SÉRIE A COLEÇÃO E. C. C. N. 4

F. A. LACAZ NETTO

LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

...TÍFICA S/A
...7 — S. PAULO

GH01066

LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

POR

F. A. LACAZ NETTO

Prof. interino da Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo

S. PAULO

1943

PREFACIO

O presente trabalho, sem a parte de exercícios, já foi publicado, sob forma de apostila.

Ele consta das aulas que demos vários anos, nos antigos cursos pré-politécnicos; suas lições servem de base à teoria dos determinantes, assunto de outro livro de nossa autoria, já publicado.

A matéria deste volume é bastante conhecida; parte dela era até exigida nos programas da última série do curso ginasial, antes da Reforma Capanema. Estas lições não apresentam, portanto, nada de original, a não ser quanto à exposição, em que talvez pequemos por excesso, no desejo de ser claros e rigorosos nos conceitos.

Num dos capítulos deste livro, fizemos um apanhado da teoria da congruência, para simplificar as demonstrações dos teoremas sobre inversões, de que tratamos tambem no fim do volume e apresentam grande interesse em determinantes, de acordo com a orientação que temos seguido, ao expôr esse argumento.

O capítulo sobre congruência, neste volume, tem por fim, tambem, amenizar um pouco estas lições, com assunto que requer outro metodo de exposição, bem como dar idéia de um conceito importantíssimo, com que se inicia a Teoria dos Números.

Na parte de exercícios, seguimos uma orientação que julgamos bôa: alguns exercícios resolvidos e outros a resolver, logo depois. Os exercícios foram ordenados segundo os capítulos da parte teórica, tendo em vista ainda as dificuldades de solução.

Esperamos que o presente volume seja de alguma utilidade aos alunos de nossos Colégios; nele encontra-se a parte de Análise Combinatória exigida nos programas atuais, alem das que eram exigidas antigamente e que julgamos ao alcance dos estudantes do segundo ciclo ginasial, razão por que as deixamos em nossas Lições de Análise Combinatória, com a vantagem de apresentarmos um livro mais completo sobre o assunto.

F. A. LACAZ NETTO

São Paulo, maio de 1943.

Capítulo Primeiro

GENERALIDADES. ARRANJOS, PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES SIMPLES

§ 1. GENERALIDADES.

1 — **Definição de conjunto.** — Chamamos *conjunto* a um ente ou a uma reunião de entes. O conjunto de um só ente diz-se *unitário*. Um ente qualquer de um conjunto denomina-se *elemento* do conjunto.

2 — **Conjuntos finito e infinito.** — Um conjunto do qual podemos obter tantos elementos quantos quisermos, diz-se *infinito*. O conjunto dos números inteiros, dos números primos, dos pontos de um segmento, são exemplos de conjuntos infinitos.

Um conjunto que não é infinito, diz-se *finito*.

3 — **Agrupamento.** — Um conjunto unitário, ou um conjunto finito, cujos elementos estejam dispostos em linha horizontal, denominam-se *agrupamentos*.

O número de elementos de um agrupamento chama-se *classe* do agrupamento. Assim, os conjuntos abc, AEF, são de classe 3.

Os conjuntos de classe 1, 2, 3 ... tambem se dizem *unitários*, *binários*, *ternários*, etc.

4 — **Agrupamentos simples e com repetição.** — Um agrupamento cujos elementos sejam todos distintos, isto é, um agrupamento que não tenha elementos iguais, diz-se *simples* ou *sem repetição*. No caso contrário, *com repetição*.

5 — **Notação.** — Os elementos dos conjuntos de que vamos tratar, serão representados:

a) por letras do alfabeto latino (maiúsculas ou minúsculas);

b) por letras do alfabeto latino, afetadas de índice;

c) por números naturais.

6 — **Definição de análise combinatória.** — Análise combinatória ou cálculo combinatório é o ramo da matemática, que tem por fim estudar as propriedades dos agrupamentos que podemos formar, segundo certas leis, com os elementos de um conjunto finito.

§ 2. ARRANJOS E COMBINAÇÕES.

7 — Dados dois agrupamentos de classes iguais, é natural considerá-los distintos, sempre que tenham elementos diferentes. Assim consideram-se distintos os agrupamentos ABC e ABD.

Quando os agrupamentos têm os mesmos elementos, mas dispostos em ordens diferentes, êles podem ser considerados distintos ou não, conforme os entes que representarem. Por exemplo, si representarmos uma réta por 2 de seus pontos, A e B, AB e BA representam a mesma réta, e assim os agrupamentos AB e BA devem ser considerados iguais. Os números 34 e 43, no entanto, que podemos considerar como agrupamentos dos algarismos 3 e 4, são números diferentes, e os agrupamentos 34 e 43, embora tenham os mesmos elementos, devem ser considerados distintos, pois, representam números desiguais.

Dessas considerações resulta que ha agrupamentos que só se consideram distintos, quando diferem pela natureza de seus elementos, e outros, quando diferem pela natureza ou pela ordem dos elementos. Os primeiros têm o nome de *combinações*, e os segundos, de *arranjos*.

Arranjos são, portanto, agrupamentos que diferem ou pela *natureza*, ou pela *ordem* de seus elementos, e *combinações* são agrupamentos que diferem só pela *natureza* dos elementos.

§ 3. ARRANJOS SIMPLES.

8 — **Definição.** — Dados n elementos (distintos), chamamos *arranjos simples*, de classe k, dos n elementos, aos agrupamentos *sem repetição*, formados com k dos n elementos dados, de maneira que um agrupamento difira do outro, ou pela *natureza* ou pela *ordem* de seus elementos.

Os arranjos simples de classe k, de n elementos, tambem se dizem os arranjos simples dos n elementos, *k a k ou tomados k a k*.

