F. A. LACAZ NETTO

LUGARES GEOMÉTRICOS PLANOS

Com mais de 100 exercícios resolvidos

1951

EDITORA BANDEIRANTES
TRAVESSA JORGE TIBIRIÇÁ, 30 — SÃO PAULO

F. A. LACAZ NETTO

Catedrático de Complementos de Geometria Analítica e Noções de Nomografia
da Faculdade de Engenharia Industrial da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Professor Associado de Matemática no Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

LUGARES GEOMÉTRICOS PLANOS

Com mais de 100 exercícios resolvidos

1951

EDITORA BANDEIRANTES

TRAVESSA JORGE TIBIRIÇÁ, 30 — SÃO PAULO

PREFÁCIO

Os problemas que publicamos neste volume foram, em sua quase totalidade, resolvidos ou tiveram sua resolução indicada, nos cursos de Geometria Analítica que demos nos terceiros anos científicos dos Colégios Bandeirantes e Dante Alighieri, nos anos de 1947, 1948 e 1949.

Trabalhando atualmente no Instituto Tecnológico de Aeronáutica, em São José dos Campos, tivemos tempo de preparar êste compêndio, que apresentamos ao público, com duas finalidades.

A primeira finalidade é a de servirmos aos estudantes dos nossos colégios e dos primeiros anos das Escolas Superiores, onde ainda se estuda Geometria Analítica.

Outra finalidade dêsse trabalho é a de chamarmos a atenção dos que se interessam pelo ensino, para o desenvolvimento que, em muitos colégios, é dado às matérias dos exames vestibulares. O desenvolvimento que davamos à Geometria Analítica era dado também às outras cadeiras exigidas nos vestibulares, não só nos colégios onde lecionavamos, como em muitos outros, e com grande aproveitamento da maioria dos alunos. Como homenagem a nossos antigos discípulos, adiantamos que êsse aproveitamento era obtido com grande sacrifício dos alunos, sempre com número exagerado de aulas.

Neste prefácio, queremos observar que na resolução dos problemas foi sempre empregado o método cartesiano. Não se conclua daí que damos preferência a êsse método, comparado com o vetorial, por exemplo. Em verdade, durante os anos que lecionamos na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, de cuja Faculdade de Engenharia somos catedrático, o método que empregamos foi sempre o vetorial.

Finalmente agradecemos ao caro colega Prof. Wilson Campos, o interesse que tem demonstrado na publicação dos trabalhos que escrevemos.

São José dos Campos, 3 de Setembro de 1951.

F. A. Lacaz Netto

LUGARES GEOMÉTRICOS

1 - Histórico. A teoria dos lugares geométricos é atribuida a Platão (430 - 347 A.C.).

Segundo Chasles, o chefe do Liceu, introduziu na Geometria, o método analítico, as secções cônicas e a doutrina dos lugares geométricos. Ainda segundo Chasles, o método dos lugares geométricos foi então, aplicado de maneira muito sábia, nos famosos problemas da duplicação do cubo, das médias proporcionais e da trissecção do ângulo.

Os antigos, i. é, os gregos dividiam os lugares geométricos em diversas classes; êles denominavam lugares planos à reta e à circunferência, lugares sólidos, às secções cônicas, porque se concebia sua geração num sólido, e finalmente, denominavam lugares lineares, a tôdas às curvas de ordem superior a dois, como as conchoides, as cissóides, as espirais e as quadratrizes.

2 - Definição. Chama-se lugar de pontos o conjunto de todos os pontos que satisfazem determinada condição ou condições, que definem o lugar ou lugar geométrico.

Se os pontos de um lugar geométrico pertencerem a um plano, o lugar se diz plano.

Nestas lições, trataremos sòmente de lugar geométrico plano.

O lugar geométrico de um ponto P, também se diz o lugar geométrico descrito pelo ponto; para marcar êste fato, também se diz que o ponto descreve o lugar.

3 - Equação de um lugar de pontos. Denomina-se equação de um lugar geométrico a equação em que as variáveis são as coordenadas do ponto que descreve o lugar geométrico

e exprime a condição necessária e suficiente para o que ponto pertença ao lugar.

