F. A. LACAZ NETTO

Fórmas e Equações Lineares

EDITORA DO BRASIL S/A
SÃO PAULO

Fórmas e Equações Lineares

OBRAS DO AUTOR

Teoria das medidas
Exercícios de vetores
Lições de análise combinatória
Teoria elementar dos determinantes

Em colaboração com o Prof. Willie Maurer

Matemática 1.ª Série Ginasial
" 2.ª " "
" 3.ª " "
" 4.ª " "

EXEMPLAR 0942

F. A. LACAZ NETTO

Fórmas e Equações Lineares

EDITORA DO BRASIL S/A
Rua Conselheiro Nébias, 787
SÃO PAULO
1944

ÍNDICE

PREFÁCIO

No ano passado, publiquei um livrinho sobre determinantes — TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES.

No prefácio dêsse trabalho, comprometi-me a escrever um volume sobre formas e equações lineares, uma das mais fáceis e úteis aplicações dos determinantes e argumento, ainda, dos programas oficiais de matemática, no Curso Científico.

Cumprindo a promessa, sai hoje FORMAS E EQUAÇÕES LINEARES. Consta o livro de 8 capítulos: o penúltimo tem por objeto o teorema de ROUCHÉ-CAPELLI, que domina tôda a teoria das equações lineares; o último capítulo é de exercícios e complementos; os exercícios, na sua maioria, são numéricos e os complementos versam, na parte mais interessante, sôbre os elementos da TEORIA DAS MATRIZES.

Pela importância da matéria, de grande aplicação, espero que o presente volume preste algum auxílio àqueles que se iniciam no estudo da Matemática.

F. A. Lacaz Netto.

SÃO PAULO, JULHO DE 1944.

Capítulo Primeiro

MATRIZ RETANGULAR. CARACTERÍSTICA. TEOREMAS PRELIMINARES

1. Definição. Chamamos matriz retangular (m,n) a um quadro formado de *mn* números, dispostos ordenadamente em m *linhas* (horizontais) e n *colunas* (verticais), todos dentro de duas barras duplas.

Um n.º de u'a matriz retangular denomina-se *elemento* da matriz.

Um elemento de u'a matriz é representando sempre pela mesma letra, afetada de dois índices, a_{rs}, por exemplo: o primeiro índice denota a ordem da linha, e o segundo, a ordem da coluna a que pertence o elemento.

U'a matriz (m,n), cujos elementos são representados pela mesma letra a, afetada de dois índices, é, portanto, um quadro da forma

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

2. Notação. A matriz (m,n), cujo elemento genérico é representado por a_{rs}, é indicado pelos símbolos

$$\left\| a_{rs} \right\| \qquad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots m \\ s = 1, 2, \dots n \end{matrix}$$

ou

$$((a_{rs})) \qquad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots m \\ s = 1, 2, \dots n \end{matrix}$$

3. Matriz nula. Definição. Quando os elementos de u'a matriz forem nulos, a matriz diz-se nula.

4. Menor extraido de u'a matriz. Dada u'a matriz (m,n), ao determinante formado com os elementos comuns a k linhas e colunas dessa matriz — conservada a ordem dêles, chamamos *determinante extraido* da matriz.

5. Teorema. O número de determinantes de ordem k, que podemos extrair de u'a matriz (m,n) é igual a $\binom{m}{k} \cdot \binom{n}{k}$

Imediato.

6. Característica de u'a matriz. Chamamos característica de u'a matriz retangular (m,n) a ordem máxima do determinante ou determinantes diferentes de zero que pudermos extrair dessa matriz.

Suponhamos u'a matriz (5,6), com elementos *nem todos nulos*.

Dessa matriz, podemos extrair, pelo menos, um determinante de ordem 1, diferente de zero; se *todos* os determinantes de ordem 2 que pudermos extrair dessa matriz forem *nulos*, forçosamente os de ordem 3, 4 e 5 também o serão, e dizemos que a *característica da matriz* é 2.

Se, pelo menos, um determinante de ordem 2 fôr diferente de zero, e *todos* os de ordem 3, forem nulos, forçosamente os de ordem 4 e 5 serão iguais a zero e dizemos que a *característica da matriz é 3*, e assim por diante.