Ao envez de arranjo, usa-se ainda a palavra *disposição;* arranjo passa por galicismo.

9 — **Notação.** — O número dos arranjos simples de n elementos, k e k, é denotado com os símbolos:

$$A_{n,k} \quad \text{ou} \quad D_{n,k}$$

10 — **Teorema.** — Para passarmos dos arranjos simples, de classe k—1, de n elementos (distintos), para os de classe k, dos mesmos elementos, coloca-se depois de cada agrupamento, cada um dos elementos dados, e que não figura nêle.

Com efeito, suponhamos formados os arranjos simples, de classe k—1, de n elementos (distintos). Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras a, b, c, d, e, dispostas duas a duas:

ab ac ad ..... cd .... de

A classe de cada agrupamento é k—1, e colocando-se nêle um elemento, torna-se de classe k; como cada agrupamento de partida é simples, e coloca-se um elemento que não figura nêle, ainda continua simples.

Para provarmos que êsses agrupamentos são *os* arranjos, (*todos os arranjos*), simples, dos n elementos, k a k, temos que provar ainda que dois agrupamentos quaisquer diferem, ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos, e não falta nenhum dêles. Para isso, suponhamos os agrupamentos formados, dispostos em colunas; os que provêm de um mesmo arranjo de classe k—1, numa coluna; os que provêm de outro, noutra coluna:

$$\begin{array}{lllllll} abc & acb & adb & \ldots & cda & \ldots & dea \\ abd & ace & adc & \ldots & cdb & \ldots & deb \\ abe & acd & ade & \ldots & cde & \ldots & dec \end{array}$$

Ora, assim dispostos, os agrupamentos que estão numa coluna, diferem pela natureza do último elemento, e os que estão em colunas diferentes, na pior das hipóteses, pela ordem ou natureza dos k—1 primeiros elementos, porque, estando em colunas diferentes, os k—1 primeiros elementos formam arranjos distintos.

Para demonstrarmos que não falta nenhum arranjo, procedemos *por absurdo*. Suponhamos que falte um arranjo simples, de classe k, dos n elementos dados. No caso que consideramos, suponhamos faltar *cdb*, por exemplo. Ora, desprezando-se o último elemento do agrupamento, formamos um arranjo simples, de classe k—1, dos mesmos elementos. (No caso do exemplo, *o arranjo cd*). Esse arranjo de classe k—1 deve estar entre os de partida (*partimos de todos os arranjos de classe k—1*), e aplicando-se o teorema, deveríamos colocar depois dêle, o elemento desprezado no agrupamento de classe k, pois, o elemento não figura no arranjo de classe k—1, e assim formaríamos o agrupamento que, por absurdo, supúnhamos faltar.

Escólio. — Desde que os arranjos simples, um a um, de n elementos (distintos), são êsses mesmos elementos, aplicando-se o teorema anterior, podemos formar com êles, os arranjos simples de classe dois, com os de classe dois, os de classe três, e assim por diante, até os de classe k, onde k forçosamente é menor do que n.

11 — **Teorema.** $D_{n,k} = (n-k+1)D_{n,k-1}$

No teorema do número 10, vimos que um arranjo simples, de classe k—1, de n elementos (distintos), desdobra-se em n—(k—1) = = n—k+1 arranjos simples, de classe k, dos mesmos elementos, e portanto, o número de arranjos obtidos é igual ao número de arranjos primitivos, $D_{n,k-1}$, multiplicado pelo número n—k+1 em que cada um se desdobra, isto é,

$$D_{n,k} = (n-k+1)D_{n,k-1}$$

12 — **Corolário.** $D_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1) \qquad k > 1$

Observando-se que $D_{n,1} = n$, e aplicando-se a fórmula do teorema anterior, para valores sucessivos de k, a partir de dois, temos:

$$\begin{aligned} D_{n,1} &= n \\ D_{n,2} &= (n-1)D_{n,1} \\ D_{n,3} &= (n-2)D_{n,2} \\ &\;\vdots \\ D_{n,k} &= (n-k+1)D_{n,k-1} \end{aligned}$$

Multiplicando-se membro a membro essas igualdades, e simplificando-se o resultado, temos;

$$D_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1) \qquad k > 1$$

ou seja: o número dos arranjos simples de n elementos distintos, tomados k a k, para k > 1, é um produto de k fatores consecutivos, cujo maior fator é n.

Escólio. — Para k = 1, já vimos que

$$D_{n,1} = n.$$

§ 4. PERMUTAÇÕES

13 — **Definição.** — Os arranjos simples de n elementos (distintos), cuja classe seja igual a n, tomam o nome de *permutações* dêsses elementos. *Permutações* de n elementos (distintos) são, portanto, *arranjos simples* dêsses elementos, tomados n a n.

Como os arranjos são agrupamentos que diferem ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos, e nas permutações não podem diferir pela natureza, pois, em todos os agrupamentos devem figurar todos os elementos dados, podemos dizer que as *permutações* são agrupamentos que diferem só pela *ordem* de seus elementos.

O teorema do número 10 permite formar as permutações de n elementos (distintos); basta formar os arranjos simples dos n elementos, n a n, a partir dos arranjos, um a um.

Em um capítulo especial sôbre permutações, daremos outra maneira de formar as permutações de n elementos (distintos).

