SÉRIE A COLEÇÃO E. C. C. N.º 1

Wilson Cunha
S.P. 19/5/52.

F. A. Lacaz Netto

Exercícios de Vetores

EDITORA CLÁSSICO-CIENTÍFICA S/A
RUA CONSELHEIRO FURTADO N.º 747 — S. PAULO

1942

Exercícios de Vetores

por

F. A. Lacaz Netto

Prof. interino da Escola Politécnica
da Universidade de S. Paulo.

S. PAULO

1942

EXERCÍCIOS DE VETORES

$a \nparallel b$

1) — *Se* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *são dois vetores não paralelos e diferentes de zero, e*

$$\boxed{x.\vec{a} + y.\vec{b} = 0}$$

demonstrar que $x = y = 0$.

Com efeito, multiplicando-se vetorialmente por $\vec{a}$, a relação dada, teremos:

$$\vec{a} \wedge (x.\vec{a} + y.\vec{b}) = 0$$

$$0 + y(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$$

$$y(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$$

Como $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq 0$, conclue-se que $y = 0$.

Analogamente, multiplicando-se vetorialmente por $\vec{b}$, a relação dada, conclue-se que $x = 0$.

2) — *Equação da reta.*

Como u'a reta é determinada por um ponto e uma direção, basta para individualizar uma reta, um de seus pontos A, e um vetor $\vec{u}$ paralelo à reta.

Se P é um ponto qualquer da reta r, paralela ao vetor $\vec{u}$,

$$P - A = \lambda.\vec{u}$$

ou

$$\boxed{P = A + \lambda.\vec{u}}$$

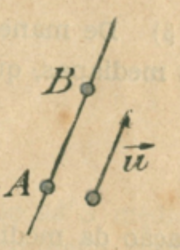

Fig. 1

Escólio: λ é um *parâmetro real* que varia no campo

$$-\infty \longrightarrow +\infty$$

3) — *Determinar o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$.*

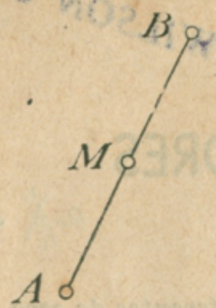

Fig. 2

$$M = A + \frac{B - A}{2}$$

Referindo-se estes pontos a um ponto O arbitrário do espaço, teremos:

$$M - O = A - O + \frac{(B-O) + (O-A)}{2}$$

$$M - O = \frac{2\,(A-O) + (B-O) + (O-A)}{2}$$

$$M - O = \frac{(A-O) + (B-O)}{2}$$

Com a notação do *cálculo baricêntrico*, podemos escrever:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

4) — *Equações das medianas de um triângulo.*

As medianas são determinadas por um vértice e o ponto médio do lado oposto. Esse problema recai, portanto, nos exercícios ns. 2 e 3.

α) Mediana relativa ao vértice A:

$$P = A + \lambda \left(\frac{B+C}{2} - A\right)$$

$$P = A + \lambda \, . \, \frac{B + C - 2\,A}{2}$$

$$P = A + \lambda \, . \, \frac{(B-A) + (C-A)}{2}$$

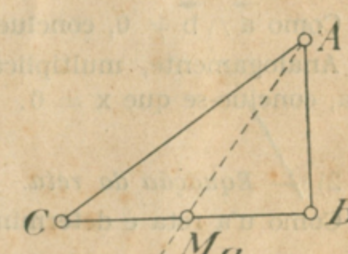

Fig. 3

β) De maneira análoga, podemos escrever as equações das 2 outras medianas, que são respectivamente:

$$P = B + \mu \, . \, \frac{(A-B) + (C-B)}{2},$$

equação da mediana relativa ao vértice B, e

$$P = C + \nu \, . \, \frac{(A-C) + (B-C)}{2}$$

equação da mediana relativa ao vértice C.

