

SÉRIE A

COLEÇÃO E. C. C.

N.º 1

Wilson Cunha
SP. 19/5/42. F. A. Lacaz Netto

WILSON CUNHA

Exercícios de Vetores

EDITORA CLÁSSICO-CIENTÍFICA S/A
RUA CONSELHEIRO FURTADO N.º 747 — S. PAULO

1942

DESCARTADO

WILSON CUNHA

Exercícios de Vetores

por

F. A. Lacaz Netto

Prof. interino da Escola Politécnica
da Universidade de S. Paulo.



S. PAULO

1942

WILSON CUNHA

PREFACIO

WILSON CUNHA

EXERCÍCIOS DE VETORES

$a \times b$

1) Se \vec{a} e \vec{b} são dois vetores não paralelos e diferentes de zero, e

$$\boxed{x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = 0}$$

demonstrar que $x = y = 0$.

Com efeito, multiplicando-se vetorialmente por \vec{a} , a relação dada, teremos:

$$\vec{a} \wedge (x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}) = 0$$

$$0 + y (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$$

$$y (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$$

Como $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq 0$, conclue-se que $y = 0$.

Analogamente, multiplicando-se vetorialmente por \vec{b} , a relação dada, conclue-se que $x = 0$.

2) Equação da reta.

Como u'a reta é determinada por um ponto e uma direção, basta para individualizar uma reta, um de seus pontos A, e um vetor \vec{u} paralelo à reta.

Se P é um ponto qualquer da reta r, paralela ao vetor \vec{u} ,

$$P - A = \lambda \cdot \vec{u}$$

ou

$$\boxed{P = A + \lambda \cdot \vec{u}}$$

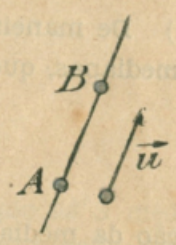


Fig. 1

Escólio: λ é um parâmetro real que varia no campo

$$-\infty \text{-----} +\infty$$

3) — Determinar o ponto médio de um segmento \overline{AB} .

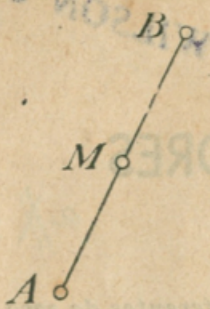


Fig. 2

$$M = A + \frac{B - A}{2}$$

Referindo-se estes pontos a um ponto O arbitrário do espaço, teremos:

$$M - O = A - O + \frac{(B - O) + (O - A)}{2}$$

$$M - O = \frac{2(A - O) + (B - O) + (O - A)}{2}$$

$$M - O = \frac{(A - O) + (B - O)}{2}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, podemos escrever:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

4) — Equações das medianas de um triângulo.

As medianas são determinadas por um vértice e o ponto médio do lado oposto. Esse problema recai, portanto, nos exercícios ns. 2 e 3.

a) Mediana relativa ao vértice A:

$$P = A + \lambda \left(\frac{B + C}{2} - A \right)$$

$$P = A + \lambda \cdot \frac{B + C - 2A}{2}$$

$$P = A + \lambda \cdot \frac{(B - A) + (C - A)}{2}$$

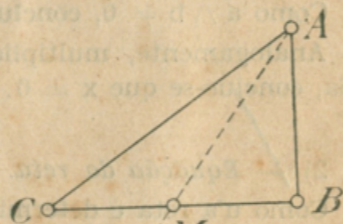


Fig. 3

b) De maneira análoga, podemos escrever as equações das 2 outras medianas, que são respectivamente:

$$P = B + \mu \cdot \frac{(A - B) + (C - B)}{2}$$

equação da mediana relativa ao vértice B, e

$$P = C + \nu \cdot \frac{(A - C) + (B - C)}{2}$$

equação da mediana relativa ao vértice C.