14 — **Notação.** — O número das permutações de n elementos (distintos) é representado pelo simbolo

$$P_n .$$

15 — **Teorema.** $P_n = 1.2 \ldots n \qquad n > 1$

Com efeito para calcularmos P_n, sendo as permutações arranjos particulares, basta na fórmula:

$$D_{n,k} = n(n-1) \ldots (n-k+1)$$

do teorema do número 12, fazermos $k = n$, e portanto,

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1) \ldots (n-n+1)$$

Trocando-se a ordem dos fatores, teremos:

$$P_n = 1.2 \ldots n \qquad n > 1$$

16 — **Definição de fatorial.** — Dado um número natural $n > 1$, ao produto dos números naturais de 1 a n, chamamos fatorial do número n, ou fatores n. O fatorial de um número *n* é indicado com os simbolos:

$$n! \qquad \underline{|n} \qquad \pi(n).$$

Por definição, portanto:

$$n! = \underline{|n} = \pi(n) = 1.2 \ldots n \qquad n > 1$$

Estendendo-se o conceito, fazemos ainda por definição:

$$1! = 1 \quad \text{e} \quad 0! = 1$$

Escólio. — Resulta dessa definição e do teorema 15, que

$$P_n = n!$$

§ 5. COMBINAÇÕES SIMPLES.

17 — **Definição.** — Dados n elementos (distintos), chamamos *combinações* simples, de classe k, dos n elementos, aos agrupamentos *sem repetição*, formados com k dos n elementos dados, de maneira que um agrupamento difira do outro, pela *natureza* de seus elementos.

As combinações simples, de classe k, de n elementos, tambem se chamam as combinações simples dos n elementos, *k a k ou tomados k a k.*

Ao envez de combinações, usa-se ainda a expressão *produtos distintos.*

18 — **Notação.** — O número das combinações simples de n elementos (distintos), k a k, representa-se com o símbolo

$$C_{n,k}$$

19 — **Teorema.** $C_{n,k} = A_{n,k} : P_k$

Suponhamos, com efeito, formadas as combinações simples de classe $k (k > 1)$, de n elementos (distintos), cujo número $C_{n,k}$ queremos determinar.

Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras a, b, c, d, e, combinadas três a três:

abc abd abe ... cde.

Fazendo-se as permutações dos k elementos que figuram em cada combinação, vamos obter novos agrupamentos, ainda de classe k, e sem repetição, dos mesmos elementos. Êsses agrupamentos são os arranjos (*todos os arranjos*) simples, de classe k, dos n elementos, como vamos provar.

Como já vimos que os agrupamentos são de classe k e simples, resta-nos provar que dois quaisquer diferem ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos, e que nenhum arranjo foi omitido.

Com efeito, suponhamos que as permutações dos elementos de cada combinação sejam colocadas em colunas; as que provêm de uma combinação, em uma vertical; as que provêm de outra combinação, em outra vertical.

abc	abd	abe	...	cde
acb	adb	aeb	...	ced
cab	dab	eab	...	ecd
bac	bad	bae	...	dce
bca	bda	bea	...	dec
cba	dba	eba	...	edc

Assim dispostos, os agrupamentos de uma coluna diferem pela ordem de seus elementos, e os de colunas distintas, pela natureza dêles.

Não pode faltar nenhum arranjo, pois, aquele que por absurdo, supusermos faltar, a menos da ordem, será uma combinação de classe k, dos n elementos. Essa combinação, trocada a ordem de seus elementos, se fôr necessário, deve estar entre as combinações de partida, devendo assim figurar na coluna das permutações dos elementos da referida combinação, o arranjo que supúnhamos faltar.

Lembremos que a ordem não influe na diferenciação das combinações, e por êsse motivo, os elementos, nas combinações, são colocados sempre numa ordem que se diz *natural;* quando letras, na ordem

alfabética; quando números, na ordem crescente ou decrescente de seus valores.

Ora, no quadro atrás, os arranjos simples, dos n elementos k a k, ficam dispostos em $C_{n,k}$ colunas, cada uma com P_k agrupamentos, e portanto,

$$A_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k$$

$A^m_m = C^m_m \; P_m$

donde

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}$$

$C^m_m = \frac{A^m_m}{P_m}$

20 — **Corolário.** $C_{n,k} = \dfrac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 . 2 . \ldots . k}$ $\quad k > 1$

Basta na fórmula anterior

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}$$

substituir-se $A_{n,k}$ e P_k por seus valores, dados pelos corolários dos números 12 e 15.

Escólio 1 — Êsse corolário pode ser enunciado assim: o número das combinações simples, de n elementos destintos, tomados k a k, para $k > 1$, é uma fração em que o numerador é o produto de k fatores consecutivos, cujo maior fator é n, e o denominador, tambem o produto de k fatores consecutivos, cujo maior fator é k.

Escólio 2 — Para $k = 1$, o número de combinações de n elementos é n, o que é imediato; logo

$$C_{n,1} = n$$

21 — **Teorema.** $C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Para $k > 1$

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{1\ .\ 2.\ \ldots\ k}$$

Multiplicando-se ambos os termos da fração por $(n-k)\,!$, ela não se altera, e portanto,

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)\,.\,[\,(n-k)\,!\,]}{k\,!\,(n-k)\,!}$$

ou

$$C_{n,k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$$

Escólio. — E' fácil verificar-se que essa fórmula é válida para $k = 1$.

Capítulo Segundo

COEFICIENTES BINOMIAIS E TRIÂNGULO DE PASCAL

§ 1. COEFICIENTES BINOMIAIS.

22 — **Definição.** — Dados dois números inteiros n e k, $n \geq k > 1$, chamamos *coeficiente binomial* de classe k, do número n, a fração

$$\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{1\ .\ 2.\ \ldots\ k} = \frac{A_{n,k}}{P_k}$$

O coeficiente binomial de classe k, do número n, é indicado com o símbolo

$$\binom{n}{k}$$

Por definição, portanto,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{1\ .\ 2.\ \ldots\ k} \qquad n \geq k > 1$$

Estendendo-se o conceito, ainda por definição, sendo n e k naturais, fazemos

$$\binom{n}{k} = n \qquad \text{para } n \geq k = 1$$

$$\binom{n}{k} = 1 \qquad \text{para } n \geqslant k = 0$$

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{para } n < k$$

O símbolo $\binom{n}{k}$, lê-se coeficiente binomial de classe k, do número n, ou coeficiente binomial n sôbre k.

