F. A. LACAZ NETTO

LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

São Paulo - 1950

Nº 800

20,00

Fernando da Silva Almeida

LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

POR

F. A. LACAZ NETTO

Prof. Associado do Instituto Tecnológico de Aeronáutica

S. PAULO

- 1950 -

P R E F Á C I O

O presente trabalho, sem a parte de exercícios, já foi publicado, sob forma de apostila.

Ele consta das aulas que demos vários anos, nos antigos cursos pré-politecnicos; suas lições servem de base à teoria dos determinantes, assunto de outro livro de nossa autoria, já publicado.

A matéria deste volume é bastante conhecida; parte dela era até exigida nos programas da última série do curso ginasial, antes da Reforma Capanema. Estas lições não apresentam, portanto, nada de original, a não ser quanto à exposição, em que talvez pequemos por excesso, no desejo de ser claros e rigorosos nos conceitos.

Num dos capítulos deste livro, fizemos um apanhado da teoria da congruência, para simplificar as demonstrações dos teoremas sobre inversões, de que tratamos tambem no fim do volume e apresentam grande interesse em determinantes, de acordo com a orientação que temos seguido, ao expôr esse argumento.

O capítulo sobre congruência, neste volume tem por fim, tambem, amenizar um pouco estas lições, com assunto que requer outro metodo de exposição, bem como dar idéia de um conceito importantíssimo, com que se inicia a Teoria dos Números.

Na parte de exercícios, seguimos uma orientação que julgamos bôa: alguns exercícios resolvidos e outros a resolver, logo depois. Os exercícios foram ordenados segundo os capítulos da parte teórica, tendo em vista ainda as dificuldades de solução.

Esperamos que o presente volume seja de alguma utilidade aos alunos de nossos Colégios; nele encontra-se a parte de Análise Combinatória exigida nos programas atuais, alem das que eram exigidas antigamente e que julgamos ao alcance dos estudantes do segundo cíclo gina -

sial, razão por que as deixamos em nossas Lições de Análise Combinatória, com a vantagem de apresentarmos um livro mais completo sobre o assunto.

São Paulo, maio de 1943.
F. A. LACAZ NETTO

PREFACIO DA 3a. EDIÇÃO

Pela terceira vez, publicamos Lições de Análise Combinatória.

A idéia desta edição coube ao colega Prof. Wilson de Campos, a quem agradecemos o interesse e trabalho pela presente publicação deste nosso livro, o qual tem prestado algum auxilio aos alunos dos Colégios e candidatos às Escolas de Engenharia e Faculdades de Filosofia, Ciencias e Letras.

Como já dissemos nos prefácios das edições anteriores, Lições de Análise Combinatória não apresenta nada de original, a não ser quanto à forma. Infelizmente ainda não nos foi possivel fazer nenhum acrescimo a êste nosso trabalho. Se Deus quizer, entretanto, será ainda melhorado, pois estamos trabalhando neste sentido.

Finalmente, agradecemos aos senhores Roberto Cornibert e Lauro Modesto dos Santos, alunos da Escola Politécnica de São Paulo, as errata que cada um organizou e teve a gentileza de nos ceder, facilitando-nos grandemente a correção do livro, para a presente edição.

São José dos Campos, Outubro de 1950

F. A. LACAZ NETTO

Capítulo Primeiro

GENERALIDADES. ARRANJOS, PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES SIMPLES

§ 1. GENERALIDADES

1 - Definição de conjunto. - Chamamos conjunto a um ente ou a uma reunião de entes. O conjunto de um só ente diz-se unitário.

Um ente qualquer de um conjunto denomina-se elemento do conjunto.

2 - Conjuntos finito e infinito. - Um conjunto do qual podemos obter tantos elementos quantos quizermos, diz-se infinito. O conjunto dos números inteiros dos números primos, dos pontos de um segmento, são exemplos de conjuntos infinitos.

Um conjunto que não é infinito, diz-se finito.

3 - Agrupamento. - Um conjunto unitário, ou um conjunto finito, cujos elementos estejam dispostos em linha horizontal, denominam-se agrupamentos.

O número de elementos de um agrupamento chama-se classe do agrupamento. Assim, os conjuntos abc, AEF, são de classe 3.

Os conjuntos de classe 1, 2, 3 ... também se dizem unitários, binários, ternários, etc.

4 - Agrupamentos simples e com repetição. - Um agrupamento cujos elementos sejam todos distintos, isto é um agrupamento que não tenha elementos iguais, diz-se simples ou sem repetição. No caso contrário, com repetição.

5 - Notação. - Os elementos dos conjuntos de que vamos tratar, serão representados:

a) por letras do alfabeto latino (maíusculas ou minúsculas);

b) por letras do alfabeto latino, afetadas de índice;

c) por números naturais.

6 - Definição de análise combinatória - Análise combinatória ou cálculo combinatório é o ramo da matemática, que tem por fim estudar as propriedades dos agrupamentos que podemos formar, segundo certas leis, com os elementos de um conjunto finito.

§ 2. ARRANJOS E COMBINAÇÕES

7 - Dados dois agrupamentos de classes iguais, é natural considerá-los distintos, sempre que tenham elementos diferentes. Assim consideram-se distintos os agrupamentos ABC e ABD.

Quando os agrupamentos têm os mesmos elementos, mas dispostos em ordens diferentes, êles podem ser considerados distintos ou não, conforme os entes que representarem. Por exemplo, si representarmos uma réta por 2 de seus pontos, A e B, AB e BA representam a mesma réta, e assim os agrupamentos AB e BA devem ser considerados iguais. Os números 34 e 43, no entanto, que podemos considerar como agrupamentos dos algarismos 3 e 4, são números diferentes, e os agrupamentos 34 e 43, embora tenham os mesmos elementos, devem ser considerados distintos, pois, representam números desiguais.

Dessas considerações resulta que ha agrupamentos que só se consideram distintos, quando diferem pela natureza de seus elementos, e outros, quando diferem pela natureza ou pela ordem dos elementos. Os primeiros têm o nome de combinações, e os segundos, de arranjos.

Arranjos são, portanto, agrupamentos que diferem ou pela natureza, ou pela ordem de seus elementos, e combinações são agrupamentos que diferem só pela natureza dos elementos.

§ 3. ARRANJOS SIMPLES

8 - Definição - Dados n elementos (distintos), chamamos arranjos simples, de classe k, dos n elementos, aos agrupamentos sem repetição, formados com k dos n elementos dados, de maneira que um agrupamento difira do outro, ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos.

Os arranjos simples de classe k, de n elementos, tambem se dizem os arranjos simples dos n elementos, k a k ou tomados k a k.

Ao envez de arranjo, usa-se ainda a palavra disposição; arranjo passa por galicismo.

9 - Notação - O número dos arranjos simples de n elementos, k e k, é denotado com os símbolos:

$$A_{n,k} \quad \text{ou} \quad D_{n,k}$$

10 - Teorema - Para passarmos dos arranjos simples, de classe k - 1, de n elementos (distintos), para os de classe k, dos mesmos elementos, coloca-se depois de cada agrupamento, cada um dos elementos dados, e que não figura nêle.