5) — Demonstrar que as medianas de um triângulo passam por um mesmo ponto (baricentro do triângulo), e determinar esse ponto.

a) Fazendo-se

$$C - B = \vec{a}, \quad A - C = \vec{b} \quad \text{e} \quad B - A = \vec{c}$$

as equações das medianas serão respectivamente:

$$P = A + \lambda \left(\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2} \right); \quad P = B + \mu \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} \right)$$

$$P = C + \nu \left(\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2} \right)$$

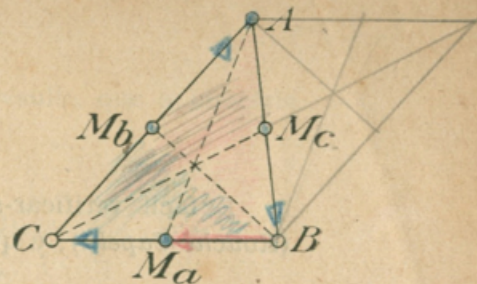


Fig. 4

Referindo-se estes pontos, a um outro O arbitrário, e fazendo-se ainda

$$A - O = \vec{p}, \quad B - O = \vec{q} \quad \text{e} \quad C - O = \vec{r}$$

como teremos, então,

$$\vec{a} = \vec{r} - \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{c} = \vec{q} - \vec{p}$$

poderemos escrever:

$$\begin{cases} P - O = (A - O) + \lambda (\vec{q} - \vec{p}) + \frac{\lambda}{2} (\vec{r} - \vec{q}) \\ P - O = (B - O) + \mu (\vec{r} - \vec{q}) + \frac{\mu}{2} (\vec{p} - \vec{r}) \\ P - O = (C - O) + \nu (\vec{p} - \vec{r}) + \frac{\nu}{2} (\vec{q} - \vec{p}) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} P - O = (1 - \lambda) \vec{p} + \frac{\lambda}{2} \vec{q} + \frac{\lambda}{2} \vec{r} \\ P - O = \frac{\mu}{2} \vec{p} + (1 - \mu) \vec{q} + \frac{\mu}{2} \vec{r} \\ P - O = \frac{\nu}{2} \vec{p} + \frac{\nu}{2} \vec{q} + (1 - \nu) \vec{r} \end{cases}$$

Ora, a condição necessária e suficiente para que as 3 medianas passem por um mesmo ponto, é que para um determinado valor de P, os 3 vetores sejam iguais; logo a condição necessária e suficiente para que as 3 medianas passem por um mesmo ponto é que seja possível, o sistema:

$$\begin{cases} 1 - \lambda = \frac{\mu}{2} = \frac{\nu}{2} \\ \frac{\lambda}{2} = 1 - \mu = \frac{\nu}{2} \\ \frac{\lambda}{2} = \frac{\nu}{2} = 1 - \mu \end{cases}$$

É fácil verificar-se que este sistema é possível e determinado (Rouché-Capelli), e que os valores de λ , μ e ν são:

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{3}$$

β) Achados estes valores, temos imediatamente o baricentro. Com efeito, substituindo-se λ pelo seu valor em

$$P - O = (1 - \lambda) \vec{p} + \frac{\lambda}{2} \vec{q} + \frac{\lambda}{2} \vec{r},$$

temos

$$P - O = \frac{1}{3} \vec{p} + \frac{1}{3} \vec{q} + \frac{1}{3} \vec{r}$$

ou

$$P - O = \frac{(A - O) + (B - O) + (C - O)}{3}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, podemos escrever:

$$P = \frac{A + B + C}{3}$$

6) — Equação da bissetriz de um ângulo.

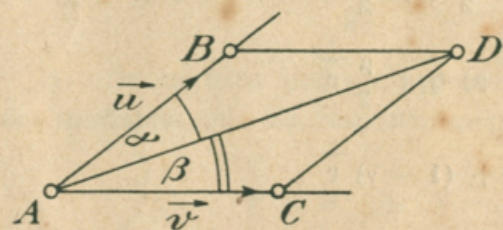


Fig. 5

D pertencerá a bissetriz do ângulo A. Com efeito, a figura que se forma [ABCD] é um losango; como os triângulos [ABD] e [ACD] são iguais e, em triângulos iguais, a lados iguais ficam opostos ângulos iguais, sendo