5) — *Demonstrar que as medianas de um triângulo passam por um mesmo ponto (baricêntro do triângulo), e determinar êsse ponto.*

α) Fazendo-se

$$C - B = \vec{a}, \quad A - C = \vec{b} \quad e \quad B - A = \vec{c}$$

as equações das medianas serão respectivamente:

$$P = A + \lambda \left(\vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}\right); \quad P = B + \mu \left(\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}\right)$$

$$P = C + \nu \left(\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}\right)$$

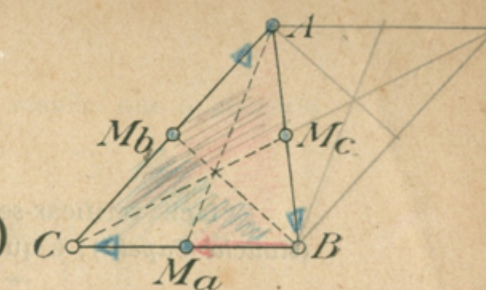

Fig. 4

Referindo-se êstes pontos, a um outro O arbitrário, e fazendo-se ainda

$$A - O = \vec{p}, \quad B - O = \vec{q} \quad e \quad C - O = \vec{r}$$

como teremos, então,

$$\vec{a} = \vec{r} - \vec{q}, \quad \vec{b} = \vec{p} - \vec{r} \quad e \quad \vec{c} = \vec{q} - \vec{p}$$

poderemos escrever:

$$\left\{\begin{aligned} P - O &= (A-O) + \lambda\,(\vec{q} - \vec{p}) + \frac{\lambda}{2}\,(\vec{r} - \vec{q}) \\ P - O &= (B-O) + \mu\,(\vec{r} - \vec{q}) + \frac{\mu}{2}\,(\vec{p} - \vec{r}) \\ P - O &= (C-O) + \nu\,(\vec{p} - \vec{r}) + \frac{\nu}{2}\,(\vec{q} - \vec{p}) \end{aligned}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} P - O &= (1 - \lambda)\,\vec{p} + \frac{\lambda}{2}\,\vec{q} + \frac{\lambda}{2}\,\vec{r} \\ P - O &= \frac{\mu}{2}\,\vec{p} + (1 - \mu)\,\vec{q} + \frac{\mu}{2}\,\vec{r} \\ P - O &= \frac{\nu}{2}\,\vec{p} + \frac{\nu}{2}\,\vec{q} + (1 - \nu)\,\vec{r} \end{aligned}\right.$$

Ora, a condição necessária e suficiente para que as 3 medianas passem por um mesmo ponto, é que para um determinado valôr de P, os 3 vetores sejam iguais; logo a condição necessária e suficiente para que as 3 medianas passem por um mesmo ponto é que seja *possivel*, o sistema:

$$\begin{cases} 1 - \lambda = \dfrac{\mu}{2} = \dfrac{\nu}{2} \\ \dfrac{\lambda}{2} = 1 - \mu = \dfrac{\nu}{2} \\ \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{\nu}{2} = 1 - \nu \end{cases}$$

É facil verificar-se que êste sistema é possível e determinado (*Rouché-Capelli*), e que os valores de λ, μ e ν são:

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{3}$$

β) Achados êstes valores, temos imediatamente o baricêntro. Com efeito, substituindo-se λ pelo seu valôr em

$$P - O = (1 - \lambda)\ \vec{p} + \frac{\lambda}{2}\vec{q} + \frac{\lambda}{2}\vec{r},$$

temos

$$P - O = \frac{1}{3} \cdot \vec{p} + \frac{1}{3} \cdot \vec{q} + \frac{1}{3} \cdot \vec{r}$$

ou

$$P - O = \frac{(A - O) + (B - O) + (C - O)}{3}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, podemos escrever:

$$P = \frac{A + B + C}{3}$$

6) — *Equação da bissetriz de um ângulo.*

Seja um ângulo A, e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os *versores* de seus lados:

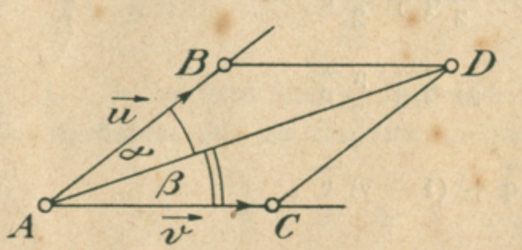

Fig. 5

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$$

Se pelas extremidades dos versores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, traçarmos as retas BD e CD paralelas respetivamente a $\vec{v}$ e $\vec{u}$, o ponto D pertencerá a bissetriz do ângulo A. Com efeito, a figura que se fórma [ABCD] é um losango; como os triângulos [ABD] e [ACD] são iguais e, em triângulos iguais, a lados iguais ficam opostos ângulos iguais, sendo

$$\overline{BD} = \overline{CD},$$

$$\alpha = \beta$$

e, portanto, AD é a bissetriz do ângulo A.