Com efeito, suponhamos formados os arranjos simples, de classe k - 1, de n elementos (distintos). Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras a, b, c, d, e, dispostas duas a duas:

ab ac ad ... cd ... de

A classe de cada agrupamento é k - 1, e colocando-se nêle um elemento, torna-se de classe k; como cada agrupamento de partida é simples, e coloca-se um elemento que não figura nêle, ainda continua simples.

Para provarmos que êsses agrupamentos são os arranjos, (todos os arranjos), simples dos n elementos, k a k, temos que provar ainda que dois agrupamentos quaisquer diferem, ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos, e não falta nenhum dêles. Para isso, suponhamos os agrupamentos formados, dispostos em colunas; os que provem de um mesmo arranjo de classe k - 1, numa coluna; os que provém de outro, noutra coluna:

abc	acb	adb	...	cda	...	dea
abd	ace	adc	...	cdb	...	deb
abe	acd	ade	...	cde	...	dec

Ora, assim dispostos, os agrupamentos que estão numa coluna, diferem pela natureza do último elemento, e os que estão em colunas diferentes, na pior das hipóteses, pela ordem ou natureza de k - 1 primeiros elementos, porque, estando em colunas diferentes, os k - 1 primeiros elementos formam arranjos distintos.

Para demonstrarmos que não falta nenhum arranjo, procedemos por absurdo. Suponhamos que falte um arranjo simples, de classe k, dos n elementos dados. No caso que consideramos, suponhamos faltar edb, por exemplo. Ora, desprezando-se o último elemento do agrupamento, formamos um arranjo simples, de classe k - 1, dos mesmos elementos. (No caso do exemplo, o arranjo ed). Esse arranjo de classe k - 1 deve estar entre os de partida (partimos de todos os arranjos de classe k - 1), e aplicando-se o teorema, deveríamos colocar depois dêle o elemento desprezado no agrupamento de classe k, pois, o elemento não figura no arranjo de classe k - 1, e assim formaríamos o agrupamento que, por absurdo, supúnhamos faltar.

Escólio. - Desde que os arranjos simples, um a um, de n elementos (distintos), são êsses mesmos elementos, aplicando-se o teorema anterior, podemos formar com êles, os arranjos simples de classe dois, com os de classe dois, os de classe três, e assim por diante, até os de classe k, onde k forçosamente é menor do que n.

11 - Teorema. $D_{n,k} = (n - k + 1)\, D_{n,k-1}$

No teorema do número 10, vimos que um arranjo simples, de classe k - 1, de n elementos (distintos), desdobra-se em n - (k - 1) = n - k + 1 arranjos simples, de classe k, dos mesmos elementos, e portanto, o número de arranjos obtidos é igual ao número de arranjos primitivos, $D_{n,k-1}$, multiplicado pelo número n - k + 1 em que cada um se desdobra, isto é,

$$D_{n,k} = (n-k+1)\, D_{n,k-1}$$

12 - Corolário. $D_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1) \qquad k>1$

Observando-se que $D_{n,1} = n$, e aplicando-se a fórmula do teorema anterior, para valores sucessivos de k, a partir de dois, temos:

$$\begin{aligned} D_{n,1} &= n \\ D_{n,2} &= (n-1)\, D_{n,1} \\ D_{n,3} &= (n-2)\, D_{n,2} \\ &\;\vdots \\ D_{n,k} &= (n-k+1)\, D_{n,k-1} \end{aligned}$$

Multiplicando-se membro a membro essas igualdades, e simplificando-se o resultado, temos;

$$D_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1) \qquad k>1$$

ou seja: o número dos arranjos simples de n elementos distintos, tomados k a k, para k>1, é um produto de k fatores consecutivos, cujo maior fator é n.

Escólio. - Para k = 1, já vimos que

$$D_{n,1} = n$$

§ 4. PERMUTAÇÕES

13 - Definição. - Os arranjos simples de n elementos (distintos), cuja classe seja igual a n, tomam o nome de permutações dêsses elementos. Permutações de n elementos (distintos) são, portanto, arranjos simples dêsses elementos, tomados n a n.

Como os arranjos são agrupamentos que diferem ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos, e nas permutações não podem diferir pela natureza, pois, em todos os agrupamentos devem figurar todos os elementos dados, pode mos dizer que as permutações são agrupamentos que diferem só pela ordem de seus elementos.

O teorema do número 10 permite formar as permutações de n elementos (distintos); basta formar os arranjos simples dos n elementos, n a n, a partir dos arranjos, um a um.

Em um capítulo especial sôbre permutações daremos outra maneira de formar as permutações de n elementos (distintos).

14 - Notação. - O número das permutações de n elementos (distintos) é representado pelo simbolo

$$P_n.$$

15 - Teorema. $P_n = 1.2 \ldots n \qquad n > 1$

Com efeito para calcularmos P_n, sendo as permutações arranjos particulares, basta na fórmula:

$$D_{n,k} = n(n-1) \ldots (n-k+1)$$

do teorema do número 12, fazermos $k = n$, e portanto,

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1) \ldots (n-n+1)$$

Trocando-se a ordem dos fatores, teremos:

$$P_n = 1.2 \ldots n \qquad n > 1$$

16 - Definição de fatorial. - Dado um número natural $n > 1$, ao produto dos números naturais de 1 a n, chamamos fatorial do número n, ou fatores n. O fatorial de um número n é indicado com os símbolos:

$$n! \qquad \lfloor n \qquad \pi(n).$$

Por definição, portanto:

$$n! = \lfloor n = \pi(n) = 1.2 \ldots n \qquad n > 1$$

Estendendo-se o conceito, fazemos ainda por definição:

$$1! = 1 \qquad e \qquad 0! = 1$$

Escólio - Resulta dessa definição e do teorema 15, que

$$P_n = n!$$

§ 5. COMBINAÇÕES SIMPLES

17 - Definição. - Dados n elementos (distintos), chamamos combinações simples, de classe k, dos n elementos, aos agrupamentos sem repetição, formados com k dos n elementos dados, de maneira que um agrupamento difira do outro, pela natureza de seus elementos.

As combinações simples, de classe k, de n elementos, tambem se chamam as combinações simples dos n elementos, k a k ou tomados k a k.

Ao envez de combinações, usa-se ainda a expressão produtos distintos.

18 - Notação - O número das combinações simples de n elementos (distintos), k a k, representa-se com o símbolo

$$C_{n,k}$$

19 - Teorema. $C_{n,k} = A_{n,k} : P_k$

Suponhamos, com efeito, formadas as combinações simples de classe $k (k > 1)$, de n elementos (distintos), cujo número $C_{n,k}$ queremos determinar.

Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras a, b, c, d, e, combinadas três a três:

abc abd abe ... cde.

Fazendo-se as permutações dos k elementos que figuram em cada combinação, vamos obter novos agrupamentos, ainda de classe k, e sem repetição dos mesmos elementos. Êsses agrupamentos são os arranjos (todos os arranjos) simples, de classe k, dos n elementos, como vamos provar.

Como já vimos que os agrupamentos são de classe k e simples, resta-nos provar que dois quaisquer diferem ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos, e que nenhum arranjo foi omitido.

