SÉRIE A COLEÇÃO E. C. C. N. 5

F. A. LACAZ NETTO

TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES

EDITORA CLASSICO-CIENTIFICA S/A
RUA CONSELHEIRO FURTADO N.º 747 — S. PAULO
1943

Antônio Assiz de Carvalho

TEORIA ELEMENTAR DOS DETERMINANTES

POR

F. A. LACAZ NETTO

Prof. interino da Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo

P R E F Á C I O

No Brasil, atualmente, uma das falhas do ensino nos Colégios e Escolas Superiores, é a falta de compêndios onde o aluno encontre a matéria exigida nos programas oficiais.

A meu ver, esse mal seria sanado, si todo professor publicasse suas lições, em forma de apostilas ou livros, ampliados de publicação em publicação.

De acordo com esse meu ponto de vista, publico hoje a Teoria Elementar dos Determinantes, onde os alunos dos nossos colégios encontrarão a matéria que até agora lhes tem sido exigida, dessa importante e belíssima teoria, com fecundas aplicações em outros ramos da Matemática.

E' este livro um trabalho despretencioso, livro para estudantes, e por isso muito simples, com inúmeros e variados exercícios, que constituem seu último capítulo. Caso seja bem recebido, em nova edição acrescentar-lhe-ei outros capítulos sobre determinantes funcionais e suas aplicações, bem como sobre determinantes infinitos e cúbicos.

A parte relativa a formas e equações lineares — uma das mais importantes e tambem das mais fáceis aplicações da teoria dos determinantes, será objeto de outro livro que pretendo publicar. O motivo que me obrigou a não incluir, neste volume, um capítulo sobre formas e equações lineares, foi a necessidade de apressar, por várias razões, a publicação deste livro, que talvez preste algum auxílio aos nossos estudantes, dos quais ultimamente tanto se tem exigido, sem lhes dar os meios necessários.

F. A. LACAZ NETTO.

São Paulo, Fevereiro de 1943.

Capítulo Segundo

MATRIZ QUADRADA E DETERMINANTE: GENERALIDADES E DEFINIÇÃO. REGRA DE SARRUS OU DO OTÓGONO ESTRELADO.

1— **Matriz quadrada.** Dados n^2 números ($n>1$), dispostos ordenadamente em n linhas (horizontais) e n colunas (verticais), todos dentro de 2 barras duplas, chamamos a esse quadro, *matriz quadrada de ordem n.*

Um número de u'a matriz quadrada tem o nome de *elemento* da matriz.

Geralmente todos os elementos de u'a matriz são representados por u'a mesma letra, afetada de 2 índices: a_{rs}, por exemplo. O primeiro índice denota a ordem da linha a que pertence o elemento, e o segundo, a ordem da coluna.

U'a matriz quadrada de ordem n é, portanto, um quadro da forma:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

A matriz quadrada de ordem n, cujos elementos são representados pela letra a (afetada de 2 indices) é tambem representada pelo símbolo

$$\begin{Vmatrix} a_{rs} \end{Vmatrix} \qquad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots n \\ s = 1, 2, \dots n \end{matrix}$$

2 — A u'a matriz quadrada, associa-se, por definição, um *número* que se chama o *determinante da matriz.* Para simplificar

a definição desse número, associado a u'a matriz quadrada, vejamos antes algumas definições preliminares.

3 — **Produto deduzido de u'a matriz quadrada.** Um produto de n fatores, onde figure sempre, como fator, um elemento de cada linha e coluna, de u'a matriz quadrada de ordem n, recebe o nome de produto deduzido dessa matriz.

Resulta da definição, que num produto deduzido de u'a matriz de ordem n, figura sempre *um elemento e um só,* de cada linha e coluna.