4 - Observações. No estudo dos lugares geométricos, para facilitar a resolução dos problemas, é conveniente atender às seguintes observações, quanto à escolha do sistema de referência:

a) se no enunciado do problema houver duas retas secantes fixas, considerá-las como eixos do sistema de referência, ou considerar como eixos do sistema de referência, uma das retas e a perpendicular a ela, pela interseção das retas;

b) se no enunciado do problema, houver dois pontos fixos, considerar como eixos do sistema de referência a reta suporte do segmento e a sua mediatriz, ou a reta suporte do segmento e a perpendicular a esta reta, por uma das extremidades do segmento;

c) se houver no enunciado do problema, um ponto fixo e uma reta também fixa considerar como sistema de referência o sistema formado pela reta fixa e a perpendicular conduzida do ponto fixo à reta;

d) se no enunciado do problema houver uma circunferência, escolher como eixos do sistema de referência, dois diâmetros perpendiculares;

e) se no enunciado do problema houver uma circunferência e um ponto fixo, considerar como eixos dois diâmetros perpendiculares, um deles pertencente ao ponto fixo;

f) se no enunciado do problema houver uma circunferência e uma reta fixa, escolher como eixos do sistema de referência dois diâmetros perpendiculares, um dêles paralelo à reta fixa.

g) se no enunciado do problema houver um ponto fixo e uma reta móvel, em tôrno do ponto, considerar um sistema de referência em que o polo deve ser o ponto fixo.

5 - Eliminação. Se o lugar geométrico depender de mais de um ponto variável, a equação do lugar geométrico será obtida pela eliminação do parâmetro ou dos parâmetros com que exprimirmos a variabilidade dos pontos pelos quais fica determinado aquele que descreve a curva.

Vejamos alguns exemplos elementares e clássicos de eliminação.

6 - Primeiro caso de eliminação. Um só parâmetro, de gráu um em uma equação e de um gráu qualquer em outra equação; seja, por exemplo, o parâmetro λ nas equações

$$\begin{cases} A\ (x,y) + \lambda B\ (x,g) = 0 \\ \varphi(x,y,\ \lambda) = 0 \end{cases}$$

ou abreviadamente

$$\begin{cases} A + \lambda B = 0 \\ \varphi(\lambda) = 0 \end{cases}$$

Neste caso, faz-se a eliminação do parâmetro, substituindo-se λ na segunda equação, pelo seu valor tirado da primeira equação:

$$\varphi(-\frac{B}{A}) = 0$$

Se ambas as equações fossem de primeiro gráu (em λ), i.é, se as equações tivessem as formas

$$\begin{cases} A_1 + \lambda B_1 = 0 \\ A_2 + \lambda B_2 = 0 \end{cases}$$

teriamos, então,

$$A_1\ B_2 - A_2\ B_1 = 0$$

que poderiamos obter, igualando-se os valores de λ tirados nas duas equações.

7 - Segundo caso de eliminação. Dois parâmetros do primeiro gráu em duas equações e mais outra equação de um

gráu qualquer em relação aos parâmetros; sejam, por exemplo, os parâmetros λ e μ, nas equações,

$$\begin{cases} f_1\lambda + g_1\mu + h_1 = 0 \\ f_2\lambda + g_2\mu + h_2 = 0 \\ \varphi(x,y,\lambda,\mu) = 0 \end{cases}$$

Faz-se a eliminação, neste caso, substituindo-se, na terceira equação os valores de λ e μ tirados nas duas primeiras equações.

8 - <u>Terceiro caso de eliminação</u>. Um só parâmetro do segundo gráu em duas equações; seja, por exemplo, o parâmetro λ nas equações.

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} A_1\lambda^2 + B_1\lambda + C_1 = 0 \\ A_2\lambda^2 + B_2\lambda + C_2 = 0 \end{cases}$$

Neste caso, a eliminação se faz, substituindo-se as equações do sistema (I), pelas combinações lineares de suas equações em que se eliminam λ^2 e λ respectivamente; dêsse modo, substituimos o sistema (I), pelo sistema

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (A_2 B_1 - A_1 B_2)\lambda + A_2 C_1 - A_1 C_2 = 0 \\ (A_1 B_2 - A_2 B_1)\lambda^2 + (B_2 C_1 - C_2 B_1) = 0 \end{cases}$$

e recaimos, então, no primeiro caso de eliminação e a equação resultante seria,

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1) \cdot \left(\frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\right)^2 + (R_2 C_1 - C_2 R_1) = 0$$

$$(A_2 C_1 - A_1 C_2)^2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\ (B_2 C_1 - C_2 B_1) = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou ainda

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2$$

9 - <u>Quarto caso de eliminação</u>. Num só parâmetro (ângulo), argumento de funções circulares, em duas equações. Neste caso, tiramos, duas equações dadas, os valores das funções circulares e os eliminamos, numa identidade que relacione as funções circulares.