Com efeito, suponhamos que as permutações dos elementos de cada combinação sejam colocadas em colunas; as que provêm de uma combinação em uma vertical; as que provêm de outra combinação, em outra vertical.

abc	abd	abe	...	cde
acb	adb	aeb	...	ced
cab	dab	eab	...	ecd
bac	bad	bae	...	dce
bca	bda	bea	...	dec
cba	dba	eba	...	edc

Assim dispostos, os agrupamentos de uma coluna diferem pela ordem de seus elementos, e os de colunas distintas, pela natureza dêles.

Não pode faltar nenhum arranjo, pois, aquele que por absurdo, supusermos faltar, a menos da ordem, será uma combinação de classe k, dos n elementos. Essa combinação, trocada a ordem de seus elementos, se for necessário, deve estar entre as combinações de partida devendo assim figurar na coluna das permutações dos elementos da referida combinação, o arranjo que supúnhamos faltar.

Lembremos que a ordem não influe na diferenciação das combinações, e por êsse motivo, os elementos, nas combinações, são colocados sempre numa ordem que se diz

natural; quando letras, na ordem alfabética; quando números na ordem crescente ou decrescente de seus valores.

Ora, no quadro atrás, os arranjos simples, dos n elementos k a k, ficam dispostos em $C_{n,k}$ colunas, cada uma com P_k agrupamentos, e portanto,

$$A_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k$$

donde

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}$$

20 - Corolário. $C_{n,k} = \dfrac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-k+1)}{1.2. \ldots . k}$ $\quad k>1$

Basta na fórmula anterior

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}$$

substituir-se $A_{n,k}$ e P_k por seus valores, dados pelos corolários dos números 12 e 15.

Escólio 1 - Êsse corolário pode ser enunciado assim: o número das combinações simples, de n elementos distintos, tomados k a k, para $k>1$, é uma fração em que o numerador é o produto de k fatores consecutivos, cujo maior fator é n, e o denominador, tambem o produto de k fatores consecutivos, cujo maior fator é k.

Escólio 2 - Para $k = 1$, o número de combinações de n elementos é n, o que é imediato; logo

$$C_{n,1} = n$$

21 - Teorema. $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Para $k>1$

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{1.2.\ \dots\ k}$$

Multiplicando-se ambos os termos da fração por $(n-k)!$ ela não se altera, e portanto,

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)\ .\ [\,(n-k)!\,]}{k!\ (n-k)!}$$

ou

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

Escólio. - É facil verificar-se que essa fórmula é válida para $k = 1$.

Capítulo Segundo

COEFICIENTES BINOMIAIS E TRIÂNGULO DE PASCAL

§ 1. COEFICIENTES BINOMIAIS

22 - Definição. - Dados dois números inteiros n e k, $n \geqslant k > 1$, chamamos coeficiente binomial de dlasse k, do número n, a fração

$$\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{1.2.\ \dots\ k}$$

O coeficiente binomial de classe k, do número n, é indicado com o símbolo

$$\binom{n}{k}$$

Por definição, portanto,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{1.2.\ \dots\ k} \qquad n \geqslant k > 1$$

Estendendo-se o conceito, ainda por definição, sendo n e k naturais, fazemos

$$\binom{n}{k} = n \qquad \text{para } n \geqslant k = 1$$

$$\binom{n}{k} = 1 \qquad \text{para } n \geqslant k = 0$$

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{para } n < k$$

O símbolo $\binom{n}{k}$, lê-se coeficiente binomial de classe k, do número n, ou coeficiente binomial n sôbre k.

Por analogia com a fração ordinária, n diz-se numerador do coeficiente binomial, e k, denominador.

Escólio. - Resulta dessa definição e do corolário do número 20 que

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

23 - Teorema. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Êste teorema já foi demonstrado para o caso de $n \geqslant k \geqslant 1$ (teorema do número 21); êle é válido para $n \geqslant k = 0$, como é fácil verificar-se.

A expressão do segundo membro não tem sentido para $n < k$, pois, é desprovido de significado o fatorial de um número negativo, que nêste caso aparece em denominador e, portanto, o teorema não é válido para $n < k$.

24 - Teorema. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Aplicando-se o teorema anterior, temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Logo

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Escólio - Essa relação, como a antecedente, da qual é um corolário, não é válida para $n < k$, pois, o segundo membro da expressão não tem sentido com o denominador negativo.

25 - Definição - Os coeficientes binomiais cujos numeradores são iguais, e a soma dos denominadores é igual ao numerador (comum), dizem-se complementares: um é o coeficiente binomial complementar do outro.

O teorema anterior, que se chama teorema dos coeficientes binomiais complementares, pode ser enunciado assim: coeficientes binomiais complementares são iguais.

Escólio - O teorema dos coeficientes binomiais complementares é valido para $n \geqslant k = 0$, como já vimos, e para $n > k \geqslant 1$ pode ser demonstrado assim.

Formadas as combinações simples de n elementos, k a k, consideremos os agrupamentos de classe $(n - k)$, formados com os elementos dados, e que não figuram em cada combinação.

Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras a, b, c, d, e, combinadas duas a duas, e consideremos os dois conjuntos abaixo:

1) ab ac ad ... bc ... de

2) cde bde bce ... ade ... abc

o primeiro formado com as combinações simples dos elementos, dois a dois, o segundo, dos agrupamentos que se obtêm com as letras dadas, e que não figuram em cada combinação.

Como de cada combinação, forma-se um agrupamento do outro conjunto, o número das combinações simples dos n elementos k a k, é igual ao número de agrupamentos do segundo conjunto. Si provarmos que nêste conjunto, estão as combinações simples dos n elementos, $(n-k)$ a $(n-k)$, ficará demonstrada a relação:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad n > k \geqslant 1$$

Ora, como já vimos, os agrupamentos do conjunto (2) são simples e de classe (n - k); êles diferem, um do outro, pela natureza de seus elementos, pois si dois dêles tivessem os mesmos elementos, as combinações que lhes deram origem, teriam tambem os mesmos elementos, o que seria absurdo. Os agrupamentos de classe (n - k) são portanto, combinações simples, dos elementos dados, (n - k) a (n - k).

Para provarmos que não falta nenhuma combinação, procedamos por absurdo. Suponhamos que falte uma combinação, no caso do exemplo acd. Ora, o agrupamento formado com os k elementos restantes (be no exemplo dado) é uma combinação simples, de classe k, dos elementos em jôgo, e deve estar entre as combinações de partida; dela, portanto, com o critério dado, formamos a combinação de classe (n - k) que supúnhamos faltar. Logo, no segundo conjunto estão as combinações (todas as combinações) de classe (n - k), dos n elementos dados.