Seja um ângulo A, e \vec{u} e \vec{v} os versores de seus lados:

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$$

Se pelas extremidades dos versores \vec{u} e \vec{v} , traçarmos as retas BD e CD paralelas respectivamente a \vec{v} e \vec{u} , o ponto

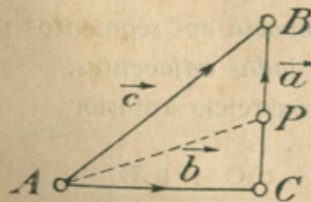


Fig. 7

$$\overline{BD} = \overline{CD},$$

$$\alpha = \beta$$

e, portanto, AD é a bissetriz do ângulo A.

Dessas considerações, como $D - C = \vec{u}$, resulta que a bissetriz do ângulo A é a paralela à soma: $\vec{u} + \vec{v}$.

Com efeito,

$$D - A = (C - A) + (D - C)$$

$$D - A = \vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$$

Daí resulta que a equação da bissetriz é

$$P = A + \lambda (\vec{u} + \vec{v})$$

Escólio: A expressão reduz-se a um vetor nulo, quando $\vec{u} = -\vec{v}$. Neste caso, a bissetriz é indeterminada, pois, vetores opostos não determinam um só ângulo.

7) — Demonstrar que as bissetrizes de ângulos adjacentes com os lados externos em linha reta são perpendiculares.

Supondo-se

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$$

teremos (fig. 6):

$$E - A = \lambda (\vec{u} + \vec{v})$$

$$F - A = \mu (\vec{u} - \vec{v}).$$

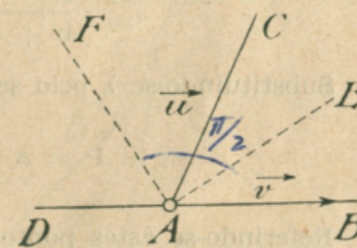


Fig. 6

Logo

$$(E - A) \times (F - A) = \lambda \cdot \mu (u^2 - v^2)$$

ou

$$(E - A) \times (F - A) = \lambda \cdot \mu (1 - 1) = 0, \text{ q.e.d.}$$

8) — Determinar a interseção da bissetriz de um ângulo de um triângulo, com o lado oposto.

Suponhamos

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$|B - C| = a, \quad |C - A| = b,$$

$$|B - A| = c$$

As equações da bissetriz do ângulo A e do lado BC são respectivamente

$$(I) \quad \begin{cases} P = A + \lambda (\vec{b} + \vec{c}), \\ (II) \quad \begin{cases} P = C + \mu (\vec{a} \cdot \vec{a}) \end{cases} \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema (I) (II), temos

$$(A-C) + \lambda (\vec{b} + \vec{c}) - \mu (\vec{a} \cdot \vec{a}) = 0$$

Como

$$A - C = -b \cdot \vec{b} \quad \text{e} \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = c \cdot \vec{c} - b \cdot \vec{b}$$

teremos

$$-b \cdot \vec{b} + \lambda (\vec{b} + \vec{c}) - \mu c \cdot \vec{c} + \mu b \cdot \vec{b} = 0$$

ou

$$(-b + \lambda + \mu b) \vec{b} + (\lambda - \mu c) \vec{c} = 0$$

Logo (ex. 1)

$$(III) \quad \begin{cases} -b + \lambda + \mu b = 0, \\ (IV) \quad \begin{cases} \lambda - \mu c = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema (III) (IV), achamos

$$\lambda = \frac{b \cdot c}{b + c} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{b}{b + c}$$