Por analogia com a fração ordinária, n diz-se *numerador* do coeficiente binomial, e k, *denominador*.

Escólio. — Resulta dessa definição e do corolário do número 20 que

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

23 — **Teorema.** $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Êste teorema já foi demonstrado para o caso de $n \geqslant k \geqslant 1$ (teorema do número 21); êle é válido para $n \geqslant k = 0$, como é fácil verificar-se.

A expressão do segundo membro não tem sentido para $n < k$, pois, é desprovido de significado o fatorial de um número negativo, que nêste caso aparece em denominador e, portanto, o teorema não é válido para $n < k$.

24 — **Teorema.** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Aplicando-se o teorema anterior, temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Logo

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Escólio. — Essa relação, como a antecedente, da qual é um corolário, não é válida para $n < k$, pois, o segundo membro da expressão não tem sentido com o denominador negativo.

25 — **Definição.** — Os coeficientes binomiais cujos numeradores são iguais, e a soma dos denominadores é igual ao numerador (comum), dizem-se *complementares*: *um é o coeficiente binomial complementar do outro.*

O teorema anterior, que se chama *teorema dos coeficientes binomiais complementares,* pode ser enunciado assim: coeficientes binomiais complementares são iguais.

Escólio. — O teorema dos coeficientes binomiais complementares é valido para $n \geqslant k = 0$, como já vimos, e para $n > k \geqslant 1$ pode ser demonstrado assim.

Formadas as combinações simples de n elementos, k a k, consideremos os agrupamento de classe $(n-k)$, formados com os elementos dados, e que não figuram em cada combinação.

Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras a, b, c, d, e, combinadas duas a duas, e consideremos os dois conjuntos abaixo:

1)	ab	ac	ad	...	bc	...	de
2)	cde	bde	bce	...	ade	...	abc

o primeiro formado com as combinações simples dos elementos, dois a dois, o segundo, dos agrupamentos que se obtêm com as letras dadas, e que não figuram em cada combinação.

Como de cada combinação, forma-se um agrupamento do outro conjunto, o número das combinações simples dos n elementos k a k, é igual ao número de agrupamentos do segundo conjunto. *Si provarmos que nêste conjunto, estão as combinações simples dos n elementos, $(n-k)$ a $(n-k)$, ficará demonstrada a relação:*

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad n > k \geqslant 1$$

Ora, como já vimos, os agrupamentos do conjunto (2) são simples e de classe (n—k); êles diferem, um do outro, pela natureza de seus elementos, pois si dois dêles tivessem os mesmos elementos, as *combinações* que lhes deram origem, teriam tambem os mesmos elementos, o que seria absurdo. Os agrupamentos de classe (n—k) são, portanto, combinações simples, dos elementos dados, (n—k) a (n—k).

Para provarmos que não falta nenhuma combinação, procedamos *por absurdo*. Suponhamos que falte uma combinação, no caso do exemplo, *acd*. Ora, o agrupamento formado com os k elementos restantes (*be* no exemplo dado) é uma combinação simples, de classe k, dos elementos em jôgo, e deve estar entre as combinações de partida; dela, portanto, com o critério dado, formamos a combinação de classe (n—k) que supúnhamos faltar. Logo, no segundo conjunto estão as combinações (todas as combinações) de classe (n—k), dos n elementos dados.

Como observamos atrás, provado que no segundo conjunto estão as combinações simples, (n—k) a (n—k), dos n elementos, fica demonstrada a relação:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad n > k \geqslant 1$$

26 — **Teorema.** $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$

Por definição, para $k > 1$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{1.2\ \dots\ k}$$

Decompondo-se a fração do segundo membro dessa igualdade, temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+2)}{1.2\ \dots\ (k-1)} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

Ora, por definição, para $k-1 > 1$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+2)}{1.2\ \dots\ (k-1)}$$

Logo

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

Escólio. — Nesta demonstração, deve-se supor $k-1 \geqslant 2$; é fácil, no entanto, verificar-se que a expressão é válida para $n \geqslant k-1 \geqslant 0$, ou seja $n \geqslant k \geqslant 1$. Para $k = 0$, o segundo membro da expressão não tem sentido e, portanto, ela não verdadeira.

A expressão é válida para $n < k$, como se verifica facilmente.

27 — **Teorema.** $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Ora

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k-1}$$

e pelo teorema anterior

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}$$

Somando-se membro a membro essas igualdades, temos

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}$$

Pondo-se $\binom{n}{k-1}$ em evidência, no segundo membro, ficamos com

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right)$$

ou

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n+1}{k}$$

Somando-se membro a membro essas igualdades, simplificando-se o resultado, e desprezado no primeiro membro, o coeficiente

$$\binom{k-1}{k} = 0,$$

temos a relação

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

e o teorema fica demonstrado

32 — **Teorema das diagonais.**

Do teorema anterior temos:

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Substituindo-se cada parcela e a soma pelo seu coeficiente binomial complementar, a igualdade não se destrói e, portanto,

$$\binom{k-1}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{n}{n-k+1} = \binom{n+1}{n-k+1}$$

e o teorema fica demonstrado.

Capítulo Terceiro

BINÔMIO DE NEWTON

33 — Vamos deduzir a fórmula do binômio de Newton, i. é, vamos provar que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n} b^n \qquad n \geqslant 1$$

Faremos a demonstração *por recorrência* ou *indução matemática;* portanto:

a) demonstraremos o teorema para um ou mais casos particulares: n = 1,2,3.

b) suporemos a fórmula verdadeira para o expoente n—1 (natural) qualquer;

c) provaremos que se a fórmula fôr verdadeira para o expoente n—1, será verdadeira para o valor n, e assim ficará demonstrado o teorema.