Como observamos atrás, provado que no segundo conjunto estão as combinações simples, (n - k) a (n - k), dos n elementos, fica demonstrada a relação:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad n > k \geqslant 1$$

26 - Teorema. $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$

Por definição, para $k > 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ \ldots\ k}$$

Decompondo-se a fração do segundo membro dessa igualdade, temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2\ldots(k-1)} \quad \frac{n-k+1}{k}$$

Ora, por definição, para $k - 1 > 1$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \ldots (k-1)}$$

Logo

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

Escólio - Nesta demonstração, deve-se supor $k-1 \geqslant 2$; é facil, no entanto, verificar-se que a expressão é valida para $n \geqslant k - 1 \geqslant 0$, ou seja $n \geqslant k \geqslant 1$. Para $k = 0$, o segundo membro da expressão não tem sentido e, portanto, ela não verdadeira.

A expressão é valida para $n < k$, como se verifica facilmente.

27 - Teorema. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Ora

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k-1}$$

e pelo teorema anterior

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}$$

Somando-se membro a membro essas igualdades, temos:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}$$

Pondo-se $\binom{n}{k-1}$ em evidência, no segundo membro, ficamos com

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right)$$

Somando-se membro a membro essas igualdades, simplificando-se o resultado, e desprezado no primeiro membro, o coeficiente

$$\binom{k-1}{k} = 0,$$

temos a relação

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \dots + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

e o teorema fica demonstrado.

32 - Teorema das diagonais.

Do teorema anterior temos:

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \dots + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Substituindo-se cada parcela e a soma pelo seu coeficiente binomial complementar, a igualdade não se destrói e, portanto,

$$\binom{k-1}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{n}{n-k+1} = \binom{n-1}{n-k+1}$$

e o teorema fica demonstrado.

Capítulo Terceiro

BINÔMIO DE NEWTON

33 - Vamos deduzir a fórmula do binômio de Newton, i. é, vamos provar que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n \qquad n \geqslant 1$$

Faremos a demonstração por recorrência ou indução matématica; portanto:

a) demonstraremos o teorema para um ou mais casos particulares: n = 1,2,3.
b) suporemos a fórmula verdadeira para o expoente n - 1 (natural) qualquer;
c) provaremos que se a fórmula fôr verdadeira para o expoente n - 1, será verdadeira para o valor n, e assim ficará demonstrado o teorema.

Da definição de potência, e da álgebra elementar sabemos que:

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

e

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ou

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

e

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

e portanto, a fórmula do binômio é verdadeira para $n =$ $= 1, 2, 3$.

Ora, podemos supôr que o desenvolvimento seja verdadeiro para o expoente $n - 1$ (natural) qualquer, isto é, que

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b + \dots + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}$$

Supondo-se verdadeira essa fórmula, vamos demonstrar que o teorema é verdadeiro para o valor n do expoente, isto é, que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{1}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Ora, por hipótese, temos

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b + \dots +$$

$$+ \binom{n-1}{r}a^{n-r-1}b^r + \dots + \binom{n-1}{n-2}ab^{n-2} + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa igualdade por $a + b$, e aplicando-se a <u>relação de Stifel</u>, na redução dos termos semelhantes, vamos ter:

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^{n-2}b + \dots + \binom{n-1}{r}a^{n-r-1}b^r + \dots + \binom{n-1}{n-1}b^{n-1}$$

$$a + b = a + b$$

$$\begin{array}{llll}
\binom{n-1}{0}a^n + \binom{n-1}{1}a^{n-1}b + \dots & + \binom{n-1}{r}a^{n-r}b^r + \dots & + \binom{n-1}{n-1}ab^{n-1} & \\
\qquad\qquad\;\; \binom{n-1}{0} & + \binom{n-1}{r-1} & + \binom{n-1}{n-2} & + \binom{n-1}{n-1}b^n
\end{array}$$

$$(a+b)^n = \binom{n-1}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n-1}{n-1}b^n$$

Como

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = 1$$

e

$$\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1,$$

substituindo-se

$$\binom{n-1}{0} \text{ por } \binom{n}{0}$$

e

$$\binom{n-1}{n-1} \text{ por } \binom{n}{n}$$

temos que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n \qquad n \geqslant 1$$

Fica, portanto, demonstrado que se a fórmula do binômio fôr verdadeira para o expoente natural $n - 1$, será verdadeira para o valor n.

Ora a fórmula é verdadeira os valores 1, 2 e 3; logo será verdadeira para o valor 4; sendo verdadeira para o valor 4 será para o número 5 e assim por diante, sendo, portanto, verdadeira para um expoente natural n qualquer, igual ou maior que 1.

Empregando-se o sinal de somatoria, a fórmula do binômio de Newton pode ser escrita assim:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

34 - <u>Corolário.</u> $(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$

Com efeito,

$$(a-b)^n = [a+(-b)]^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-1.b)^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-1)^i b^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

Logo

$$(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^{n-i}b^i \qquad n \geqslant 1$$

34 - <u>Teorema das linhas, no triângulo de Pascal.</u> -

Se na fórmula do binômio

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

fizermos $a = b = 1$, vamos ter:

$$2^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}.1^i$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$$

o que demonstra o <u>teorema das linhas</u>.

35 - Se na fórmula do binômio

Capítulo Quarto

ARRANJOS E COMBINAÇÕES COMPLETAS

§ 1. ARRANJOS COMPLETOS

41 - Definição. - Dados n elementos (distintos), chamamos arranjos completos de classe k, dos n elementos, aos agrupamentos sem repetição ou com repetição, formados com k dos n elementos dados, de maneira que um agrupamento difira do outro, ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos.

Os arranjos completos de classe k, de n elementos, tambem se dizem arranjos completos dos n elementos, k a k ou tomados k a k.

42 - Notação. - O número dos arranjos completos de n elementos, k a k, é denotado com os símbolos:

$$A'_{n,k} \qquad D'_{n,k} \qquad D^{(r)}_{n,k} \qquad A^{(r)}_{n,k}$$

43 - Teorema. - Para passarmos dos arranjos completos de classe k - 1, de n elementos (distintos), para os de classe k, dos mesmos elementos, coloca-se depois de cada agrupamento, cada um dos elementos dados.

Com efeito, suponhamos formados os arranjos completos de classe k - 1, de n elementos distintos. Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras a, b, c, d, e, dispostas duas a duas:

aa, ab, ac, ad, ae, bb, ... ed, ee.

A classe de cada agrupamento é k - 1, e colocando-se nele um elemento, torna-se de classe k; como vamos formar os arranjos completos, não importa que em alguns a-

grupamentos coloque-se um elemento que figure neles, e haja repetição.

Para provarmos que os agrupamentos formados, são os arranjos (todos os arranjos) completos, dos n elementos, k a k, temos que provar ainda, que dois agrupamentos quaisquer diferem ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos, e não falta nenhum deles. Para isso suponhamos os agrupamentos formados, dispostos em colunas; os que provêm de um mesmo arranjo de classe k - 1, numa coluna, os que provêm de outro, noutra coluna:

aaa	aba	aca	...	bba	...	eda	eea
aab	abb	acd	...	bbb	...	edb	eeb
aac	abc	acc	...	bbc	...	edc	eec
aad	adb	acd	...	bbd	...	edd	eed
aae	abe	ace	...	bbe	...	ede	eee

Ora, assim dispostos, os agrupamentos que estão n'ua mesma coluna, diferem pela natureza do último elemento, e os que estão em colunas diferentes, na pior das hipóteses, pela ordem ou natureza dos k - 1 primeiros elementos, porque não estando n'ua mesma coluna, êles formam arranjos distintos de classe k - 1.