Escólio: se a matriz é nula, sua característica é *zero*.

7. Determinante principal. Definição. Qualquer determinante *diferente de zero e de ordem máxima*, que pudermos extrair de u'a matriz retangular, diz-se *determinante principal* da matriz.

Escólio: resulta dessa definição que u'a matriz pode admitir mais de um *determinante principal;* na prática, chama-se, no entanto, de *determinante principal da matriz*, aquele que se calcula.

8. Teorema. A característica de u'a matriz (m,n) é igual, no máximo, ao menor dos números *m* e *n*.

Imediato.

9. A-fim-de facilitar o enunciado de algumas proposições, por definição, chamaremos

1) de *filas*, as linhas e colunas de u'a matriz retangular;

2) de *filas paralelas*, as linhas *ou* as colunas;

3) de *elementos correspondentes* de 2 linhas (ou colunas), os elementos que pertencerem a mesma coluna (ou linha).

Diremos, ainda, por definição.

a) que uma *fila é nula* quando todos os seus elementos forem nulos;

b) que duas *filas paralelas são iguais*, quando os elementos correspondentes forem iguais;

c) que duas *filas paralelas são proporcionais*, quando os elementos correspondentes forem proporcionais, i.é., formarem uma proporção.

Ainda por definição:

α) *multiplicar uma fila por um número*, significa multiplicar todos seus elementos por êsse número;

β) *somar a uma fila, outra paralela*, significa somar aos elementos da primeira, os elementos correspondentes da segunda;

γ) *trocar a posição de 2 filas paralelas*, significa trocar a posição de seus elementos correspondentes.

10. Teoremas. São imediatas as seguintes proposições sobre característica de u'a matriz (m,n):

a) quando se trocam ordenadamente as linhas pelas colunas, em u'a matriz retangular, a característica não se altera;

b) se trocarmos a posição de duas filas paralelas, em u'a matriz retangular, a característica não se altera;

c) se u'a matriz retangular tem filas paralelas iguais ou proporcionais, a característica não se altera, quando desprezamos tôdas filas iguais ou proporcionais, menos uma;

d) quando se multiplica uma fila de u'a matriz retangular por um número diferente de zero, a característica não se altera;

e) quando, em u'a matriz retangular, se acrescentam ou se desprezam filas nulas, a característica não se altera.

Escólio: baseados no teorema *b* dêsse número, podemos sempre supor que o *determinante principal* de u'a matriz retangular, seja formado pelas primeiras linhas e colunas da matriz.

11. Teorema. Quando numa matriz retangular, somamos a uma fila uma combinação linear de filas paralelas, a característica não se altera.

Demonstraremos o teorema para o caso particular de somar a uma coluna, outra multiplicada por constante (diferente de zero), donde decorre *por recorrência,* o teorema no caso geral.

Sejam as matrizes

$$M_1 \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

$$M_2 \equiv \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & \phantom{a_{1r}} & & s \downarrow & & \phantom{a_{1n}} \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & (a_{1s}+ka_{1r}) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & (a_{2s}+ka_{2r}) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & (a_{ms}+ka_{mr}) & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \end{array}$$

em que a segunda matriz se forma da primeira, acrescentando-se à coluna de ordem s, a de ordem r multiplicada por uma constante k diferente de zero.

Vamos provar que as matrizes anteriores teem características *iguais*.

Para demonstrarmos o teorema, provemos primeiro que a característica da segunda matriz não pode ser menor que a característica da primeira.

Com efeito: duas hipóteses poderíamos formar a respeito do determinante principal da primeira matriz: ou êle contém a coluna de ordem *s* ou não.

Se êle não contiver a coluna de ordem s, o mesmo determinante poderá ser extraido da segunda matriz e a característica dessa matriz será igual ou maior que à da primeira; e assim não poderá ser menor.

Se o determinante principal da primeira matriz contiver a coluna de ordem *s*

$$D_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

o determinante *correspondente,* na segunda matriz será

$$D'_p = \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & s \downarrow & & \phantom{a_{1p}} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (a_{1s}+ka_{1r}) & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (a_{2s}+ka_{2r}) & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & (a_{ps}+ka_{pr}) & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{ps} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} + k \begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & s \downarrow & & \phantom{a_{1p}} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pr} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \end{array}$$

Ora, duas hipóteses ainda podemos formular a respeito dêsse determinante D'_p: ou êle é diferente de zero ou nulo.