Dessas considerações, como D — C = $\vec{u}$, resulta que a bissetriz do ângulo A é a paralela à soma: $\vec{u} + \vec{v}$.

Com efeito,

$$D - A = (C - A) + (D - C)$$

$$D - A = \vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$$

Daí resulta que a equação da bissetriz é

$$P = A + \lambda\ (\vec{u} + \vec{v})$$

Escólio: A expressão reduz-se a um vetor nulo, quando $\vec{u} = -\vec{v}$. Neste caso, a bissetriz é indeterminada, pois, vetores opostos não determinam um só ângulo.

7) — *Demonstrar que as bissetrizes de ângulos adjacentes com os lados externos em linha reta são perpendiculares.*

Supondo-se

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$$

teremos (fig. 6):

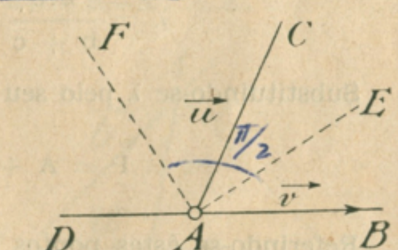

Fig. 6

$$E - A = \lambda\ (\vec{u} + \vec{v})$$

$$F - A = \mu\ (\vec{u} - \vec{v}).$$

Logo

$$(E - A) \times (F - A) = \lambda . \mu\ (u^2 - v^2)$$

ou

$$(E - A) \times (F - A) = \lambda . \mu\ (1 - 1) = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

8) — *Determinar a interseção da bissetriz de um ângulo de um triângulo, com o lado oposto.*

Suponhamos

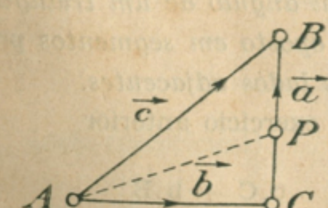

Fig. 7

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$|B - C| = a, \quad |C - A| = b,$$

$$|B - A| = c$$

As equações da bissetriz do ângulo A e do lado BC são respetivamente

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & P = A + \lambda\,(\vec{b} + \vec{c}), \\ \text{(II)} & P = C + \mu\,(a.\vec{a}) \end{array}$$

Resolvendo-se o sistema (I) (II), temos

$$(A—C) + \lambda\,(\vec{b} + \vec{c}) - \mu\,(a.\vec{a}) = 0$$

Como

$$A - C = -b.\vec{b} \quad \text{e} \quad a.\vec{a} = c.\vec{c} - b.\vec{b}$$

teremos

$$-b.\vec{b} + \lambda\,(\vec{b} + \vec{c}) - \mu c.\vec{c} + \mu b.\vec{b}. = 0$$

ou

$$(-b+\lambda + \mu b)\,\vec{b} + (\lambda - \mu c)\,\vec{c} = 0$$

Logo (ex. 1)

$$\begin{array}{ll} \text{(III)} & -b + \lambda + \mu b = 0, \\ \text{(IV)} & \lambda - \mu c = 0 \end{array}$$

Resolvendo-se o sistema (III) (IV), achamos

$$\lambda = \frac{b.c}{b + c} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{b}{b + c}$$

Substituindo-se λ pelo seu valôr em (I), ficamos com

$$P = A + \frac{b}{b + c}\,(\vec{b} + \vec{c})$$

Referindo-se êstes pontos a um ponto O arbitrário, teremos:

$$P—O = \frac{c\,(C—O) + b\,(B—O)}{b + c}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, podemos escrever:

$$P = \frac{c.C + b.B}{b + c}$$

9) — *Demonstrar que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

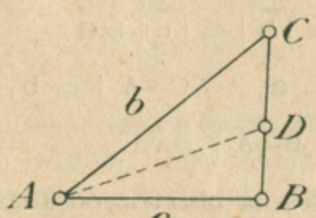

Fig. 8

Ora, pelo exercício anterior

$$D = \frac{c.C + b.B}{b + c},$$

e, portanto,

$$D—B = \frac{c.C + b.B}{b + c} - B = \frac{c.C + b.B - b.B - c.B}{b + c}$$

$$D - B = \frac{c\,(C—B)}{b + c}$$

$$C - D = C - \frac{c.C + b.B}{b + c} = \frac{b.C + c.C - c.C - b.B}{b + c}$$

$$C - D = \frac{b\,(C—B)}{b + c}.$$

Daí concluímos:

$$\frac{D - B}{C - D} = \frac{c\,(C—B)}{b+c} \div \frac{b\,(C—B)}{b+c}$$

ou

$$\frac{D - B}{C - D} = \frac{c}{b}, \quad \text{q.e.d.}$$

10) — *Determinar a interseção da bissetriz de um ângulo externo de um triângulo com o lado oposto.*