Para demonstrarmos que não falta nenhum arranjo, procedemos por absurdo. Suponhamos que falte um arranjo de classe k, dos n elementos dados. No caso que consideramos, suponhamos faltar o agrupamento edd, por exemplo. Ora, desprezando-se o último elemento desse agrupamento, formamos um arranjo de classe k - 1, dos mesmos elementos; no caso, o arranjo ed. Êsse arranjo ed, de classe k - 1, deve estar entre os de partida (partimos de todos os arranjos completos, de classe k - 1), e aplicando-se o teorema, deveríamos colocar depois dêle o elemento desprezado no agrupamento de classe k, e assim formaríamos o arranjo que, por absurdo, supúnhamos não ter formado.

Escólio. - Desde que os arranjos completos, um a um de n elementos (distintos) são êsses mesmos elementos, aplicando-se o teorema anterior, podemos formar com êles os arranjos completos de classe 2, com os de classe 2, os de classe três, e assim por diante até os de classe k.

44 - Teorema. $D'_{n,k} = n.D'_{n,k-1}$

No teorema do número 43, vimos que cada arranjo da classe k - 1, de n elementos (distintos), desdobra-se em n arranjos completos de classe k, dos mesmos elementos, e portanto, o número dos arranjos obtidos é igual ao número dos arranjos primitivos, $D'_{n,k-1}$ multiplicado pelo número n em que cada um se desdôbra, isto é,

$$D'_{n,k} = n.D'_{n,k-1}$$

45 - Corolário. $D'_{n,k} = n^k$

Observando-se que $D'_{n,1} = n$, e aplicando-se a fórmula do teorema anterior, para valores secessivos de k, a partir de 2, temos:

$$D'_{n,1} = n$$

$$D'_{n,2} = n.D'_{n,1}$$

$$D'_{n,3} = n.D'_{n,2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D'_{n,k} = n.D'_{n,k-1}$$

Multiplicando-se membro a membro essas igualdades e simplificando-se o resultado temos:

$$D'_{n,k} = \underbrace{n.n.n. \ldots}_{k} = n^k \qquad k > 1$$

ou seja, o número dos arranjos completos de n elementos (distintos), k a k, é uma potência de n, cujo expoente é k.

Escólio. - Nessa demonstração, supusemos $k > 1$; para $k = 1$, o teorema é verdadeiro, pois

$$D'_{n,1} = n = n^1$$

§ 2. COMBINAÇÕES COMPLETAS

46 - Definição. - Dados n elementos (distintos), chamamos combinações completas, de classe k, dos n elementos, aos agrupamentos sem repetição ou com repetição, formados com k dos elementos dados, de maneira que um agrupamento difira do outro, pela natureza de seus elementos.

A diferença diz respeito à natureza dos elementos que ocupam a mesma posição em cada agrupamento supostos na ordem natural. Assim os agrupamentos aaaab, aabbb, embora tenham os mesmos elementos a e b, são combinações distintas, pois o 3º elemento do agrupamento aaaab é diferente do 3º elemento do agrupamento aabbb.

Duas combinações da mesma classe, de n elementos (distintos) são, portanto, distintas, quando não têm os mesmos elementos, ou quando têm os mesmos elementos, mas em número diferente. Nas combinações aaaab, aabbb aparecem os mesmos elementos a e b; na primeira, no entanto, a aparece 4 vezes, e b, 1, ao passo que na segunda, a aparece 2 vezes e b, três.

As combinações completas de classe k, de n elementos, também se dizem as combinações completas dos n elementos, k a k, ou tomados k a k.

47 - Notação. - O número das combinações completas de n elementos k a k, é denotado pelos símbolos:

$$C'_{n,k} \quad \text{ou} \quad C^{(r)}_{n,k}$$

Capítulo Quinto

PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS IGUAIS
POLINÔNIO DE LEIBNIZ

§ 1. PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS IGUAIS

52 - Consideremos um conjunto de n elementos, nem todos distintos, formando os elementos iguais outros conjuntos, respectivamente de $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ elementos.

Consideremos, por exemplo, um conjunto de 15 letras, 3 iguais e a, 5 iguais a b, 2 iguais a c, 4 iguais a d, e uma igual a e.

a a a b b b b b c c d d d d e

É imediato que

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n$$

Em nosso exemplo

$$3 + 5 + 2 + 4 + 1 = 15$$

53 - Definição. - Dados n elementos, nem todos distintos, chamamos permutações dêsses n elementos, aos agrupamentos formados com os n elementos dados, de maneira que um agrupamento difira do outro pela ordem de seus elementos.

54 - Notação. - Para denotarmos o número de permutações, de n elementos, nem todos distintos, formando os elementos iguais, outros conjuntos respectivamente de α, $\beta, \ldots \lambda$ elementos, usamos o símbolo

$$P_n^{\alpha, \beta, \ldots \lambda}$$

55 - Teorema: $P_n^{\alpha, \beta, \ldots \lambda} = \dfrac{n!}{\alpha! \beta! \ldots \lambda!}$

Para auxiliar o raciocínio, suponhamos 15 letras, 3 iguais a a, 5 iguais a b, 2 iguais a c, 4 iguais a d e uma igual a e, e suponhamos distintos, por um instante, os elementos iguais, afetando-os de índices, para diferençá-los:

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4 \; b_5 \; c_1 \; c_2 \; d_1 \; d_2 \; d_3 \; d_4 \; e$$

Supostos todos os elementos distintos, o número de permutações que podemos formar com êles é n!

Tomemos agora essas permutações e coloquemo-las em colunas, pondo n'uma mesma vertical, aquelas que diferem só pela posição relativa dos aa.

$$a_1a_2a_3A\ldots a_1a_2a_3L\ldots Ma_1Na_2Ra_3\ldots Sa_1a_2Ta_3W\ldots La_1a_2a_3$$
$$a_1a_3a_2A\ldots a_1a_3a_2L\ldots Ma_1Na_3Ra_2\ldots Sa_1a_3Ta_2W\ldots La_1a_3a_2$$
$$a_3a_1a_2A\ldots a_3a_1a_2L\ldots Ma_3Na_1Ra_2\ldots Sa_3a_1Ta_2W\ldots La_3a_1a_2$$
$$a_2a_1a_3A\ldots a_2a_1a_3L\ldots Ma_2Na_1Ra_3\ldots Sa_2a_1Ta_3W\ldots La_2a_1a_3$$
$$a_2a_3a_1A\ldots a_2a_3a_1L\ldots Ma_2Na_3Ra_1\ldots Sa_2a_3Ta_1W\ldots La_2a_3a_1$$
$$a_3a_2a_1A\ldots a_3a_2a_1L\ldots Ma_3Na_2Ra_1\ldots Sa_3a_2Ta_1W\ldots La_3a_2a_1$$