Como exemplo, consideremos a eliminação do parâmetro φ no sistema

$$a \cos\varphi + b \operatorname{sen}\varphi = c$$

$$a' \cos\varphi + b' \operatorname{sen}\varphi = c'$$

Dessas equações, pela regra de Cramer, temos

$$\cos\varphi = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

que, na identidade

$$\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

dão-nos

$$(ac' - ca')^2 + (cb' - bc')^2 = (ab' - ba')^2$$

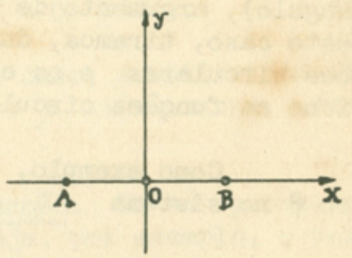
10 - <u>Artifícios</u>. Algumas vezes, no lugar do parâmetro (ou parâmetros) eliminam-se funções deles; neste caso é preciso ter cuidado, pois, com a função que se elimina, póde ser desprezada parte do lugar procurado - as chamadas <u>soluções particulares</u>, do problema.

11 - <u>Exercício</u>. Lugar geométrico dos pontos cuja diferença (numa certa ordem) dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos seja constante.

Seja A e B os pontos fixos e k a constante; se chamamos de P o ponto genérico do lugar, podemos dizer que a equação natural do problema é

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = k$$

Ora se consideramos o sistema de referência em que o eixo dos x é a reta AB, e o eixo dos y, a mediatriz do segmento AB, temos



$$A \equiv (a;o) \quad B \equiv (-a;o)$$

Se chamamos de x e y as condenadas de P, i.é., se fazemos $P \equiv (x;y)$, a equação procurada será

$$(x - a)^2 + y^2 - \left[(x + a)^2 + y^2\right] = k$$

$$-4ax = k$$

$$x = -\frac{k}{4\,a}$$

que é a equação de uma reta paralela ao eixo dos y.

12 - <u>Exercício</u>. Lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos seja constante.

Se chamarmos de A e B os pontos fixos, P o ponto genérico e k a constante, a equação natural do lugar será

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k$$

Fazendo-se $P \equiv (x;y)$ e supondo-se ainda que o sistema seja de acôrdo com a observação b do número 4, a equação procurada será:

$$(x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = k$$

$$2x^2 + 2y^2 = k$$

$$x^2 + y^2 = \frac{k}{2}$$

que é a equação de uma circunferência cujo centro é a origem e cujo raio é igual $\sqrt{2.k}/2$.

13 - <u>Exercício</u>. Dados n pontos A_r e n números p_r $(r = 1,2,\dots n)$, o lugar de um ponto M cuja soma

$$p_1\,\overline{MA}_1^2 + p_2\,\overline{MA}_2^2 + \dots + p_n\,\overline{MA}_n^2$$

seja uma constante k é uma circunferência, caso a soma dos números p_r seja diferente de zero; no caso contrário, o lugar é uma reta.

Fixemos um sistema cartesiano ortogonal de referência e suponhamos

$$A_1 \equiv (x_1;y_1) \quad A_2 \equiv (x_2;y_2) \quad \dots\dots \quad A_n \equiv (x_n;y_n)$$

Nesta hipótese a equação do lugar procurado será

$$\text{(I)} \quad \sum_{1}^{n}{}_r\, p_r \left[(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2\right] = k$$

sendo $P \equiv (x;y)$ o ponto genérico do lugar.