Se fôr diferente de zero, a característica da segunda matriz não será inferior à da primeira.

Se fôr nulo, como o primeiro determinante em que se decompõe não é nulo, o segundo também não o será; e como êste último é um determinante extraido da segunda matriz, a característica dessa matriz será igual ou maior do que a característica da primeira matriz.

Provamos que a característica de M_2 não pode ser menor que a de M_1 ; provemos agora que não pode ser menor.

Com efeito, suponhamos que a segunda matriz tenha característica $q > p$. Quer isto dizer que podemos extrair dela um determinante D_q de ordem q e diferente de zero. Neste determinante entraria forçosamente a coluna de ordem s, porque senão o mesmo determinante poderia ser extraido de M_1, e a característica dessa matriz seria q, quando, por hipótese, é $p < q$. Seja, portanto,

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\qquad s \\
\qquad\qquad\qquad \downarrow \\
D_q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (a_{1s}+ka_{1r}) & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (a_{2s}+ka_{2r}) & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & (a_{ps}+ka_{pr}) & \dots & a_{pq} \end{vmatrix} \neq 0
\end{array}
$$

Ora, êste determinante deferente de zero, pelo teorema da adição de filas desdobra-se em dois outros que não devem ser ao mesmo tempo iguais a zero.

Como cada um dêles pode ser extraido da matriz M_1 a característica dessa matriz será q, quando por hipótese é p.

Em resumo: a característica q de M_2 não pode ser maior nem menor que a característica p de M_1 ; logo, é igual, q. e. d.

12. Teorema. Quando acrescentamos a u'a matriz, ou desprezamos de u'a matriz, uma fila, combinação linear de filas paràlelas, a característica não se altera.

Sejam as matrizes

$$
M_1 = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right\|
$$

Capítulo Segundo

TEOREMA DE KRONECKER

14. Teorema de Kronecker. A condição necessária e suficiente para que u'a matriz (m,n) tenha a característica p, é que se possa extrair dela um determinante de ordem p, *diferente de zero* e sejam nulos todos os determinantes de ordem $p+1$, que se obtenham dêle, orlando-o com linhas e colunas que não figuram nêle.

A condição é necessária: se a característica de u'a matriz (m,n) é igual a p, podemos extrair dela um determinante D_p, de ordem p, diferente de zero e são nulos todos os de ordem $p+1$, *em particular* os que se obtêm dêle, orlando-o com linhas e colunas que não figuram nêle. Logo a condição é necessária.

Vejamos agora que a condição é *suficiente*.

Seja a matriz (m,n)

$$
\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right\|
$$

de característica p, e suponhamos, então, que se possa extrair dela um determinante D_p, diferente de zero. e sejam nulos os determinantes de ordem $(p+1)$, que se obteem dêle, orlando-o com linhas e colunas que não figuram nêle. Vamos provar que, neste caso, a característica da matriz é p.

$$M_2 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} & (k_1a_{11}+k_2a_{12}+ & \dots & +k_na_{1n}) \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & (k_1a_{21}+k_2a_{22}+ & \dots & +k_na_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & (k_1a_{m1}+k_2a_{m2}+ & \dots & +k_na_{mn}) \end{matrix} \right\|$$

Vamos provar que as características dessas matrizes são iguais. Com efeito, pelo teorema da letra *e* do n.º 9

$$M_1 \text{ e } M' = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{matrix} \right\|$$

teem características iguais; ora, pelo teorema anterior, M' e M_2 também teem características iguais e, portanto, as características de M_1 e M_2 são iguais, q.e.d.

13. Matrizes derivadas. Definição. Duas matrizes se dizem *derivadas,* quando se obtém uma da outra:

1) trocando-se as linhas pelas colunas;

2) trocando-se a posição de filas paralelas;

3) multiplicando-se uma fila por constante diferente de zero;

4) acrescentando-se ou desprezando-se filas nulas;

5) desprezando-se, tôdas menos uma, das filas iguais ou proporcionais;

6) somando-se a uma fila, combinação linear de filas paralelas;

7) acrescentando-se à matriz ou desprezando-se nela, uma ou mais filas, combinações lineares de filas paralelas.