Da definição de potência, e da *álgebra elementar,* sabemos que:

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab^2 + b^2$$

e

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ou

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2$$

e

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

e portanto, a fórmula do binômio é verdadeira para $n = 1,2,3$.

Ora, podemos supôr que o desenvolvimento seja verdadeiro para o expoente $n-1$ (natural) qualquer, isto é, que

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1}$$

Supondo-se verdadeira essa fórmula, vamos demonstrar que o teorema é verdadeiro para o valor n do expoente, isto é, que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

Ora, por hipótese, temos

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2}b + \ldots +$$

$$+ \binom{n-1}{r} a^{n-r-1}b^r + \ldots + \binom{n-1}{n-2} ab^{n-2} + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1}$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa igualdade por $a+b$, e aplicando-se a *relação de Stifel,* na redução dos termos semelhantes, vamos ter:

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2}b + \ldots + \binom{n-1}{r} a^{n-r-1}b^r + \ldots + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1}$$

$$a + b = a + b$$

$$\binom{n-1}{0} a^n + \binom{n-1}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n-1}{r} a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n-1}{n-1} ab^{n-1}$$

$$+ \binom{n-1}{0} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n-1}{r-1} a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n-1}{n-2} ab^{n-1} + \binom{n-1}{n-1} b^n$$

$$(a+b)^n = \binom{n-1}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n-1}{n-1} b^n$$

Como

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = 1$$

e

$$\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1,$$

substituindo-se

$$\binom{n-1}{0} \quad \text{por} \quad \binom{n}{0}$$

e

$$\binom{n-1}{n-1} \quad \text{por} \quad \binom{n}{n}$$

temos que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n} b^n \qquad n \geqslant 1$$

Fica, portanto, demonstrado que se a fórmula do binômio fôr verdadeira para o expoente natural n—1, será verdadeira para o valor n.

Ora a fórmula é verdadeira os valores 1, 2 e 3; logo será verdadeira para o valor 4; sendo verdadeira para o valor 4 será para o número 5 e assim por diante, sendo, portanto, verdadeira para um expoente natural n qualquer, igual ou maior que 1.

Empregando-se o sinal de somatória, a fórmula do binômio de Newton pode ser escrita assim:

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n} {}_i \binom{n}{i} a^{n-i}b^i$$

34 — **Corolário.** $(a-b)^n = \sum_{0}^{n} {}_i (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i}b^i$

Com efeito,

$$(a-b)^n = [a + (-b)]^n = \sum_{0}^{n} {}_i \binom{n}{i} a^{n-i}(-b)^i =$$

$$= \sum_{0}^{n} {}_i \binom{n}{i} a^{n-i}(-1.b)^i = \sum_{0}^{n} {}_i \binom{n}{i} a^{n-i}(-1)^i b^i =$$

$$= \sum_{0}^{n} {}_i (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i}b^i$$

Logo

$$(a-b)^n = \sum_{0}^{n} {}_i (-1)^n \binom{n}{i} a^{n-i}b^i \qquad n \geqslant 1$$

34 — **Teorema das linhas, no triângulo de Pascal.** Se na fórmula do binômio

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n} {}_i \binom{n}{i} a^{n-i}b^i$$

fizermos a = b = 1, vamos ter:

$$2^n = \sum_{0}^{n} {}_i \binom{n}{i} 1^{n-i}.1^i$$

ou

$$\sum_{0}^{n} {}_i \binom{n}{i} = 2^n$$

o que demonstra o *teorema das linhas*.

35 — Se na fórmula do binômio

$$(a-b)^n = \sum_{0}^{n} {}_i (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i}b^i \qquad n \geqslant 1$$

Capítulo Quarto

ARRANJOS E COMBINAÇÕES COMPLETAS

§ 1. ARRANJOS COMPLETOS

41 — **Definição.** — Dados n elementos (distintos), chamamos *arranjos completos* de classe k, dos n elementos, aos agrupamentos *sem repetição* ou *com repetição,* formados com k dos n elementos dados, de maneira que um agrupamento difira do outro, ou pela *natureza* ou pela *ordem* de seus elementos.

Os arranjos completos de classe k, de n elementos, tambem se dizem arranjos completos dos n elementos, *k a k ou tomados k a k.*

42 — **Notação.** — O número dos arranjos completos de n elementos, k a k, é denotado com os símbolos:

$$A'_{n,k} \qquad D'_{n,k} \qquad D^{(r)}_{n,k} \qquad A^{(r)}_{n,k}$$

43 — **Teorema.** — Para passarmos dos arranjos completos de classes k—1, de n elementos (distintos), para os de classe k, dos mesmos elementos, coloca-se depois de cada agrupamento, cada um dos elementos dados.

Com efeito, suponhamos formados os arranjos completos de classe k—1, de n elementos distintos. Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras a, b, c, d, e, dispostas duas a duas:

aa, ab, ac, ad, ae, bb, . . . ed, ee.

A classe de cada agrupamento é k—1, e colocando-se nele um elemento, torna-se de classe k; como vamos formar os arranjos completos, não importa que em alguns agrupamentos coloque-se um elemento que figure neles, e haja repetição.

Para provarmos que os agrupamentos formados, são *os arranjos (todos os arranjos)* completos, dos n elementos, k a k, temos que provar ainda, que dois agrupamentos quaisquer diferem ou pela natureza ou pela ordem de seus elementos, e não falta nenhum deles. Para isso suponhamos os agrupamentos formados, dispostos em colunas; os que provêm de um mesmo arranjo de classe k—1, numa coluna, os que provêm de outro, noutra coluna:

aaa	aba	aca	. . .	bba	. . .	eda	eea
aab	abb	acd	. . .	bbb	. . .	edb	eeb
aac	abc	acc	. . .	bbc	. . .	edc	eec
aad	abd	acd	. . .	bbd	. . .	edd	eed
aae	abe	ace	. . .	bbe	. . .	ede	eee

Ora, assim dispostos, os agrupamentos que estão n'ua mesma coluna, diferem pela natureza do último elemento, e os que estão em colunas diferentes, na pior das hipóteses, pela ordem ou natureza dos k—1 primeiros elementos, porque não estando n'ua mesma coluna, êles formam arranjos distintos de classe k—1.