4 — Um produto deduzido de u'a matriz

$$\begin{Vmatrix} a_{rs} \end{Vmatrix} \qquad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots n \\ s = 1, 2, \dots n \end{matrix}$$

é, portanto, uma expressão da forma

$$a_{r_1 s_1} \; a_{r_2 s_2} \; \dots \; a_{r_n s_n}$$

onde

$$r_1 \; r_2 \; \dots \; r_n$$

$$s_1 \; s_2 \; \dots \; s_n$$

representam duas permutações quaisquer dos números

$$1, 2, \dots n$$

Como a ordem dos fatores é arbitrária, podemos trocar a ordem deles num produto deduzido, de maneira que:

a) ou os primeiros índices,

b) ou os segundos índices

formem a permutação principal

$$1, 2, \dots n$$

Um produto deduzido de u'a matriz quadrada

$$\begin{Vmatrix} a_{rs} \end{Vmatrix} \qquad \begin{matrix} r = 1, 2, \dots n \\ s = 1, 2, \dots n \end{matrix}$$

poderá, portanto, ter a forma

$$a_{1s_1}\, a_{2s_2} \ldots a_{ns_n}$$

ou

$$a_{r_1 1}\, a_{r_2 2} \ldots a_{r_n n}$$

onde

$$s_1\, s_2 \ldots s_n \quad e \quad r_1\, r_2 \ldots r_n$$

ainda representam duas permutações dos números

$$1, 2, \ldots n$$

5 — **Produtos deduzidos distintos.** Dois produtos deduzidos de u'a matriz quadrada dizem-se *distintos, quando pelo menos* os elementos de *uma certa linha* (*ou coluna*) que figurarem nesses produtos, *pertencerem a colunas* (*ou linhas*) *diferentes.*

Escólio. Colocados os fatores de maneira que os primeiros (segundos) índices formem sempre a mesma permutação (principal), teremos produtos distintos, quando os segundos (primeiros) índices formarem permutações diferentes.

6 — **Teorema.** O número de produtos distintos de u'a matriz quadrada de ordem n, é n!

Imediato, com a observação anterior.

7 — **Termo deduzido de u'a matriz quadrada.** Chamamos termo deduzido de u'a matriz quadrada, a um produto dessa matriz, multiplicado por uma potência de —1, cujo expoente seja a soma dos números que indiquem as inversões das permutações dos primeiros e segundos índices.

Um termo deduzido de u'a matriz quadrada

$$\left\| \, a_{rs} \, \right\| \qquad \begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots n \\ s = 1, 2, \ldots n \end{array}$$

é, portanto, uma expressão do tipo

$$(-1)^{\varrho + \sigma}\, a_{r_1 s_1}\, a_{r_2 s_2} \ldots a_{r_n s_n}$$

ou

$$(-1)^{\sigma}\, a_{1s_1}\, a_{2s_2} \ldots a_{ns_n}$$

ou ainda

$$(-1)^{\varrho}\, a_{r_1 1}\, a_{r_2 2} \ldots a_{r_n n}$$

onde ϱ e σ denotam respetivamente o n.º de inversões das permutações

$$r_1\, r_2 \ldots r_n \quad e \quad s_1\, s_2 \ldots s_n$$

em relação à permutação

$$1, 2, \ldots n$$

tomada como principal.

8 — Entre os termos e produtos deduzidos de u'a matriz quadrada podemos estabelecer uma *correspondência biunívoca*, considerando-se correspondentes um produto e o termo que se forma dele.

Resulta dessa definição, que um termo deduzido ou se confunde com o produto deduzido correspondente, ou é igual a ele, com o sinal trocado, segundo as permutações dos primeiros e segundos índices sejam *afins* ou *não afins*.

No caso das permutações serem afins

$$\varrho + \sigma \equiv 0 \ldots 2$$

e o termo confunde-se com o produto correspondente; no caso contrário,

$$\varrho + \sigma \not\equiv 0 \ldots 2$$

e o termo é igual ao produto correspondente com o sinal trocado.

9 — Convem observar que trocando-se a ordem de 2 fatores, num termo deduzido, o sinal do termo não se altera, pois, a troca implica u'a mudança de classe não só na permutação dos primeiros índices, como na dos segundos, e a soma $\varrho + \sigma$ permanece com a mesma paridade.

Por esse motivo, podemos escrever os fatores num termo deduzido, de maneira que os primeiros índices, ou os segundos, formem a permutação principal.

10 — **Termos deduzidos distintos.** Dois termos deduzidos de u'a matriz quadrada dizem-se distintos, quando os produtos correspondentes forem distintos.