Resulta dessa definição que os teoremas sobre matrizes, que demos até agora, *podem ser sintetizados na proposição*: matrizes derivadas têm características iguais.

Como já observamos atrás, baseados na letra b do n.º 9, podemos supor que o determinante principal D_p seja formado pelas p primeiras linhas e colunas:

$$D_p = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{matrix} \right| \neq 0$$

Para demonstrarmos o teorema, com o determinante D_p construamos o determinante

$$\triangle = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & a_{ps} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rp} & a_{rs} \end{matrix} \right|$$

em que

$$s = 1, 2, \dots p, \dots n$$

e

$$r = p+1, p+2, \dots m$$

Êsse determinante $\triangle$, quaisquer que sejam os valores de s e r *é sempre nulo*: com efeito, para $s = 1, 2, \dots p$, é nulo por ter duas colunas iguais, e para $r = p+1, p+2, \dots m$, êle é nulo, *de acôrdo com a hipótese,* pois nesse caso, $\triangle$ é um determinante que se obtem de D_p, orlando-o com linhas e colunas que não figuram nêle.

Desenvolvendo-se o determinante $\triangle$, pelo teorema de Laplace, segundo os elementos da última coluna, temos

$$a_{1s}k_1 + a_{2s}k_2 + \dots + a_{ps}k_p + a_{rs} D_p = 0$$

onde $k_1, k_2, \dots k_p$ e D_p representam os adjuntos de $a_{1s}, a_{2s}, \dots a_{rs}$.

Como D_p, *por hipótese* é diferente de zero, concluimos que

$$a_{rs} = \lambda_1 a_{1s} + \lambda_2 a_{2s} + \dots + \lambda_p a_{ps} \qquad \text{(I)}$$

Com essa igualdade verificamos que as linhas de ordem $(p+1)$, $(p+2)$ ... m, são combinações lineares das p primeiras linhas da matriz dada e, portanto, podem ser desprezadas na determinação da característica da matriz.

Com efeito, para $s = 1, 2, \ldots n$, da igualdade (I), temos:

$$\begin{aligned} a_{r1} &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_p a_{p1} \\ a_{r2} &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_p a_{p2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rn} &= \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_p a_{pn} \end{aligned}$$

o que prova, sendo $r = p+1, p+2, \ldots m$, que as linhas de ordem $p+1, p+2 \ldots m$, são combinações lineares das p primeiras linhas, segundo os coeficientes

$$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$$

Desprezadas estas linhas na matriz dada, o que não altera a característica, como a nova matriz tem p linhas, e dela podemos extrair o determinante $D_p \neq 0$, a sua característica é p e, portanto, a característica da primeira matriz também é p; e assim fica provado que a condição é suficiente.

Escólio n.º 1 — Se de u'a matriz (m,n), conhecermos um determinante de ordem p, diferente de zero segundo o teorema de Kronecker, o n.º de determinantes de ordem $p+1$, que na pior das hipóteses, devemos calcular, para concluirmos que a característica é p, é igual ao produto $(m-p)(n-p)$, como é facil demonstrar.

Escólio n.º 2 — Já provamos em nossas LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA, que o número

$$(m-p)\ (n-p) \leq \binom{m}{p+1} \binom{n}{p+1}$$

e daí a *vantagem do teorema de Kronecker*, pois,

$$\binom{m}{p+1} \cdot \binom{n}{p+1}$$

é o n.º de determinantes de ordem $(p+1)$, que podemos extrair da matriz (m,n) e que, na pior das hipóteses, deveríamos calcular, quando verificamos se a característica é de ordem p ou superior.

15. Aplicação. Devido à importância do teorema de Kronecker, faremos uma aplicação dêle, no cálculo da característica de u'a matriz retangular, mostrando, ainda, a disposição que devemos dar ao cálculo.

Seja a matriz

$$\left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 2 \end{matrix}\right\|$$

da qual desejamos determinar a característica.

Como na matriz dada, a terceira coluna é nula e a última é igual à quarta coluna, podemos desprezar a 3.ª e a última colunas — de acôrdo com os teoremas das letras *d*, *e* do n.º 9.