Desenvolvendo-se a equação (I) obtemos

$$\left(\sum p_r\right) x^2 + \left(\sum p_r\right) y^2 - 2\left(\sum p_r x_r\right) x - 2\left(\sum p_r y_r\right) y + \left[\sum p_r \left(x_r^2 + y_r^2\right) - k\right] = 0$$

Ora, se a soma $\sum_{1}^{n}{}_r\, p_r \neq 0$ concluimos que o lugar é uma circunferência cuja equação normal será

$$x^2 + y^2 - 2\frac{\sum p_r x_r}{\sum p_r}x - 2\frac{\sum p_r y_r}{\sum p_r}y + \frac{\sum p_r\left(x_r^2 + y_r^2\right) - k}{\sum p_r} = 0$$

Desta equação, temos o centro

$$C \equiv \left(\frac{\sum p_r x_r}{\sum p_r} ; \frac{\sum p_r y_r}{\sum p_r}\right)$$

que é o baricentro dos pontos A_r com pêsos p_r; o raio deste círculo será o número

$$\rho = \sqrt{\frac{(\sum p_r\, x_r)^2}{(\sum p_r)^2} + \frac{(\sum p_r\, y_r)^2}{(\sum p_r)^2} - \frac{\sum p_r\,(x_r^2 + y_r^2) - k}{\sum p_r}} =$$

$$= \frac{1}{p_r}\sqrt{(\Sigma p_r\, x_r)^2 + (\Sigma p_r\, y_r)^2 - \left[\Sigma p_r (x_r^2 + y_r^2) - k\right]\,(\Sigma p_r)}$$

Se a soma $\sum p_r = 0$ o lugar é uma reta, de equação

$$2\,(\sum p_r)\,x + 2\,(\sum p_r)\,y + k - \sum p_r\,(x_r^2 + y_r^2) = 0$$

14 - <u>Exercício</u>. Lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos seja constante.

Sejam k a constante, A e B os pontos fixos e P o ponto genérico do lugar; nesta hipótese a <u>equação natural</u> do lugar é

$$\frac{PA}{PB} = k$$

Se o sistema de referência tiver como eixo das abcissas a reta que une A e B e como eixo das ordenadas a mediatriz do segmento AB, temos

$$A \equiv (a;0) \quad B \equiv (-a;0);$$

ora, fazendo-se $P \equiv (x;y)$, a equação procurada será

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} = k$$

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2\,(x-a)^2 + k^2\,y^2$$

ou

$$(1-k^2)\,x^2 + (1-k^2)\,y^2 - 2a\,(1+k^2)\,x + a^2\,(1-k^2) = 0$$

Se $1 - k^2 \neq 0$, i.é, se $k \neq 1$ (supomos $k > o$ pois, se trata de distância em valor absoluto), o lugar procurado é **uma circunferência** de centro

$$C \equiv \left(a\,.\,\frac{1+k^2}{1-k^2};\,0\right)$$

e cujo raio

$$r = \sqrt{a^2\left(\frac{1-k^2}{1-k^2}\right)^2 - a^2\,(1-k^2)} = \frac{a}{1-k^2}\sqrt{(1+k^2)^2 - (1-k^2)^2} =$$

$$= \frac{a}{1-k^2}\sqrt{(1+k^2) + 1 - k^2)\,(1 + k^2 - 1 + k^2)} =$$

$$= \frac{a}{1-k^2}\sqrt{2\,(2k^2)} = \frac{2ak}{1-k^2}$$

Se $1 - k^2 = 0$, i.é, se $k = 1$, a equação do lugar será

$$x = 0$$

equação de uma reta, a do eixo dos y, mediatriz do segmento AB.

15 - <u>Exercício</u>. Lugar geométrico dos pontos de um plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos seja constante. (Curva de Cassini).

Suponhamos A e B os dois pontos fixos, k a constante e $P \equiv (x;y)$ o ponto genérico; se o eixo dos x for a reta determinada por A e B, e o eixo dos y, a mediatriz do segmento AB, teremos

$$A \equiv (a;0) \quad B \equiv (-a;0)$$

e a equação do lugar será

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\,\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = k$$

$$\left[(x-a)^2 + y^2\right]\left[(x+a)^2 + y^2\right] = k^2 \qquad \text{(I)}$$

que é uma equação do 4º gráu; a curva será, portanto, de quarta ordem - uma <u>quártica</u>, portanto.

Desenvolvendo-se a equação anterior, temos

$$(x^2 - a^2)^2 + y^2\,(x^2 + a^2) + y^4 = k^2$$

ou

$$y^4 + 2\,(x^2 + a^2)\,y^2 + \left[(x^2 - a^2)^2 - k^2\right] = 0$$

que resolvida em relação y^2, nos dá

$$y^2 = -(x^2 + a^2) \pm \sqrt{(x^2 + a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2 + k^2}$$

(II) $$\boxed{y^2 = -(x^2 + a^2) \pm \sqrt{k^2 + 4a^2 x^2}}$$

Numa pequena discussão da igualdade anterior, vejamos a forma da curva.