Para demonstrarmos que não falta nenhum arranjo, procedemos *por absurdo.* Suponhamos que falte um arranjo de classe k, dos n elementos dados. No caso que consideramos, suponhamos faltar o agrupamento *edd,* por exemplo. Ora, desprezando-se o último elemento dêsse agrupamento, formamos um arranjo de classe k—1, dos mesmos elementos; no caso, o arranjo *ed.* Êsse arranjo ed, de classe k—1, deve estar entre os de partida (partimos de *todos* os arranjos completos, de classe k—1), e aplicando-se o teorema, deveríamos colocar depois dêle o elemento desprezado no agrupamento de classe k, e assim formaríamos o arranjo que, por absurdo, supúnhamos não ter formado.

Escólio. — Desde que os arranjos completos, um a um, de n elementos (distintos) são êsses mesmos elementos, aplicando-se o teorema anterior, podemos formar com êles os arranjos completos de classe 2, com os de classe 2, os de classe três, e assim por diante, até os de classe k.

44 — **Teorema.** $D'_{n,k} = n.D'_{n,k-1}$

No teorema do número 44, vimos que cada arranjo de classe k—1, de n elementos (distintos), desdobra-se em n arranjos completos de classe k, dos mesmos elementos, e portanto, o número dos arranjos obtidos é igual ao número dos arranjos primitivos, $D'_{n,k-1}$ multiplicado pelo número n em que cada um se desdobra, isto é,

$$D'_{n,k} = n.D'_{n,k-1}$$

45 — **Corolário.** $D'_{n,k} = n^k$

Observando-se que $D'_{n,1} = n$, e aplicando-se a fórmula do teorema anterior, para valores sucessivos de k, a partir de 2, temos:

$$D'_{n,1} = n$$

$$D'_{n,2} = n.D'_{n,1}$$

$$D'_{n,3} = n.D'_{n,2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D'_{n,k} = n.D'_{n,k-1}$$

Multiplicando-se membro a membro essas igualdades e simplificando-se o resultado temos:

$$D'_{n,k} = n.n.n.\ \dots\ _k = n^k \qquad k > 1$$

ou seja, o número dos arranjos completos de n elementos (distintos), k a k, é uma *potência* de n, cujo expoente é k.

Escólio. — Nessa demonstração, supusemos $k > 1$; para $k = 1$, o teorema é verdadeiro, pois

$$D'_{n,1} = n = n^1$$

§ 2. COMBINAÇÕES COMPLETAS

46 — **Definição.** — Dados n elementos (distintos), chamamos *combinações completas*, de classe k, dos n elementos, aos agrupamentos *sem repetição* ou *com repetição*, formados com k dos elementos dados, de maneira que um agrupamento defira do outro, pela natureza de seus elementos.

A diferença diz respeito à natureza dos elementos que ocupam a mesma posição em cada agrupamento. Assim os agrupamentos aaaab, aabbb, embora tenham os mesmos elementos a e b, são combinações distintas, pois o *3.º elemento* do agrupamento aa*a*ab é diferente do *3.º elemento* do agrupamento aa*b*bb .

Duas combinações da mesma classe, de n elementos (distintos) são, portanto, distintas, quando não têm os mesmos elementos, ou quando têm os mesmos elementos, mas em número diferente. Nas combinações aaaab, aabbb aparecem os mesmos elementos a e b; na primeira, no entanto, *a* aparece 4 vezes, e b, 1, ao passo que na segunda, *a* aparece 2 vezes e b, três.

As combinações completas de classe k, de n elementos, também se dizem as combinações completas dos n elementos, *k a k*, ou *tomados k a k*.

47 — **Notação.** — O número das combinações completas de n elementos k a k, é denotado pelos símbolos:

$$C'_{n,k} \quad \text{ou} \quad C^{(r)}_{n,k}$$

48 — **Teorema.** $C'_{n,k} = \dfrac{n+k-1}{k}\, C'_{n,k-1} \qquad k > 1$

Para deduzirmos essa fórmula, vamos proceder a contagem, *de duas maneiras distintas*, de um mesmo elemento, em todas as combinações completas, de classe k, de n elementos (distintos). Os resultados dessas contagens devem ser iguais, e igualando-se êsses resultados, deduziremos a fórmula acima.

Suponhamos formadas as combinações completas de classe k, de n elementos (distintos), cujo número é $C'_{n,k}$.

Para auxiliar o raciocínio, suponhamos as letras,

$$a, b, c, d, e,$$

combinadas três a três:

aaa aab aac aad ... aee bbb bbc ... eee

O número total de elementos, em todas as combinações, é $k.C'_{n,k}$ havendo $C'_{n,k}$ agrupamentos e k elementos em cada um dêles.

Supondo-se que cada elemento apareça o mesmo número de vezes nêsses agrupamentos, isto é, supondo-se, por exemplo, que si *a* aparecer 100 vezes *ao todo*, b, c, d, e tambem apareçam 100 vezes, é imediato que o número de vezes que um elemento aparece nas combinações é:

$$\frac{k.C'_{n,k}}{n} = \frac{k}{n} \cdot C'_{n,k} \qquad (1)$$

Ora, contemos um elemento, de outra maneira.