Substituindo-se λ pelo seu valor em (I), ficamos com

$$P = A + \frac{b}{b + c} (\vec{b} + \vec{c})$$

Referindo-se estes pontos a um ponto O arbitrário, teremos:

$$P-O = \frac{c(C-O) + b(B-O)}{b + c}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, podemos escrever:

$$P = \frac{c \cdot C + b \cdot B}{b + c}$$

9) — Demonstrar que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

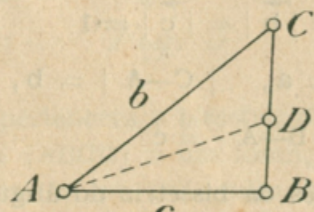


Fig. 8

Ora, pelo exercício anterior

$$D = \frac{c \cdot C + b \cdot B}{b + c},$$

e, portanto,

$$D-B = \frac{c \cdot C + b \cdot B}{b + c} - B = \frac{c \cdot C + b \cdot B - b \cdot B - c \cdot B}{b + c}$$

$$D-B = \frac{c(C-B)}{b+c}$$

$$C-D = C - \frac{c \cdot C + b \cdot B}{b + c} = \frac{b \cdot C + c \cdot C - c \cdot C - b \cdot B}{b + c}$$

$$C-D = \frac{b(C-B)}{b+c}$$

Daí concluímos:

$$\frac{D-B}{C-D} = \frac{c(C-B)}{b+c} \div \frac{b(C-B)}{b+c}$$

ou

$$\frac{D-B}{C-D} = \frac{c}{b}, \quad \text{q.e.d.}$$

10) — Determinar a interseção da bissetriz de um ângulo externo de um triângulo com o lado oposto.

Suponhamos

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$|B-C| = a, \quad |C-A| = b, \quad |B-A| = c.$$

As equações da bissetriz do ângulo A (externo) e do lado BC são respectivamente:

$$(I) \quad P = A + \lambda (\vec{b} - \vec{c}),$$

$$(II) \quad P = C + \mu (B-C).$$

Resolvendo-se o sistema (I)

(II), teremos:

$$(A-C) + \lambda (\vec{b} - \vec{c}) + \mu (\vec{a} \cdot \vec{a}) = 0.$$

Como

$$A - C = b \cdot \vec{b} \quad \text{e} \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = b \cdot \vec{b} - c \cdot \vec{c},$$

temos

$$b \cdot \vec{b} + \lambda (\vec{b} - \vec{c}) - \mu (b \cdot \vec{b} - c \cdot \vec{c}) = 0$$

ou

$$(b + \lambda - \mu b) \vec{b} + (\mu c - \lambda) \vec{c} = 0.$$

Logo (exercício 1)

$$(III) \quad \begin{cases} b + \lambda - \mu b = 0 \\ (IV) \quad \begin{cases} \mu c - \lambda = 0 \end{cases} \end{cases}$$

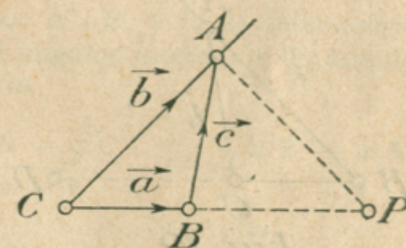


Fig. 9

Resolvendo-se o sistema (III) (IV), achamos:

$$\lambda = \frac{b \cdot c}{b - c} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{b}{b - c}$$

Substituindo-se λ pelo seu valor em (I), teremos:

$$P = A + \frac{b \cdot c}{b - c} (\vec{b} - \vec{c})$$

$$P - O = (A - O) + \frac{b \cdot c}{b - c} \left[\frac{(A - O) + (O - C)}{b} \right] - \frac{b \cdot c}{b - c} \left[\frac{(A - O) + (O - B)}{c} \right]$$

$$P - O = (A - O) + \frac{c}{b - c} [(A - O) + (O - C)] - \frac{b}{b - c} [(A - O) + (O - B)]$$

$$P - O = \frac{b(B - O) - c(C - O)}{b - c}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, podemos escrever:

$$P = \frac{b \cdot B - c \cdot C}{b - c}$$

- 11) — Demonstrar que a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

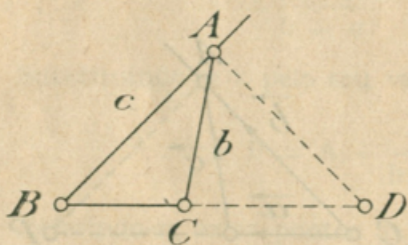


Fig. 10

Ora, pelo exercício anterior:

$$D = \frac{c \cdot C - b \cdot B}{c - b}$$

Portanto,

$$D - B = \frac{c \cdot C - b \cdot B}{c - b} - B = \frac{c \cdot C - b \cdot B - c \cdot B + b \cdot B}{c - b}$$

$$D - B = \frac{c(C - B)}{c - b}$$

$$D - C = \frac{c \cdot C - b \cdot B}{c - b} - C = \frac{c \cdot C - b \cdot B - c \cdot C + b \cdot C}{c - b}$$

$$D - C = \frac{b(C - B)}{c - b}$$

Daí concluímos que

$$\frac{D - B}{D - C} = \frac{c(C - B)}{c - b} \div \frac{b(C - B)}{c - b}$$

$$\frac{D - B}{D - C} = \frac{c}{b}, \text{ q.e.d.}$$

- 12) — Demonstrar que as interseções das bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo com os lados opostos estão em linha reta. (Triângulo escaleno).

Denotando-se por A' , B' e C' as interseções, nos lados a , b e c , teremos (exercício n.º 10):

$$A' = \frac{c \cdot C - b \cdot B}{c - b}, \quad B' = \frac{a \cdot A - c \cdot C}{a - c}, \quad C' = \frac{b \cdot B - a \cdot A}{b - a}$$

Daí tiramos

$$(c - b) A' + (a - c) B' + (b - a) C' = 0$$

Referindo-se êsses pontos ao ponto A' ficamos com

$$(c - b) (A' - A') + (a - c) (B' - B') + (b - a) (C' - A') = 0$$

$$(a - c) (B' - A') + (b - a) (C' - A') = 0$$

Como $a - c \neq 0$ e $b - a \neq 0$, segue-se que os vetores $B' - A'$ e $C' - A'$ são paralelos, ou que os pontos A' , B' , C' estão em linha reta.

- 13) — Demonstrar que as bissetrizes de 2 ângulos (internos) de um triângulo e a bissetriz do ângulo (externo) do 3.º vértice, cortam os lados opostos em pontos em linha reta. (Triângulo escaleno).

Denotando-se respectivamente por A'' , B'' e C'' as interseções nos lados a , b e c , das bissetrizes dos 2 ângulos internos e do ângulo externo, teremos (exercícios n.ºs 8 e 10).

$$A'' = \frac{b \cdot B + c \cdot C}{b + c}, \quad B'' = \frac{a \cdot A + c \cdot C}{a + c}, \quad C'' = \frac{b \cdot B - a \cdot A}{b - a}$$

ou

$$A'' = \frac{-b \cdot B - c \cdot C}{-b - c}, \quad B'' = \frac{a \cdot A + c \cdot C}{a + c}, \quad C'' = \frac{b \cdot B - a \cdot A}{b - a}$$

Daí tiramos

$$-(b + c) A'' + (a + c) B'' + (b - a) C'' = 0$$

Referindo-se êsses pontos a A'' , chegamos à expressão

$$(a + c) (B'' - A'') + (b - a) (C'' - A'') = 0$$

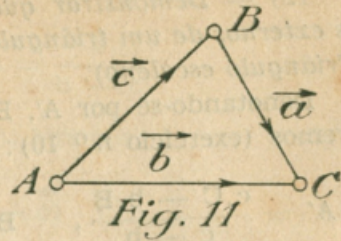
Como $a + c \neq 0$ e $b - a \neq 0$, segue-se que os dois vetores $(B'' - A'')$ e $(C'' - A'')$ são paralelos, ou que os 3 pontos A'' , B'' e C'' estão em linha reta.