11 — **Teorema.** O n.º de termos deduzidos distintos de u'a matriz de ordem n, é n!

Consequência do teorema do n.º 6.

12 — **Definição de determinante.** Chamamos *determinante* de u'a matriz quadrada, a soma de todos os *termos deduzidos distintos* dessa matriz.

O determinante associado a u'a matriz de ordem n, tambem chamaremos determinante de ordem n.

Observação: usaremos indiferentemente as palavras matriz e determinante, quando o emprego não provocar confusão.

13 — **Produtos principal e secundário.** Dada a matriz

$$\left\| \; a_{rs} \; \right\| \qquad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots n \\ s = 1, 2, \dots n \end{array}$$

ao produto

$$a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

cujos fatores têm os índices iguais, chamamos *principal;* ao produto

$$a_{1n}\, a_{2,n-1} \dots a_{n1}$$

cuja soma dos índices nos fatores é igual a n + 1, chamamos *secundário.*

Os termos correspondentes aos produtos principal e secundário, chamam-se tambem *termos principal e secundário.*

14 — Com as considerações anteriores, podemos dizer que um determinante de u'a matriz quadrada é a soma dos produtos que se obtêm do produto principal:

1) conservando-se os primeiros índices (os segundos índices),
2) permutando-se os segundos (os primeiros),
3) e afetando-se os produtos do sinal + ou —, segundo a permutação dos segundos (primeiros) índices seja de classe par ou impar, em relação à permutação

$$1, 2, \dots n.$$

15 — **Notação.** O determinante relativo a u'a matriz quadrada

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

representa-se com os símbolos

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \qquad \text{(Jacobi)}$$

$$\left| \; a_{rs} \; \right| \qquad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots n \\ s = 1, 2, \dots n \end{array} \qquad \text{(Kronecker)}$$

$$\sum a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn} \qquad \text{(Cauchy)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum (-1)^{\varrho+\sigma} a_{r_1s_1} a_{r_2s_2} \dots a_{r_ns_n} \\ \\ \sum (-1)^{\sigma} a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n} \\ \\ \sum (-1)^{\varrho} a_{r_11} a_{r_22} \dots a_{r_nn} \end{array}\right\} \text{(autores modernos)}$$

Nestas três últimas expressões,

$$r_1\ r_2 \dots r_n,\ s_1\ s_2 \dots s_n,\ \varrho \text{ e } \sigma$$

têm o mesmo significado que lhes emprestamos em páginas anteriores.

16 — **Cálculo de um determinante de segunda ordem.** Aplicando-se a definição ao determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

resulta que

$$A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

Um determinante de ordem 2 é, portanto, igual ao produto principal menos o secundário.

17 — **Cálculo de determinante de ordem 3. Regra de Sarrus.** Aplicando-se a definição ao determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

resulta que

$$A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Esse resultado pode ser obtido por uma regra prática, que recebe o nome de *regra de Sarrus,* ou do *otógono estrelado.*

Com o fim de simplificar o enunciado dessa regra, na matriz de ordem 3

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\|$$

chamemos os produtos

$$a_{21}\ a_{32}\ a_{13} \quad \text{e} \quad a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$$

de *produtos paralelos* ao produto principal; e os produtos

$$a_{32}\ a_{23}\ a_{11} \quad \text{e} \quad a_{21}\ a_{12}\ a_{33}$$

de *paralelos* ao produto secundário.

Feita esta convenção, podemos enunciar assim a regra de Sarrus: um determinante *de ordem* 3 é igual à soma do produto principal com os 2 outros que lhe são paralelos, menos a soma do produto secundário com os 2 produtos paralelos a este produto (secundário).

