n-1},a_n) = \quad (a_n-a_{n-1})$$

Multiplicando-se membro a membro estas igualdades, e simplificando-se o resultado, obtemos

$$V(a_1,a_2,\dots a_n)=(a_2-a_1)\dots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\dots(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})$$

$$V(a_1, a_2, \dots a_n) = \prod_{r>s}(a_r-a_s), \quad \text{q.e.d.}$$

44 - <u>Corolário</u>. A condição necessária e suficiente para que um determinante de Vandermonde seja nulo, é que dois elementos característicos sejam iguais.

Com efeito, a condição necessária e suficiente para que um produto

$$\prod_{r>s}(a_r-a_s)$$

seja nulo, é que

$$a_r - a_s = 0 \quad \text{ou} \quad a_r = a_s , \quad \text{q.e.d.}$$

*

ÍNDICE

*

Datilografia: Erminia P. Vecchiatti

DO MESMO AUTOR:

Lições de Análise Combinatória

Lugares Geométricos Planos

Números Reais

Cr$ 80,00