- 14) — Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos de um triângulo passam por um mesmo ponto (incentro), e determinar êsse ponto.

a) Suponhamos

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

As equações das bissetrizes são respectivamente, (exercício n.º 6)



$$\begin{cases} P = A + \lambda (\vec{b} + \vec{c}) \\ P = C + \nu (\vec{a} - \vec{c}) \\ P = B + \mu (\vec{a} - \vec{c}) \end{cases}$$

Referindo-se estes pontos a um outro arbitrário O, e fazendo-se ainda

$$A - O = \vec{p}, \quad B - O = \vec{q} \quad \text{e} \quad C - O = \vec{r},$$

como teremos então

$$\vec{a} = \frac{\vec{r} - \vec{q}}{a}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{r} - \vec{p}}{b} \quad \text{e} \quad \vec{c} = \frac{\vec{q} - \vec{p}}{c}$$

poderemos escrever

$$\begin{cases} P - O = (A - O) + \lambda \left(\frac{\vec{r} - \vec{q}}{b} + \frac{\vec{q} - \vec{p}}{c} \right) \\ P - O = (B - O) + \mu \left(\frac{\vec{r} - \vec{p}}{a} + \frac{\vec{q} - \vec{p}}{c} \right) \\ P - O = (C - O) + \nu \left(\frac{\vec{r} - \vec{q}}{a} + \frac{\vec{r} - \vec{p}}{b} \right) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} P - O = \left(1 - \frac{\lambda}{b} - \frac{\lambda}{c} \right) \vec{p} + \frac{\lambda}{c} \vec{q} + \frac{\lambda}{b} \vec{r} \\ P - O = \frac{\mu}{c} \vec{p} + \left(1 - \frac{\mu}{a} - \frac{\mu}{c} \right) \vec{q} + \frac{\mu}{a} \vec{r} \\ P - O = -\frac{\nu}{b} \vec{p} - \frac{\nu}{a} \vec{q} + \left(1 + \frac{\nu}{a} + \frac{\nu}{b} \right) \vec{r} \end{cases}$$

Com raciocínio análogo ao do exercício n.º 5, concluímos que para as bissetrizes se encontrarem é necessário e suficiente que seja possível o sistema

$$\begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{b} - \frac{\lambda}{c} = \frac{\mu}{c} = -\frac{\nu}{b} \\ \frac{\lambda}{c} = 1 - \frac{\mu}{a} - \frac{\mu}{c} = -\frac{\nu}{a} \\ \frac{\lambda}{b} = \frac{\mu}{a} = 1 + \frac{\nu}{a} + \frac{\nu}{b} \end{cases}$$

É fácil verificar-se que o sistema é possível e determinado (Rouché-Capelli), e os valores de λ , μ e ν são respectivamente:

$$\lambda = \frac{b \cdot c}{a + b + c}, \quad \mu = \frac{a \cdot c}{a + b + c} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{a \cdot b}{a + b + c}$$

§) Achado o valor de λ , temos imediatamente o incentro. Com efeito, substituindo-se λ pelo seu valor

$$\frac{b \cdot c}{a + b + c} = \frac{b \cdot c}{2p},$$

em

$$P - O = \left(1 - \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda}{b} \right) \vec{p} + \frac{\lambda}{c} \vec{q} + \frac{\lambda}{b} \vec{r},$$

teremos

$$P - O = \left(1 - \frac{b}{2p} - \frac{c}{2p} \right) \vec{p} + \frac{b}{2p} \vec{q} + \frac{c}{2p} \vec{r}$$

$$P - O = \frac{a}{2p} \vec{p} + \frac{b}{2p} \vec{q} + \frac{c}{2p} \vec{r}$$

$$P - O = \frac{a(A - O) + b(B - O) + c(C - O)}{a + b + c}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, poderemos escrever

$$P = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c}$$

15) — Provar que as bissetrizes de 2 ângulos externos de um triângulo, e a bissetriz do outro ângulo (interno), passam por um mesmo ponto (centro de 1 círculo ex-inscrito), e determinar esse ponto.