É imediato que se supusermos os aa todos iguais, o número de permutações distintas reduzir-se-á ao número de colunas dêsse quadro, isto é, reduzir-se-á a

$$n! \div \alpha! = \frac{n!}{\alpha!}$$

Considerando-se êsses agrupamentos distintos, onde os aa são iguais, e cujo número é $\dfrac{n!}{\alpha!}$

aaaA ... aaaL ... NaNaRa ... SaaTaW ... Laaa

coloquemô-los em colunas, pondo-se numa vertical, aque - les que diferem <u>só</u> pela posição relativa dos bb:

$$Ub_1b_2b_3b_4b_5 \;\dots\; Bb_1b_2Cb_3b_4b_5 \;\dots\; b_1b_2b_3b_4b_5U$$

$$Ub_2b_1b_3b_4b_5 \;\dots\; Bb_2b_1Cb_3b_4b_5 \;\dots\; b_2b_1b_3b_4b_5U$$

....

$$Ub_5b_4b_3b_2b_1 \;\dots\; Bb_5b_4Cb_3b_2b_1 \;\dots\; b_5b_4b_3b_2b_1U$$

Supondo-se agora que todos os <u>bb</u> se tornem iguais, o número de permutações distintas será igual ao número de colunas

$$\frac{n!}{\alpha!} \div \beta! = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$$

Vemos assim que tornando-se <u>iguais</u> os elementos que fizemos <u>distintos</u>, o número de permutações reduz-se ao quociente, cujo dividendo é o numero primitivo de permuções e o divisor, o fatorial do número dos elementos tornados iguais.

Assim:

1) quando os <u>aa</u> se tornam iguais, o número de permutações é

$$\frac{n!}{\alpha!}\,.$$

2) quando os <u>bb</u> depois se tornam iguais,

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$$

e assim por diante

Logo, quando os últimos elementos se tornarem i - guais, o número das permutações será

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\dots\,\lambda!}$$

Como entre as permutações obtidas não falta nenhuma das permutações que poderíamos formar com os elementos dados <u>(nem todos distintos)</u>, porque essa falta implicaria outra, nas permutações, quando os elementos foram tornados distintos - <u>o que seria absurdo</u>, fica provado que

$$P_n^{\alpha,\beta,\dots\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\dots\,\lambda!}$$

§ 2. POLINÔMIO DE LEIBNIZ

56 - Vamos demonstrar a fórmula

$$(a_1+a_2+\dots+a_p)^n = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p=n} \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\dots\,\alpha_p!}\, a_1^{\alpha_1}\, a_2^{\alpha_2} \dots a_p^{\alpha_p}$$

que nos permite calcular a potência <u>n</u> - esima de um polinômio, sendo n inteiro e positivo.

A somatória do segundo membro refere-se a todas as soluções <u>inteiras e não-negativas</u>, da equação

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$$

a) Para demonstrarmos essa fórmula, notemos primeiro que um <u>termo da potência</u>

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n$$

<u>depois de desenvolvida, é um produto de n fatores.</u>

Com efeito,

1) quando desenvolvemos

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^2,$$

cada termo é um produto de 2 fatores;

2) quando desenvolvemos

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^3,$$

cada termo é um produto de 3 fatores, e assim por diante.

Os termos de

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n,$$

serão, portanto, produtos de n fatores.

Essa proposição pode ser demonstrada rigorosamente por recorrência, e dela só acenamos a demonstração.

b) Notemos também, em segundo lugar, que nos termos de

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n,$$

os únicos fatores que podem aparecer são os números a_1, a_2, ... a_p e, portanto, um termo qualquer do desenvolvimento, a menos da ordem, será da forma:

$$\underbrace{a_1\, a_1 \dots a_1}_{\alpha_1}\ \underbrace{a_2\, a_2 \dots a_2}_{\alpha_2} \dots \underbrace{a_p\, a_p \dots a_p}_{\alpha_p}$$

sendo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$$

Logo cada termo do desenvolvimento, antes da redução dos termos similhantes, terá a fórma

$$a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \dots a_p^{\alpha_p}$$

com

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$$

Escólio - Convem observar que nas parcelas do desenvolvimento, podemos supor todos os termos a_1 a_2 ... a_p do polinômio, introduzindo-se os que não aparecem, com o expoente zero. Na contagem do número de fatores de um termo, no entanto, êsses fatores, com expoente zero, devem ser desprezados.

c) Notemos mais, em terceiro lugar, que todo produto de n fatores iguais a a_1, a_2, ... a_p, qualquer que seja a ordem deles, é um termo da potência

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n$$

Para auxiliar o raciocínio, consideremos a potência

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^5;$$

e provemos que o produto

$$a_1 a_2 a_2 a_3 a_1$$

é um termo do desenvolvimento.

Com efeito, êste termo provem dos produtos:

1) do primeiro termo (a_1) do primeiro fator, pelo segundo termo (a_2) do segundo fator;

2) dêsse resultado $(a_1 \cdot a_2)$, pelo segundo termo (a_2), do terceiro fator;

3) dêsse resultado $(a_1 a_2 a_2)$ pelo terceiro termo (a_3) do quarto fator;

4) dêsse resultado $(a_1 a_2 a_2 a_3)$, pelo primeiro termo (a_1) do quinto fator.

Resulta, portanto, dessa observação que dado um termo:

Capítulo Sexto

CONGRUÊNCIA

62 - Definição. - Dados 2 números inteiros a e b e um terceiro d, inteiro e positivo, diz-se que a é congruente a b, em relação ao módulo d, quando a diferença a-b é divisivel por d.

Assim 18 é congruente a 12, em relação ao módulo 3, porque (18-12) é divisivel por 3.

62 - Notação. - Para denotar-se que o número a é congruente a b, em relação ao módulo d, usam-se as expressões:

$$a \equiv b \quad (\text{mod. } d)$$

$$a \equiv b \quad \text{mod. } d$$

$$a \equiv b \quad \ldots \ d$$

que se lêem: a é congruente a b, em relação ao módulo d, ou em relação a d.

Qualquer uma das expressões anteriores chama-se congruência e o sinal $\equiv$, sinal de congruência.

Para denotar-se que o número a não é congruente a outro b, em relação a um módulo d, usam-se as expressões:

$$a \not\equiv b \quad (\text{mod. } d)$$

$$a \not\equiv b \quad \text{mod. } d$$

$$a \not\equiv b \quad \ldots \ d$$

que se lêem: a não é congruente a b, em relação ao módulo d, ou em relação a d.

63 - Teorema. - Todo número é congruente a êle mesmo, em relação a um módulo qualquer. (Propriedade reflexiva da congruência).

Com efeito, por definição, para que se possa escrever

$$a \equiv a \quad \ldots \ d$$

basta que a diferença (a - a) seja divisivel por d. Como a - a = 0, e o número zero é divisivel por qualquer número d, fica provado que

$$a \equiv a \quad \ldots \ d$$

64 - Teorema. - Se um número a é congruente a b, em relação ao módulo d, inversamente b é congruente a a, em relação ao mesmo módulo. (Propriedade simétrica ou comutativa da congruência).