Suponhamos

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$|B—C| = a, \quad |C—A| = b, \quad |B—A| = c.$$

A equações da bissetriz do ângulo A (externo) e do lado BC são respectivamente:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & P = A + \lambda\,(\vec{b} - \vec{c}), \\ \text{(II)} & P = C + \mu\,(B—C). \end{array}$$

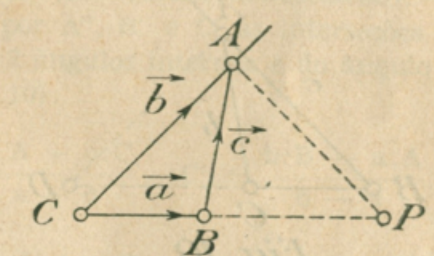

Fig. 9

Resolvendo-se o sistema (I) (II), teremos:

$$(A—C) + \lambda\,(\vec{b} - \vec{c}) + \mu\,(a.\vec{a}) = 0.$$

Como

$$A - C = b.\vec{b} \quad \text{e} \quad a.\vec{a} = b.\vec{b} - c.\vec{c},$$

temos

$$b.\vec{b} + \lambda\,(\vec{b} - \vec{c}) - \mu\,(b.\vec{b} - c.\vec{c}) = 0$$

ou

$$(b + \lambda - \mu b)\,\vec{b} + (\mu c - \lambda)\,\vec{c} = 0.$$

Logo (exercício 1)

$$\begin{array}{ll} \text{(III)} & b + \lambda - \mu b = 0 \\ \text{(IV)} & \mu c - \lambda = 0 \end{array}$$

Resolvendo-se o sistema (III) (IV), achamos:

$$\lambda = \frac{b.c}{b - c} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{b}{b - c}$$

Substituindo-se λ pelo seu valôr em (I), teremos:

$$P = A + \frac{b.c}{b - c} (\vec{b} - \vec{c})$$

$$P - O = (A - O) + \frac{b.c}{b - c}\left[\frac{(A - O) + (O - C)}{b}\right] - \frac{b.c}{b - c}\left[\frac{(A - O) + (O - B)}{c}\right]$$

$$P - O = (A - O) + \frac{c}{b - c}\Big[(A - O) + (O - C)\Big] - \frac{b}{b - c}\Big[(A - O) + (O - B)\Big]$$

$$P - O = \frac{b\ (B - O) - c\ (C - O)}{b - c}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, podemos escrever:

$$P = \frac{b.B - c.C}{b - c}$$

11) — *Demonstrar que a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

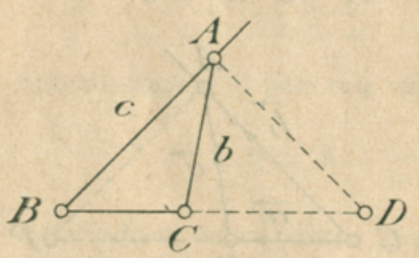

Fig. 10

Ora, pelo exercício anterior:

$$D = \frac{c.C - b.B}{c - b}$$

Portanto,

$$D - B = \frac{c.C - b.B}{c - b} - B = \frac{c.C - b.B - c.B + b.B}{c - b}$$

$$D - B = \frac{c\ (C - B)}{c - b}$$

$$D - C = \frac{c.C - b.B}{c - b} - C = \frac{c.C - b.B - c.C + b.C}{c - b}$$

$$D - C = \frac{b\ (C - B)}{c - b}$$

Daí concluímos que

$$\frac{D - B}{D - C} = \frac{c\ (C - B)}{c - b} \div \frac{b\ (C - B)}{c - b}$$

$$\frac{D - B}{D - C} = \frac{c}{b}, \text{ q.e.d.}$$

12) — *Demonstrar que as interseções das bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo com os lados opostos estão em linha reta. (Triângulo escaleno).*