As equações das bissetrizes são respectivamente (exerc. n.º 6)

$$P = A + \lambda \left(\frac{B - A}{c} + \frac{C - A}{b} \right)$$

$$P = C + \nu \left(\frac{C - B}{a} + \frac{B - A}{c} \right)$$

$$P = B + \mu \left(\frac{B - C}{a} + \frac{C - A}{b} \right)$$

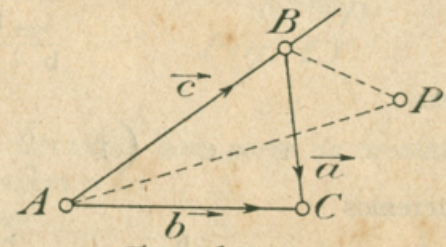


Fig. 12

ÍNDICE

	Página
Equação da reta	1,78
Ponto médio de um segmento	2
Medianas de um triângulo.....	2
Baricentro do triângulo.....	3
Bissetriz de um ângulo.....	4
Teoremas sobre bissetriz.....	5
Incentro do triângulo.....	9,10
Centro de círculos ex-inscritos em um triângulo.....	11
Identidade de Euler.....	14
Ortocentro do triângulo.....	14
Circuncentro do triângulo.....	17
Teorema de Euler sobre ortocentro, baricentro e circuncentro do triângulo.....	19
Segmentos paralelos em triângulos e trapézios.....	19
Teorema de Tales.....	23
Teoremas sobre triângulo isósceles.....	24
Lei dos senos (Trigonometria Plana).....	28
Fórmula dos cossenos.....	28
Teorema do cosseno.....	28
Teorema de Pitágoras.....	29
Segmentos proporcionais no triângulo: teoremas da altura, de Euclides e outros.....	29
Teorema fundamental sobre similitude de triângulos.....	33
Cosseno da diferença de dois ângulos.....	34
Senos de um ângulo e da diferença de dois ângulos.....	35
Teoremas sobre paralelogramos.....	36
Teorema de Varignon.....	40
Exercício sobre áreas de triângulos.....	40
Interseção das medianas de um quadrilátero.....	45
Baricentro do tetraedro.....	47
Componentes de um vetor em relação a três outros não coplanares.....	48
Relações clássicas de produtos vetoriais e escalares.....	49

Fórmula dos navegadores.....	50
Lei dos senos (Trigonometria Esférica).....	51
Componentes de um vetor em relação a dois outros.....	54
Condição de coplanaridade de duas retas.....	55
Distância de um ponto a uma reta.....	56
Distância mínima de duas retas.....	57
Volume do tetraedro.....	57
Equação do plano.....	58,59
Distância de um ponto a um plano.....	60
Interseção de reta e plano.....	60,62,64
Condição de paralelismo entre plano e reta.....	61,62,64
Condição de pertinência entre plano e reta.....	61,63,64
Paralelismo entre planos.....	65
Interseção de planos.....	66,67,68
Ângulo de dois planos.....	68
Ângulo de reta e plano.....	68
Teoremas sobre paralelepípedos.....	68
Interseção de três planos.....	70
Lugares geométricos: esfera, circunferência, plano mediador de um segmento, plano bissetor de um diedro e outros.....	71

DO MESMO AUTOR:

Já publicado:

TEORIA DAS MEDIDAS

No prélo:

TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES

LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Em preparação:

FÓRMAS E EQUAÇÕES LINEARES

NÚMEROS REAIS E COMPLEXOS

PROBLEMAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA PROJETIVA (Fórmulas de primeira espécie).

Outras publicações da Editora Clássico — Científica S/A.

CÁLCULO VETORIAL pelo *Prof. Leo Bomfim*

EXERCÍCIOS DE TRIGONOMETRIA pelo *Prof. Léo Bomfim*

CURSO DE ORGANIZAÇÃO RACIONAL DO TRABALHO (1.º e 2.º vols.) — 2ª edição — pelo *Eng. Luiz Mendonça Jr.*

PROBLEMAS DE QUÍMICA pelos *Profs. Generoso Conceição e Simão Faiguenboim.*

ESCOLAS PROFISSIONAIS SALESIANAS
Alam. Barão de Piracicaba, 560
São Paulo

Cr. \$ 15,00