Contemos o primeiro elemento, *a letra a*, no exemplo dado. Para isso, tomemos *todas* as combinações que contenham êsse elemento:

aaa aab aac ... abb abc ... aee

e contemos a letra *a* da *seguinte maneira*:

1.º) contemos os *aa* que figuram em primeiro lugar, em todas *as combinações;*

2.º) contemos os *aa* restantes, e somemos os resultados.

Para contarmos os *aa* que figuram em primeiro lugar, em cada combinação, desprezemos esse 1.º elemento, e contemos os agrupamentos formados, pois é imediato que os *aa* desprezados são tantos quantos os agrupamentos que formamos:

aa ab ac ... bb bc ... ee

Ora, os agrupamentos que eram de classe k, desprezado um elemento, ficam de classe k—1; como as combinações eram *completas*, desprezada a letra *a*, ainda continuam completas e algumas delas com essa letra *a*, e portanto, os agrupamentos são agrupamentos completos, de classe k—1, dos n elementos dados.

Como os agrupamentos de classe k, de que partimos, eram combinações, eles diferiam pela natureza de seus elementos, mas não pela natureza do primeiro, *sempre igual à letra a*. Ora, tirando-se esta letra, os agrupamentos ainda continuam a diferir pela natureza dos seus elementos; são, portanto, combinações, e justamente *as* combinações (*todas as combinações*) completas, de classe k—1, dos n elementos dados, porque podemos demonstrar que entre os agrupamentos de classe k—1 não falta nenhuma combinação.

Com efeito, se por absurdo, supusermos faltar uma combinação de classe k—1, acrescentando-se um *a* a êsse agrupamento, formaremos uma combinação de classe k. Não haverá importância de haver repetição, pois, estamos tratando de agrupamentos completos.

Ora, essa combinação de classe k deve estar entre as de partida e, portanto, dessa combinação, desprezada a letra que lhe havíamos acrescentado, formamos a combinação de classe k—1, que por absurdo, supúnhamos faltar.

Dessas considerações, resulta que o número de *aa* que figuram em primeiro lugar, em todas as combinações, é igual a $C'_{n,k-1}$.

Para contarmos os outros *aa*, que estão nos agrupamentos de classe k—1, formados quando se despreza a letra *a*, que encabeça as combinações, podemos aplicar a fórmula (1), e o seu número é, portanto,

$$\frac{(k-1)\, C'_{n}}{n} = \frac{k-1}{n} \cdot C'_{n,k-1}$$

Resumindo-se o exposto:

1) o número de *aa* em todas as combinações é

$$\frac{k}{n} \cdot C'_{n,k}$$

Capítulo Oitavo

EXERCÍCIOS E COMPLEMENTOS

1 — Formar as disposições simples, 3 a 3, das letras a, b, c, d.

Primeiro formam-se as disposições uma a uma, depois, duas a duas, e finalmente 3 a 3. (Teorema do n.º 10).

Disposições uma a uma:

a, b, c, d. 4

Disposições duas a duas:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

12

Disposições três a três:

abc	acb	adb	bac	bca	bda
abd	acd	adc	bad	bcd	bdc
cab	cba	cda	dab	dba	dca
cad	cbd	cdb	dac	dbc	dcb

24
40

2 — Formar as disposições simples, 4 a 4, das letras x, y, z, t. Que nome tomam essas disposições?

As disposiçeõs formam-se segundo o teorema do n.º 10; essas disposições têm o nome de permutações.

3 — Quantas são as disposições simples de classe k—2, de p elementos distintos?

Aplique-se a fórmula fundamental, (teorema do n.º 12), e teremos a resposta:

$$D_{p,k-2} = p(p-1) \ldots (p-k+3)$$

4 — Quantas são as disposições simples de classe k—1, de p—1 elementos distintos?

Resposta:

$$D_{p-1,k-1} = (p-1)(p-2) \ldots (p-k+1)$$

5 — Quantos são os números de 4 algarismos (todos distintos), que podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 7, 8 e 9?

Os números de 4 algarismos são agrupamenos de classe 4; como os números devem ser de algarismos todos distintos, os números serão agrupamentos *simples*.

Ora, os números de 4 algarismos são distintos quando tiverem algarismos distintos ou os mesmos algarismos em ordens diferentes; são, portanto, arranjos, e como entram em jogo só os algarismos 1, 2, 4, 7, 8 e 9, a resposta é esta: teremos tantos números, quantos forem as disposições simples, de classe 4, de 6 elementos distintos, i.é.:

$$D_{6,4} = 6.5.4.3 = 360$$

6 — Quantos são os números de 3 algarismos — todos distintos, que existem em nosso sistema de numeração?

Aparentemente a resposta é:

$$D_{10,3} = 10.9.8 = 720$$

pois, ha 10 algarismos em nosso sistema de numeração.

Ora, formando-se, no entanto, as disposições simples de classe 3, dos algarismos 1,2,3,4,. . .9,0, formaremos agrupamentos da forma:

012 , 021 . . . 098

que não são números de 3 algarismos e, portanto, devem ser desprezados na contagem dos números.

Para contarmos esses agrupamentos que principiam por *zero*, podemos desprezar o zero, pois não altera o número de agrupamentos:

012 021 ... 098

Ora, desprezados os zeros, os agrupamentos que eram de classe 3, passam a ser de classe 2, e como eram simples, continuam simples ainda. Os elementos que entram em jogo, nestes agrupamentos, desprezados os zeros, são os algarismos significativos, e como ainda continuam a diferir pela natureza ou ordem de seus elementos, os agrupamentos que principiam por zero são tantos quantas as disposições simples, de classe 2, de 9 elementos distintos, pois é facil verificar-se que não ha omissão desses agrupamentos, quando se desprezam os zeros, nas disposições simples de classe 3.