Com efeito se,

$$a \equiv b \quad \ldots \ d$$

por definição, (a - b) é divisivel por d; ora se (a - b) é divisivel por d, (b - a) também o é e, portanto

$$b \equiv a \quad \ldots \ d$$

Escólio. - Como, quando

$$a \equiv b \quad \ldots \ d$$

tambem

$$b \equiv a \quad \ldots \ d$$

ao envez de dizermos a é congruente a b em relação ao módulo d, podemos dizer que a e b são congruentes em relação ao módulo d, isto é, que um é congruente ao outro, em relação ao módulo d.

65 - Teorema. - Dois números congruentes a um terceiro, em relação a um certo módulo, são congruentes entre si, em relação ao mesmo módulo. (Propriedade transitiva

da congruência).

Sejam

$$a \equiv b \quad \ldots d \qquad (I)$$

$$a \equiv c \quad \ldots d \qquad (II)$$

Vamos provar que

$$b \equiv c \quad \ldots d$$

Ora, por definição, de (I) e (II), temos

$$a - b = dq \qquad (I')$$

$$a - c = dq' \qquad (II')$$

sendo q e q' números inteiros.

Subtraindo-se membro a membro as igualdades I' e II' teremos

$$b - c = d(q' - q)$$

Ora, q e q' são números inteiros; logo q' - q é também inteiro; portanto, b - c é divisivel por d e por definição, podemos escrever:

$$b \equiv c \quad \ldots d$$

66 - Definição. - Tôda relação com as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva toma o nome de relação equabile.

A congruência é, portanto, uma relação equabile.

67 - Teorema. - Dadas duas congruências, com módulos iguais, podemos somá-las membro a membro, conservando-se o módulo (Carater de uniformidade da congruência, em relação à soma).

Sejam

$$a \equiv b \quad \ldots d \qquad (I)$$

$$a' \equiv b' \quad \ldots d \qquad (II)$$

Vamos provar que

$$a + a' \equiv b + b' \quad \ldots d.$$

Por definição, de (I) e (II), tiramos

$$(III) \qquad a - b = dq \qquad (q \text{ inteiro})$$

$$(IV) \qquad a' - b' = dq' \qquad (q' \text{ inteiro})$$

e somando-se membro a membro as igualdades III e IV, temos

$$(a + a') - (b + b') \equiv d(q + q')$$

Ora, se q e q' são inteiros, q + q' também o é, e (a + a') - (b + b') é divisivel por d; por definição,portanto, podemos escrever

$$a + a' \equiv b + b' \quad \ldots d$$

68 - Corolário. - Uma congruência não se destroi, quando aos dois membros, soma-se um mesmo número, e conserva-se o módulo.

De

$$a \equiv b \quad \ldots d,$$

como

$$c \equiv c \quad \ldots d$$

temos, aplicando-se o teorema anterior

$$a + c \equiv b + c \quad \ldots d$$

69 - Teorema. - Dadas duas congruências, com módulos iguais, podemos subtraí-las membro a membro, conservando-se o módulo (Carater de uniformidade da congruência, em relação à diferença).

Demonstração análoga à do teorema do número 67.

70 - Corolário. - Uma congruência não se destroi, quando dos dois membros, tira-se um mesmo número e con -

serva-se o módulo.

Demonstração análoga à do corolário do número 68.

71 - Teorema. - Em uma congruência, podemos transpôr um termo de um membro para outro, contanto que lhe mudemos o sinal.

Se

$$\text{(I)} \qquad a - b \equiv a' + b' \quad \ldots d,$$

vamos provar que

$$a - a' \equiv b + b' \quad \ldots d$$

Com efeito, somando-se $(b - a')$ aos dois membros de (I) temos

$$(a - b) + (b - a') \equiv (a' + b') + (b - a') \quad \ldots d$$

ou

$$a - a' \equiv b + b' \quad \ldots d$$

72 - Teorema. - Uma congruência não se destroi quando se multiplicam os dois membros por um mesmo número, e conserva-se o módulo.

Se

$$a \equiv b \quad \ldots d,$$

vamos provar que

$$a.c \equiv b.c \quad \ldots d,$$

Com efeito, se

$$a \equiv b \quad \ldots d,$$

por definição,

$$\text{(I)} \qquad a - b = dq \qquad \text{(q inteiro)}$$

Multiplicando-se os dois membros de (I) por c, temos

$$a \cdot c - b \cdot c = d(q \cdot c)$$

Como q e c são inteiros, q.c também o é, e a diferença ac - bc é divisivel por d; por definição

$$ac \equiv bc \quad \ldots d,$$

73 - Teorema. - Dadas duas congruências em relação a um certo módulo, podemos multiplicá-las membro a membro, conservando-se o módulo. (Carater de uniformidade da congruência, em relação ao produto).

Sejam

$$a \equiv b \quad \ldots d,$$

$$a' \equiv b' \quad \ldots d$$

Vamos provar que

$$aa' \equiv bb' \quad \ldots d.$$

Ora, de

$$a \equiv b \quad \ldots d,$$

e

$$a' \equiv b' \quad \ldots d$$

temos, respectivamente, pelo teorema anterior

$$aa' \equiv ba' \quad \ldots d,$$

$$a'b \equiv bb' \quad \ldots d$$

e aplicando-se a propriedade transitiva,

$$aa' \equiv bb' \quad \ldots d$$

74 - Teorema. - A condição necessária e suficiente para que dois números sejam congruentes em relação a um terceiro, é que dêem restos iguais divididos por êsse terceiro.

a) A condição é suficiente.

Capítulo Oitavo

EXERCÍCIOS E COMPLEMENTOS

1 - Formar as disposições simples, 3 a 3, das letras a, b, c, d.

Primeiro formam-se as disposições uma a uma, depois duas a duas, e finalmente 3 a 3. (Teorema do nº 10).

Disposições uma a uma:

a , b , c , d.

Disposições duas a duas:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Disposições três a três:

abc	acb	adb	bac	bca	bda
abd	acd	adc	bad	bcd	bdc
cab	cba	cda	dab	dba	dca
cad	cbd	cdb	dac	dbc	dcb

2 - Formar as disposições simples, 4 a 4, das letras x, y, z, t. Que nome tomam essas disposições?

As disposições formam-se segundo o teorema do nº 10; essas disposições têm o nome de permutações.

3 - Quantas são as disposições simples de classe k - 2, de p elementos distintos?

Aplique-se a fórmula fundamental, (teorema do nº12), e teremos a resposta:

$$D_{p,k-2} = p(p-1) \dots (p-k+3)$$

4 - Quantos são as disposições simples de classe k - 1, de p - 1 elementos distintos?

Resposta:

$$D_{p-1,k-1} = (p-1)(p-2) \dots (p-k+1)$$

5 - Quantos são os números de 4 algarismos (todos distintos), que podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 7, 8 e 9?

Os números de 4 algarismos são agrupamentos de classe 4; como os números devem ser de algarismos todos distintos, os números serão agrupamentos simples.

Ora, os números de 4 algarismos são distintos quando tiverem algarismos distintos ou os mesmos algarismos em ordens diferentes; são, portanto, arranjos, e como entram em jogo só os algarismos 1, 2, 4, 7, 8 e 9, a resposta é esta: teremos tantos números, quantos forem as disposições simples, de classe 4, de 6 elementos distintos, i.é:

$$D_{6,4} = 6.5.4.3 = 360$$

6 - Quantos são os números de 3 algarismos - todos distintos, que existem em nosso sistema de numeração?