O problema recai, portanto, no cálculo da característica da matriz

$$\left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -4 \end{matrix}\right\|$$

Como a matriz não é nula, i.é., como todos os seus elementos não são nulos, a característica dessa matriz, será no mínimo igual a 1.

Ora, o n.º 2, interseção da 1.ª linha e da 1.ª coluna, é um determinante de ordem 1, *diferente de zero;* portanto, para que a característica da matriz seja 1, é suficiente que sejam nulos os determinantes de ordem 2, que se obtenham do determinante 2, orlando-o com linhas e colunas que não figuram nêle.

Ora, orlando-o com a primeira linha e segunda coluna, temos o determinante

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ e D_p representam os adjuntos de $F_1, F_2 \ldots F_p, F_r$ no referido determinante.

Sendo $D_p \neq 0$, por hipótese, a relação (III), mostra que $F_1, F_2 \ldots F_p, F_r$ *não são independentes*, ou seja, que F_r é combinação linear das p primeiras formas lineares.

Se F_r, para $r = p+1, \ldots m$, é combinação linear das p primeiras formas lineares, no sistema

$$\begin{cases} F_1 \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ F_2 \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m \equiv a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

há sòmente p formas independentes, q. e. d.

Capítulo Quinto

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E HOMOGÊNEAS

30. Definição. Um sistema de equações do 1.º grau, como já sabemos, diz-se *linear*. Se os têrmos conhecidos do sistema forem nulos, o sistema diz-se *homogêneo*.

Um sistema linear homogêneo, de m equações e n incógnitas, quando *preparado*, apresenta, portanto, a forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Num sistema linear, homogêneo, *preparado*, a matriz formada com os coeficientes das incógnitas, conservada a ordem dos coeficientes, diz-se *a matriz do sistema*.

A matriz do sistema acima é, portanto, a matriz

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Escólio: observemos que, num sistema de equações, linear e homogêneo, preparado, *os primeiros membros são formas lineares;*

obtem-se, pois, um sistema linear e homogêneo, de equações, egualando-se a zero, um conjunto de formas lineares.

31. Soluções próprias e impróprias. Todo sistema linear homogêneo, admite uma solução em que as incógnitas são iguais a zero. Esta solução diz-se *imprópria*.

As soluções em que, pelo menos, uma das incógnitas é diferente de zero, dizem-se *próprias*.

Escólio. Quando um sistema linear e homogêneo admite solução própria, diz-se *que êle é possível* ou *admite solução;* no caso contrário, diz-se que êle é *impossível* ou *não admite solução,* embora admita a solução imprópria. Apesar dessas expressões serem usuais, no enunciado dos teoremas chamaremos a atenção sôbre a *propriedade* ou *impropriedade* das soluções.

32. No presente capítulo trataremos dos teoremas que permitem verificar *a existência e determinação de soluções próprias* de um sistema linear e homogêneo.

33. Teorema. Tôda solução de duas ou mais equações lineares e homogêneas em n.º finito, é solução de outra equação que se obtém por combinação linear dessas equações.

Imediato.

34. Teorema fundamental. A condição necessária para que um sistema de equações lineares e homogêneas, admita solução (*própria*), é que a característica da matriz do sistema seja menor que o número de incógnitas.

Com efeito, seja o sistema

$$(I)\left\{\begin{array}{l} F_1 \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ F_2 \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m \equiv a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

e provemos, por absurdo, que a condição é *necessária,* i.é., provemos que, admitindo o sistema solução própria, é a característica $p < n$.

Como a característica p da matriz do sistema

$$\left\|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right\|$$

não pode ser maior que n, por absurdo, no caso do sistema (I) admitir solução (*própria*), suponhamos que a característica da matriz seja igual a n. Suponhamos também que

$$D_n = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

seja o determinante principal.

Ora, se tomarmos as n equações do sistema (I), cujos coeficientes figuram no determinante principal D_n, formamos outro sistema

$$(II)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

que deve admitir, pelo menos, a solução própria do *primeiro sistema,* pois, é constituido só dé equações do sistema (I).