Ha, portanto,

$$D_{10,3} - D_{9,2} = 10.9.8 - 9.8 = 9.8(10-1) = 9^2.8 = 648$$

números de 3 algarismos, todos distintos, em nosso sistema de numeração.

7 — Quantos são os números de 5 algarismos, todos distintos, que existem em nosso sistema de numeração?

Resposta:

$$D_{10,5} - D_{9,4} = 22.680$$

8 — Quantos números de p algarismos, todos distintos, podemos formar com os 9 algarismos significativos?

Resposta:

$$D_{9,p} = 9.8 \ldots (9-p+1)$$

Escólio: neste exercicio $p \leqslant 9$.

9 — Quantos números de p algarismos, todos distintos, existem em nosso sistema de numeração?

Resposta:

$$D_{10,p} - D_{9,p} =$$

$$= 10.9 \ldots (10-p+1) - 9.8 \ldots (9-p+2) =$$

$$= 10.9 \ldots (10-p+1) - 9.8 \ldots (10-p+1) =$$

$$= 9.8 \ldots (10-p+1)(10-1) = 9^2.8.7 \ldots (10-p+1)$$

Escólio: neste exercício $p \leqslant 10$.

10 — Quantos são os números de k algarismos todos distintos, no sistema de base m ?

Resposta:

$$D_{m,k} - D_{m-1,k-1}$$

Escólio: neste exercício $k \leqslant m$.

11 — Desenvolver a resposta do exercício anterior:

$$D_{m,k} - D_{m-1,k-1}$$

12 — Quantos são os números inferiores a 1.000, com algarismos todos distintos, que existem em nosso sistema?

Os números inferiores a 1.000 são números de 1, 2 e 3 algarismos. Ora, ha

$$D_{9,1} = 9$$

$$D_{10,2} - D_{9,1} = 90 - 9 = 81$$

e

$$D_{10,3} - D_{9,2} = 10.9.8 - 9.8 = 648$$

números de 1, 2 e 3 algarismos, todos distintos, em nosso sistema de numeração; ha, portanto

$$9 + 81 + 648 = 738$$

números inferiores a 1.000, com algarismos todos distintos em nosso sistema de numeração.

13 — Quantos sinais podemos fazer com 4 bandeiras de cores diferentes, levantando-se 3 delas, uma depois da outra, e não se admitindo sinais com bandeiras da mesma côr?

Os sinais são agrupamentos de classe 3, e como não se admitem bandeiras iguais num mesmo sinal, os agrupamentos são simples ou sem repetição.

Como os sinais são distintos quer sejam feitos por bandeiras diferentes, ou as mesmas bandeiras levantadas em *ordens* diferentes, teremos tantos sinais quantas forem as disposições simples de 4 elementos três a três, i.é.:

$$D_{4,3} = 4.3.2 = 24$$

14 — Quantos sinais podemos formar com foguetes de 7 cores diferentes, soltando-se, 4 deles, um depois do outro, e não se admitindo sinais com foguetes de cores iguais?

Resposta:

$$D_{7,4} = 7.6.5.4 = 480.$$

15 — Três estudantes possuem 4 paletós, 5 calças e 6 chapéus. De quantos modos podem se vestir?

Os paletós podem ser distribuidos de $D_{4,3} = 24$ modos diversos; as calças de $D_{5,3} = 60$ modos, e os chapéus de $D_{6,3} = 120$. Assim podemos fazer

$$24 \times 60 \times 120 = 172.800$$

agrupamentos diversos, ou modos distintos das 3 pessoas se vestirem.

Observem que tal número representa aproximadamente o número de dias de 473 anos, de quasi 5 séculos.

16 — **Definição de potência fatorial.** — Dados um n.º k inteiro e maior que um, e um n.º n tambem inteiro, chamamos potência fatorial de ordem k, do n.º n, ao produto de k fatores consecutivos cujo menor fator é n:

$$n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)$$

Por estensão, se k for igual a um, fazemos a potência fatorial igual a n.

A potência fatorial de ordem k de um n.º n, indica-se com o símbolo

$$n^{\overline{k}}$$

e portanto, por definição

$$n^{\overline{k}} = n(n+1)\ldots(n+k-1) \qquad \text{para } k > 1$$

$$n^{\overline{k}} = n \qquad \text{para } k = 1$$

17 — Escrever a fórmula do n.º 12, que dá o valor de $D_{n,k}$ empregando-se o símbolo da potência fatorial.

Ora,

$$D_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

$$D_{n,k} = (n-k+1)\ldots(n-1)n$$

$$D_{n,k} = (n-k+1)^{\overline{k}}$$

Observem que esta fórmula é tambem verdadeira para o caso de $k = 1$.

Com efeito,

$$D_{n,1} = (n-1+1)^{\overline{1}}$$

$$D_{n,1} = n^{\overline{1}} = n$$

Resposta: a que apresenta menor n.º de inversões é 1, 2, ... n; e a que apresenta maior n.º é n(n—1) ... 1.

180 — Qual o n.º de inversões da permutação n(n—1) ... 1, em relação à permutação 1, 2, ... n ?

Resposta:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

ÍNDICE

* Êste trabalho foi composto e impresso em junho de 1943, no Estabelecimento Gráfico "Cruzeiro do Sul", Rua Santo Antônio, 93 - São Paulo.

Trabalhos do mesmo autor:

Já publicados:

- TEORIA DAS MEDIDAS
- EXERCÍCIOS DE VETORES
- TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES
- QUOCIENTE DE VETORES

No prélo:

- FORMAS E EQUAÇÕES LINEARES

Em preparação:

- NÚMEROS REAIS E COMPLEXOS
- PROBLEMAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA
- EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA PROJETIVA (Fórmas de primeira espécie).

Imprimiu
Est. Gráf. Cruzeiro do Sul
Rua S. Antonio, 93- -S. Paulo

Preço Cr.$ 15,00