Sendo do segundo gráu em relação a y, a curva é simétrica em relação ao eixo dos x; tendo em vista a equação I, podemos afirmar que a curva também é simétrica em relação ao eixo dos y.

Ora, para qualquer valor real de x

$$4a^2 x^2 + k^2 > 0$$

e, portanto, existem (no campo real) e são desiguais as raizes

$$\pm \sqrt{4a^2 x^2 + k^2}$$

Ora, para qualquer valor de x,

$$-(x^2 + a^2) < 0$$

e, portanto, um valor de y^2 será negativo:

$$y_1^2 = -(x^2 + a^2) - \sqrt{4a^2 x^2 + k^2}$$

e o outro será positivo ou nulo se

(III) $$4a^2 x^2 + k^2 \geqslant (x^2 + a^2)^2$$

Para que a curva admita, pontos reais é, preciso, pois, que as abcissas de seus pontos satisfaçam à relação (III).

Desenvolvendo-se esta última relação, temos

$$4a^2 x^2 + k^2 \geqslant x^4 + 2a^2 x^2 + a^4$$

$$k^2 \geqslant x^4 - 2a^2 x^2 + a^4$$

$$k^2 \geqslant (x^2 - a^2)^2$$

e, portanto, para que exista pontos reais na curva, devemos ter

$$k \geqslant |x^2 - a^2|$$

$$|x^2 - a^2| \leqslant k$$

$$-k \leqslant x^2 - a^2 \leqslant k$$

$$a^2 - k \leqslant x^2 \leqslant k + a^2$$

Da relação

$$x^2 \leqslant k + a^2$$

concluimos que os pontos reais da curva estão na faixa determinada pelas retas de equações:

$$\begin{cases} x = +(a^2 + k)^{\frac{1}{2}} \\ x = -(a^2 + k)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Continuando, a discussão, consideramos a relação

$$x^2 \geqslant a^2 - k$$

A respeito de $a^2 - k$ podemos formular 3 hipóteses:

$$a^2 - k > 0 \quad a^2 - k = 0 \quad a^2 - k < 0$$

Na primeira hipótese, se

$$a^2 > k$$

$$a > \sqrt{k}$$

e como devemos ter

$$x^2 \geqslant a^2 - k$$

os pontos reais da curva são externos (ou aferentes) em relação à faixa determinada pelas retas de equação

$$x = +(a^2 - k)^{\frac{1}{2}}$$

$$x = -(a^2 - k)^{\frac{1}{2}}$$

Nesta hipótese, a curva se desdobra em duas ovais, uma na faixa de lados

$$x = (a^2 + k)^{\frac{1}{2}}$$

$$x = (a^2 - k)^{\frac{1}{2}}$$

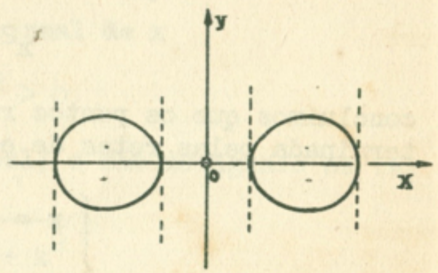
e outra simétrica em relação ao eixo dos y.

Na segunda hipótese, se

$$a^2 - k = 0$$

ou seja

$$a = \sqrt{k},$$



a equação (I),

$$\left[(x - a)^2 + y^2\right]\left[(x + a)^2 + y^2\right] = k^2$$

terá a forma

$$\left[(x - a)^2 + y^2\right]\left[(x + a)^2 + y^2\right] = a^4$$

$$(x^2 - a^2)^2 + y^2\left[(x - a)^2 + (x + a)^2\right] + y^4 = a^4$$

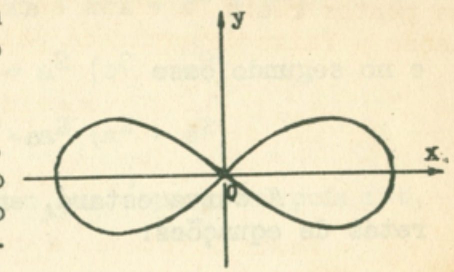
$$(x^2 - a^2)^2 + y^2(2x^2 + 2a^2) + y^4 = a^4$$

$$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 + 2y^2x^2 + 2a^2y^2 + y^4 = a^4$$

(IV) $$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

A curva de Cassini, nesta hipótese, denomina-se <u>lemniscata de Bernouilli</u>.