Aparentemente a resposta é:

$$D_{10,3} = 10.9.8 = 720$$

pois, ha 10 algarismos em nosso sistema de numeração.

Ora, formando-se, no entanto, as disposições simples de classe 3, dos alagarismos 1,2,3,4,...9,0, formaremos agrupamentos da forma:

012 , 021 ... 098

que não são números de 3 algarismos e, portanto, devem ser desprezados na contagem dos números.

Para contarmos esses agrupamentos que principiam por zero, podemos desprezar o zero, pois não altera o número de agrupamentos:

$$012 \quad 021 \quad \ldots \quad 098$$

Ora, desprezados os zeros, os agrupamentos que eram de classe 3, passam a ser de classe 2, e como eram simples, continuam simples ainda. Os elementos que entram em jogo, nestes agrupamentos, desprezados os zeros, são os algarismos significativos, e como ainda continuam a diferir pela natureza ou ordem de seus elementos, os agrupamentos que principiam por zero são tantos quantas as disposições simples, de classe 2, de 9 elementos distintos, pois é facil verificar-se que não ha omissão desses agrupamentos, quando se desprezam os zeros, nas disposições simples de classe 3.

Ha, portanto,

$$D_{10,3} - D_{9,2} = 10.9.8 - 9.8 = 9.8(10 - 1) = 9^2.8 = 648$$

números de 3 algarismos, todos distintos, em nosso sistema de numeração.

7 - Quantos são os números de 5 algarismos, todos distintos, que existem em nosso sistema de numeração?

Resposta:

$$D_{10,5} - D_{9,4} = 27680$$

8 - Quantos números de p algarismos, todos distintos, podemos formar com os 9 algarismos significativos?

Resposta:

$$D_{9,p} = 9.8 \ldots (9 - p + 1)$$

<u>Escólio</u>: neste exercício $p \leqslant 9$.

9 - Quantos números de p algarismos, todos distintos, existem em nosso sistema de numeração?

Resposta:

$$D_{10,p} - D_{9,p-1} =$$

$$= 10.9 \ldots (10 - p + 1) - 9.8 \ldots (9 - p + 2) =$$

$$= 10.9 \ldots (10 - p + 1) - 9.8 \ldots (10 - p + 1) =$$

$$= 9.8 \ldots (10 - p + 1)(10 - 1) = 9^2.8.7 \ldots (10 - p + 1)$$

<u>Escólio</u>: neste exercício $p \leqslant 10$.

10 - Quantos são os números de k algarismos todos distintos, no sistema de base m?

Resposta:

$$D_{m,k} - D_{m-1,k-1}$$

<u>Escólio</u>: neste exercício $k \leqslant m$.

11 - Desenvolver a resposta do exercício anterior:

$$D_{m,k} - D_{m-1,k-1}$$

12 - Quantos são os números inferiores a 1.000, com algarismos todos distintos, que existem em nosso sistema?

Os números inferiores a 1.000 são números de 1, 2 e 3 algarismos.

Ora, ha

$$D_{9,1} = 9$$

$$D_{10,2} - D_{9,1} = 90 - 9 = 81$$

e

$$D_{10,3} - D_{9,2} = 10.9.8 - 9.8 = 648$$

números de 1, 2 e 3 algarismos, todos distintos, em nosso sistema de numeração; ha, portanto

$$9 + 81 + 648 = 738$$

números inferiores a 1.000, com algarismos todos distintos em nosso sistema de numeração.

13 - Quantos sinais podemos fazer com 4 bandeiras de cores diferentes, levantando-se 3 delas, uma depois da outra, e não se admitindo sinais com bandeiras da mesma côr?

Os sinais são agrupamentos de classe 3, e como não se admitem bandeiras iguais num mesmo sinal, os agrupamentos são simples ou sem repetição.

Como os sinais são distintos quer sejam feitos por bandeiras diferentes, ou as mesmas bandeiras levantadas em ordens diferentes, teremos tantos sinais quantas forem as disposições simples de 4 elementos três a três, i.é.:

$$D_{4,3} = 4.3.2 = 24$$

14 - Quantos sinais podemos formar com foguetes de 7 cores diferentes, soltando-se 4 deles, um depois do outro, e não se admitindo sinais com foguetes de cores iguais?

Resposta:

$$D_{7,4} = 7.6.5.4 = 840$$

15 - Três estudantes possuem 4 paletós, 5 calças e 6 chapéus. De quantos modos podem se vestir?

Os paletós podem ser distribuidos de $D_{4,3} = 24$ modos diversos; as calças de $D_{5,3} = 60$ modos, e os chapéus de $D_{6,3} = 120$. Assim podemos fazer

$$24 \times 60 \times 120 = 172.800$$

agrupamentos diversos, ou modos distintos das 3 pessoas se vestirem.

Observem que tal número representa aproximadamente o número de dias de 473 anos, de quasi 5 séculos.

16 - Definição de potência fatorial - Dados um nº k inteiro e maior que um, e um nº n tambem inteiro, chamamos potência fatorial de ordem k, do nº n, ao produto de k fatores consecutivos cujo menor fator é n:

$$n(n + 1)(n + 2) \dots (n + k - 1)$$

Por estensão, se k for igual a um fazemos a potência fatorial igual a n.

A potência fatorial de ordem k de um nº n, indica-se com o símbolo

$$n^{\overline{k}}$$

e portanto, por definição

$$n^{\overline{k}} = n(n + 1) \dots (n + k - 1) \qquad \text{para } k > 1$$

$$n^{\overline{k}} = n \qquad \text{para } k = 1$$

17 - Escrever a fórmula do nº 12, que dá o valor de $D_{n,k}$ empregando-se o símbolo da potência fatorial.

Ora,

$$D_{n,k} = n(n - 1) \dots (n - k + 1)$$

$$D_{n,k} = (n - k + 1) \dots (n - 1)\, n$$

$$D_{n,k} = (n - k + 1)^{\overline{k}}$$

Observem que esta fórmula é tambem verdadeira para o caso de k = 1.

Com efeito,

$$D_{n,1} = (n - 1 + 1)^{\overline{1}}$$

$$D_{n,1} = n^{\overline{1}} = n$$

18 - Demonstrar a relação:

$$(n + 1)^{\overline{k-1}} - n^{\overline{k-1}} = (n + 1)^{\overline{k}} \cdot (k + 1).$$

Para k >1, temos

179 - Das permutações dos números 1, 2, 3, 4,... n, qual a que apresenta o menor e o maior nº de inversões em relação à permutação 1, 2, ... n?

Resposta: a que apresenta menor nº de inversões é 1, 2, ... n; e a que apresenta maior nº é n(n-1) ... 1.

180 - Qual o nº de inversões da permutação n(n-1)... ... 1, em relação à permutação 1, 2, ... n?

Resposta:

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

ÍNDICE

DO MESMO AUTOR:

TEORIA ELEMENTAR
DOS DETERMINANTES

Preço Cr$ 50,00