Denotando-se por A′, B′ e C′ as interseções, nos lados a, b e c, teremos (exercício n.º 10):

$$A' = \frac{c.C - b.B}{c - b}, \quad B' = \frac{a.A - c.C}{a - c}, \quad C' = \frac{b.B - a.A}{b - a}$$

Daí tiramos

$$(c - b)\ A' + (a - c)\ B' + (b - a)\ C' = 0$$

Referindo-se êsses pontos ao ponto A′ ficamos com

$$(c - b)\ (A' - A') + (a - c)\ (B' - B') + (b - a)\ (C' - A') = 0$$

$$(a - c)\ (B' - A') + (b - a)\ (C' - A') = 0$$

Como $a - c \neq 0$ e $b - a \neq 0$, segue-se que os vetores $B' - A'$ e $C' - A'$ são paralelos, ou que os pontos A′, B′, C′ estão em linha reta.

13) — *Demonstrar que as bissetrizes de 2 ângulos (internos) de um triângulo e a bissetriz do ângulo (externo) do 3.º vértice, cortam os lados opostos em pontos em linha reta. (Triângulo escaleno).*

Denotando-se respetivamente por A″, B″ e C′ as interseções nos lados a, b e c, das bissetrizes dos 2 ângulos internos e do ângulo externo, teremos (exercícios n.os 8 e 10).

$$A'' = \frac{b.B + c.C}{b + c}, \quad B'' = \frac{a.A + c.C}{a + c}, \quad C' = \frac{b.B - a.A}{b - a}$$

ou

$$A'' = \frac{-b.B - c.C}{-b - c}, \quad B'' = \frac{a.A + c.C}{a + c}, \quad C' = \frac{b.B - a.A}{b - a}$$

Daí tiramos

$$-\ (b + c)\ A'' + (a + c)\ B'' + (b - a)\ C' = 0$$

Referindo-se êsses pontos a A″, chegamos à expressão

$$(a + c)\ (B'' - A'') + (b - a)\ (C' - A'') = 0$$

Como $a + c \neq 0$ e $b - a \neq 0$, segue-se que os dois vetores $(B'' - A'')$ e $(C' - A'')$ são paralelos, ou que os 3 pontos A″, B″ e C′ estão em linha reta.

14) — *Demonstrar que as bissetrizes dos ângulos de um triângulo passam por um mesmo ponto (incentro), e determinar êsse ponto.*

α) Suponhamos

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

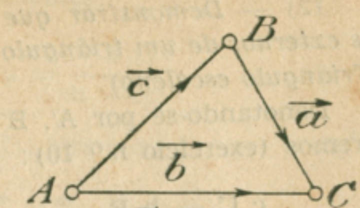

Fig. 11

As equações das bissetrizes são respetivamente, (*exercício n.º 6*)

$$\begin{cases} P = A + \lambda\,(\vec{b} + \vec{c}) \\ P = C + \nu\,(\vec{a} - \vec{c}) \\ P = B + \mu\,(\vec{a} - \vec{c}) \end{cases}$$

Referindo-se êstes pontos a um outro arbitrário O, e fazendo-se ainda

$$A - O = \vec{p}, \quad B - O = \vec{q} \quad \text{e} \quad C - O = \vec{r},$$

como teremos então

$$\vec{a} = \frac{\vec{r} - \vec{q}}{a}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{r} - \vec{p}}{b} \quad \text{e} \quad \vec{c} = \frac{\vec{q} - \vec{p}}{c}$$

poderemos escrever

$$\begin{cases} P - O = (A - O) + \lambda \left(\dfrac{\vec{r} - \vec{q}}{b} + \dfrac{\vec{q} - \vec{p}}{c}\right) \\ P - O = (B - O) + \mu \left(\dfrac{\vec{r} - \vec{p}}{a} + \dfrac{\vec{q} - \vec{p}}{c}\right) \\ P - O = (C - O) + \nu \left(\dfrac{\vec{r} - \vec{q}}{a} + \dfrac{\vec{r} - \vec{p}}{b}\right) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} P - O = \left(1 - \dfrac{\lambda}{b} - \dfrac{\lambda}{c}\right)\vec{p} + \dfrac{\lambda}{c}\vec{q} + \dfrac{\lambda}{b}\vec{r} \\ P - O = \dfrac{\mu}{c}\vec{p} + \left(1 - \dfrac{\mu}{a} - \dfrac{\mu}{c}\right)\vec{q} + \dfrac{\mu}{a}\vec{r} \\ P - O = -\dfrac{\nu}{b}\vec{p} - \dfrac{\nu}{a}\vec{q} + \left(1 + \dfrac{\nu}{a} + \dfrac{\nu}{b}\right)\vec{r} \end{cases}$$