Da equação IV, concluimos que a lemniscata de Bernoilli passa pela origem; ela tem a forma representada na figura ao lado, com um nodo na origem.



A equação da lemniscata, em coordenadas polares quando o polo se confunde com a origem e o eixo polar, com o eixo das abcissas, é

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

Com efeito, da equação IV

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

como

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

temos

$$\rho^2 - 2a^2(\cos^2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi) = 0$$

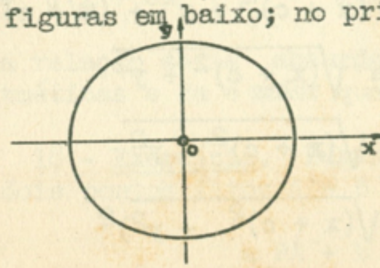
$$\rho^2 = 2a^2(\cos^2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi)$$

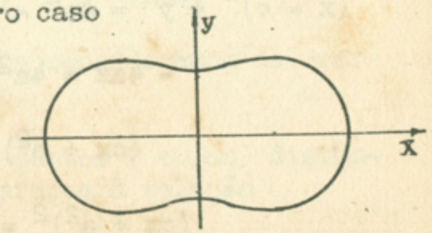
$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

Terminando a discussão, formulemos a hipótese de

$$a^2 - k < 0$$

Neste caso, a curva é uma oval conforme representam as figuras em baixo; no primeiro caso





$$a \leqslant \sqrt{k/2}$$

e no segundo caso

$$a > \sqrt{k/2}$$

A curva estará, então, na faixa determinada pelas retas de equações:

$$\begin{cases} x = + (a^2 + k)^{\frac{1}{2}} \\ x = - (a^2 - k)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

16 - Exercício. Lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos seja constante.

Sejam F e F' os dois pontos fixos, 2ª a soma constante e P (x;y) o ponto genérico do lugar.

Se consideramos como sistema de referência, o sistema cartesiano cujo eixo das abcissas é a reta F F' e cujo eixo das ordenadas é a mediatriz do segmento F F', podemos supor

$$F \equiv (c;0) \qquad F' \equiv (-c;0)$$

e a equação do lugar procurado será

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Desenvolvendo-se a equação anterior temos

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$-4ax = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(cx + a^2) = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(cx + a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Fazendo-se $a^2 - c^2 = b^2$, o que é possível pois $a > c$, temos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e portanto, o lugar é uma elípse.

17 - Exercício. Lugar dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos seja constante.

Com os dados do problema é as mesmas transformações chega-se à equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole.

Escolio. Convem observar que a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com as duas elevações ao quadrado, poderia ser obtida da equação

$$-\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

mas esta relação seria absurda pois consideramos as raízes aritméticas e 2a é maior que zero.

18 - Exercício. Lugar dos pontos P cujas distâncias a dois pontos fixos A e B satisfaçam à relação

$$a\ PA + b\ PB = c$$

sendo a, b, c constantes.

19 - **Escólio.** As curvas do exercício anterior denominam-se ovais de Descartes; suas equações em coordenadas bipolares (distâncias a dois pontos fixos), apresentam-se na forma bastante simples

$$\rho_1 + n\,\rho_2 = k$$

sendo ρ_1 e ρ_2 as coordenadas bipolares do ponto genérico do lugar e n e k duas constantes características da curva; a primeira positiva ou negativa a segunda sempre positiva.

A elípse, a circunferência, a hipérbole e as lumacas de Pascal, constituem casos particulares das orais de Descartes; a elípse corresponde ao caso de $n = 1$, a circunferência, ao caso de $k = 0$, a hipérbole corresponde ao caso de $n = -1$ e as lumacas de Pascal correspondem ao caso de $k = na$, sendo a distância entre os dois polos, i.é, os dois pontos fixos do sistema de referência.

As lumacas de Pascal são definidas geralmente, como podar da circunferência.

20 - Exercício. Lugar dos pontos cuja razão das distâncias a um ponto fixo e uma reta fixa, (que não se pertençam), seja constante.