Ora, o sistema (II) é *normal ou de Cramer,* e como é homogêneo, a *única solução que admite é a imprópria.*

Temos, pois, o absurdo do sistema (II) admitir e não admitir solução própria, absurdo que resulta de supormos $p=n$. Logo $p < n$, não podendo ser maior que n.

Vejamos, agora, que a condição é *suficiente.*

Consideremos, pois, um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

e seja p a característica da matriz do sistema

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

Se $p < n$, vamos provar que o sistema admite solução (*própria*). Consideremos o determinante principal

$$D_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

cujos elemnetos, como já temos observado, trocando-se convenientemente a ordem das equações e incógnitas, podemos supor os coeficientes das p primeiras equações e incógnitas.

Como a característica da matriz

$$\left\| a_{rs} \right\| \qquad \begin{matrix} r = 1,2,\dots m \\ s = 1,2,\dots n \end{matrix}$$

é p, o sistema de *formas lineares* que figurarem nos primeiros membros das equações, admite p formas *independentes,* de acôrdo com o *teorema da característica.*

Tomemos, agora, estas p *equações,* cujos coeficientes aparecem no determinante $D_p \neq 0$, *desprezando-se as outras equações, se por acaso existirem,* e consideremos o sistema formado por essas equações:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + \dots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + \dots a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + \dots a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Neste sistema, tomemos as incógnitas

$$x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n$$

cujos coeficientes não figuram no determinante $D_p \neq 0$, e façamos sua transposição para os segundos membros das equações:

$$(III) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = a_{1,p+1}x_{p+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = a_{2,p+1}x_{p+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p = a_{p,p+1}x_{p+1} - \dots - a_{pn}x_n \end{cases}$$

Ora, o sistema que formamos, supondo-se conhecidas as incógnitas

$$x_{p+1}, x_{p+2}, \dots x_n$$

é um sistema normal ou de Cramer, pois, por hipótese, o determinante

$$D_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

Neste sistema (III), pela regra de Cramer, podemos achar os valores de

$$x_1, x_2, \dots x_p$$

em função de

$$x_{p+1}, \quad x_{p+2}, \quad \dots \quad x_n$$

Estas soluções, pelo teorema anterior, são tambem soluções das outras equações do sistema (I), se por acaso existirem.

Como às incógnitas

$$x_{p+1}, \quad x_{p+2}, \quad \dots \quad x_n$$

podemos atribuir valores *diferentes de zero,* fica provado que, se a característica da matriz do sistema fôr menor que o número de incógnitas, o sistema admite solução (própria).

Observação: esta 2.ª parte da demonstração dá-nos o método para determinar as soluções (próprias) de um sistema linear e homogêneo, quando o problema admite solução.

35. Característica e determinante principal de um sistema linear e homogêneo. A característica da matriz de um sistema linear e homogêneo de equações, diz-se a *característica do sistema* e o determinante principal da referida matriz, diz-se também *determinante principal* do sistema.

36. Equações e incógnitas principais. Num sistema linear e homogêneo, as equações e incógnitas, cujos coeficientes aparecem no determinante principal, recebem o nome de equações e incógnitas principais.

O número, portanto, de equações e incógnitas principais é igual à característica do sistema.

37. Grau de indeterminação. A diferença entre o número de incógnitas e a característica de um sistema linear e homogêneo, é o que chamamos *grau de indeterminação do sistema.*

Indicando-se o grau de indeterminação por g_i, podemos escrever:

$$g_i = n - p.$$

O grau de indeterminação indica o n.º de incógnitas não principais, incógnitas a que podemos atribuir valores arbitrários, para determinar os valores das outras incógnitas principais.

Quando o grau de indeterminação é zero, o sistema é *determinado;* no caso contrário, *indeterminado.*

Quando o grau de indeterminação é *um,* dizemos que as soluções do sistema formam *um conjunto simplesmente infinito, e temos* ∞^1 *soluções;* se o grau de indeterminação é *dois,* dizemos que as soluções do sistema formam *um conjunto duplamente infinito,* e temos ∞^2 *soluções,* e assim por diante: se o grau de indeterminação é r, as soluções formam *um conjunto r - uplamente infinito, e temos* ∞^r *soluções.*

Preço Cr.$ 15,00