Com raciocínio análogo ao do exercício n.º 5, concluimos que para as bissetrizes se encontrarem é necessário e suficiente que seja possivel o sistema

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{\lambda}{b} - \dfrac{\lambda}{c} = \dfrac{\mu}{c} = -\dfrac{\nu}{b} \\ \dfrac{\lambda}{c} = 1 - \dfrac{\mu}{a} - \dfrac{\mu}{c} = -\dfrac{\nu}{a} \\ \dfrac{\lambda}{b} = \dfrac{\mu}{a} = 1 + \dfrac{\nu}{a} + \dfrac{\nu}{b} \end{cases}$$

É facil verificar-se que o sistema é possivel e determinado (*Rouché-Capelli*), e os valores de λ, μ e ν são respetivamente:

$$\lambda = \frac{b.c}{a + b + c}, \quad \mu = \frac{a.c}{a + b + c} \quad \text{e.} \quad \nu = \frac{a.b}{a + b + c}$$

β) Achado o valor de λ, temos imediatamente o incentro. Com efeito, substituindo-se λ pelo seu valor

$$\frac{b.c}{a + b + c} = \frac{b.c}{2p},$$

em

$$P - O = \left(1 - \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda}{b}\right)\vec{p} + \frac{\lambda}{c}\vec{q} + \frac{\lambda}{b}\vec{r},$$

teremos

$$P - O = \left(1 - \frac{b}{2p} - \frac{c}{2p}\right)\vec{p} + \frac{b}{2p}\vec{q} + \frac{c}{2p}\vec{r}$$

$$P - O = \frac{a}{2p}\vec{p} + \frac{b}{2p}\vec{q} + \frac{c}{2p}\vec{r}$$

$$P - O = \frac{a\,(A-O) + b\,(B-O) + c\,(C-O)}{a + b + c}$$

Com a notação do cálculo baricêntrico, poderemos escrever

$$P = \frac{a.A + b.B + c.C}{a + b + c}$$

15) — *Provar que as bissetrizes de 2 ângulos externos de um triângulo, e a bissetriz do outro ângulo (interno), passam por um mesmo ponto (centro de 1 círculo ex-inscrito), e determinar êsse ponto.*

As equações das bissetrizes são respetivamente (exerc. n.º 6)

$$P = A + \lambda\left(\frac{B-A}{c} + \frac{C-A}{b}\right)$$

$$P = C + \nu\left(\frac{C-B}{a} + \frac{B-A}{c}\right)$$

$$P = B + \mu\left(\frac{B-C}{a} + \frac{C-A}{b}\right)$$

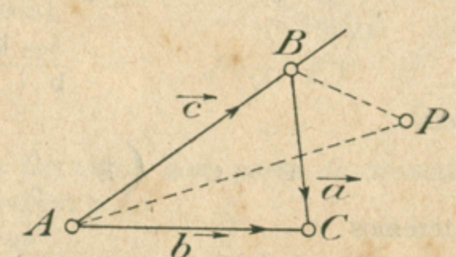

Fig. 12

ÍNDICE

DO MESMO AUTOR:

Já publicado:

Teoria das medidas

No prélo:

Teoria elementar dos determinantes

Lições de análise combinatória

Em preparação:

Fórmas e equações lineares

Números reais e complexos

Problemas de geometria analítica

Exercícios de geometria projetiva (Fórmas de primeira espécie).

Outras publicações da Editora Clássico — Científica S/A.

Cálculo Vetorial pelo *Prof. Leo Bomfim*

Exercícios de Trigonometria pelo *Prof. Léo Bomfim*

Curso de Organização Racional do Trabalho (1.° e 2.° vols.) — 2ª edição — pelo Eng. *Luiz Mendonca Jr.*

Problemas de química pelos Profs. *Generoso Coneilio* e *Simão Faiguenboim.*

Cr. $ 15,00