Sejam F o ponto fixo, d a reta também fixa e suponhamos que o sistema de referência tenha como eixo dos y a reta fixa d e como eixo dos x a perpendicular a esta reta conduzida pelo ponto fixo **F**. Nesta hipótese podemos escrever

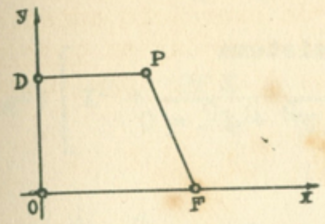
$$F \equiv (f,0)$$

Ora, se $P \equiv (x;y)$ é o ponto genérico do lugar e chamarmos de e, a razão constante das distâncias, a equação natural do lugar procurado é

$$\frac{PF}{PD} = e$$

chamando-se D a projeção do ponto P sôbre a reta $d \equiv y$.

Da equação natural, temos



$$\frac{\sqrt{(x-f)^2 + y^2}}{x} = e$$

e, portanto

$$(x-f)^2 + y^2 = x^2 e^2$$

$$x^2(1-e^2) - 2fx + y^2 + f^2 = 0 \qquad (I)$$

Como é sabido esta curva é uma elípse, parábola ou hipérbole, segundo a constante e seja menor do que um, igual a um ou maior do que um.

Para que a equação (I) assuma as formas canônicas de uma elípse, hipérbole ou parábola há necessidade de uma transformação de coordenadas, porque as equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = 2px$$

são equações da elípse, hipérbole e parábola, quando os sistemas de referência são formados pelos eixos das duas primeiras cônicas e pelo eixo e tangente pelo vertice, no caso da parábola, e em nosso caso o sistema é formado por um eixo e uma diretriz.

Para chegarmos às formas canônicas, consideremos dois casos

1) $1 - e^2 \neq 0$ (elípse ou hipérbole)

2) $1 - e^2 = 0$ (parábola)

No primeiro caso, vamos determinar as intersecções da curva com o eixo dos x e em seguida fazer uma translação do sistema de referência, de modo que a nova origem seja o uma cônica degenerada, o par de retas isótropas, que passam pelo foco $F \equiv (c;0)$.

142 - Exercício. Podar de uma hipérbole em relação a um dos focos.

143 - Exercício. Podar de uma circunferência em relação a um ponto qualquer.

Sejam a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = r^2$$

e o ponto $A \equiv (a;0)$.

Numa tangente à circunferência pelo ponto $\Gamma = (\alpha;\beta)$, terá a equação

$$x\alpha + y\beta = r^2 \qquad \text{(I)}$$

desde que tenhamos

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

Da equação (I), concluimos que a normal às tangentes conduzida pelo ponto $A \equiv (a;0)$, tem a equação

$$y = \frac{\beta}{\alpha}(x - a)$$

Se $P \equiv (X;Y)$ é o ponto genérico do lugar, obtem-se a equação do lugar com a eliminação de α e β no sistema

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = r^2 \\ X\alpha + Y\beta = r^2 \\ Y\alpha - (X - a)\beta = 0 \end{cases}$$

Das duas últimas equações do sistema anterior, temos

$$\alpha = \frac{r^2 (X - a)}{X(X - a) + Y^2} \qquad \beta = \frac{r^2 Y}{X(X - a) + Y^2}$$

Substituindo-se α e β na equação

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

temos a equação desejada.

PEQUENO ÍNDICE

PUBLICAÇÕES DA EDITÔRA BANDEIRANTES

F. A. LACAZ NETTO - Prof. do Instituto Tecnológico de Aeronáutica.

Teoria Elementar dos Determinantes

Muitos exercícios propostos e resolvidos. Edição ampliada e revista.

Brochura - 140 páginas .... Cr.$50,00

Lições de Análise Combinatória

Idem - Idem .... Cr.$50,00

Formas e Equações Lineares

Idem - Idem .... Cr.$45,00

Lugares Geométricos

(Exercícios resolvidos) .... Cr.$60,00

Números Reais No prelo

BENEDICTO CASTRUCCI - Prof. da Escola Politécnica e da Faculdade de Filosofia da Universidade de S. Paulo.

Exercícios de Geometria no Espaço

Propostos pelo Dr. Benedicto Castrucci.
Resolvidos por Wilson D. C. Campos.

1º Volume: A reta e o plano no Espaço.
Os poliedros.

Brochura .... Cr.$50,00

2º Volume: Os corpos redondos

Brochura .... Cr.$50,00