Na prática dão-se ao cálculo as disposições abaixo, que não carecem de explicação:

1)
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

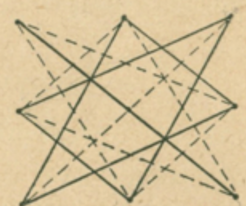
2)

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Si representarmos os elementos de u'a matriz de ordem 3 por pontos, conforme o quadro abaixo

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

o cálculo de um determinante de ordem 3, pela regra de Sarrus, pode ser indicado pelo *diagrama*



onde aparece um otógono estrelado. Daí a regra de Sarrus tambem chamar-se *regra do otógono estrelado.*

A regra de Sarrus refere-se a um determinante de ordem 3, podendo ser estendida, no entanto, a determinantes de ordem impar. Para o cálculo de determinantes de ordem par, ha uma regra análoga à de Sarrus, com o nome de *regra de Bonolis,* da qual não tratamos, por não apresentar grande interesse.

Capítulo Terceiro

TEOREMAS PRELIMINARES: DA FILA NULA, DE BEZOUT, DAS FILAS PROPORCIONAIS E OUTROS.

18 — Afim de facilitar o enunciado de algumas proposições, por definição, chamaremos

1) de *filas,* as linhas e colunas de u'a matriz quadrada;
2) de *filas paralelas,* as linhas ou as colunas;
3) de *elementos correspondentes* de 2 linhas (ou colunas), os elementos que pertencerem a mesma coluna (ou linha).

Diremos, ainda, por definição:

a) que uma *fila* é *nula* quando todos seus elementos forem nulos;
b) que duas *filas paralelas são iguais,* quando os elementos correspondentes forem iguais;
c) que duas *filas paralelas são proporcionais,* quando os elementos correspondentes forem proporcionais, i. é., formarem uma proporção.

Ainda por definição:

α) *multiplicar uma fila por um número,* significa multiplicar todos seus elementos por esse número;
β) *somar a uma fila, outra paralela,* significa somar aos elementos da primeira, os elementos correspondentes da segunda;
γ) *trocar a posição de 2 filas paralelas,* significa trocar a posição de seus elementos correspondentes.

19 — **Teorema.** Um determinante com uma fila nula, é igual a zero.

Um determinante, por definição, é a soma dos termos deduzidos distintos de u'a matriz. Como em cada termo deve figurar sempre, como fator, um elemento de cada linha e coluna, em todos eles aparecerá o fator zero da fila nula, e todos os termos serão nulos. E assim o determinante será nulo, q.e.d.

20 — **Teorema.** Um determinante não se altera, quando trocamos ordenadamente as linhas pelas colunas.

Com efeito, sejam os determinantes

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

nos quais *por hipótese*

$$a_{rs} = b_{sr} .$$

Vamos provar que

$$A = B .$$

Ora, por definição,

$$\text{(I)} \qquad A = \sum (-1)^{\sigma} a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n}$$

sendo a soma Σ estendida a todas as permutações possiveis $s_1 \, s_2 \dots s_n$ dos números 1, 2, ... n, e σ o n.º de inversões de $s_1 \, s_2 \dots s_n$, em relação à permutação 1, 2, ... n.

Substituindo-se em (I)

$$a_{rs} \text{ por } b_{sr}$$

temos

$$A = \sum (-1)^{\sigma} b_{s_1 1} b_{s_2 2} \dots b_{s_n n}$$

Ora, esta segunda soma nada mais é, por definição, que o determinante B. Logo

$$A = B, \text{ q.e.d.}$$

Observação. Demonstrado este teorema, é imediato que toda proposição que for verdadeira para u'a linha, será verdadeira para as colunas, e reciprocamente.

E assim, baseados no teorema anterior, quando quizermos demonstrar uma proposição para uma *fila*, basta demonstrá-la para u'a *linha* ou *coluna*.

Escólio. Duas matrizes que se obtêm uma da outra, trocando-se ordenadamente linha por coluna, dizem-se *transpostas*.

O teorema anterior pode, pois, ser enunciado assim: a matrizes transpostas correspondem determinantes iguais.

21 — **Teorema de Bezout.** Um determinante muda de sinal, quando se troca a posição de duas filas paralelas.

Sejam os determinantes

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

nos quais, *por hipótese*

$$\text{(I)} \quad a_{rs} = b_{rs} \begin{cases} r = 1, 2, \dots n \\ s = 1, 2, \dots i-1, i+1 \dots j-1, j+1, \dots n \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} a_{ri} = b_{rj} \\ a_{rj} = b_{ri} \end{cases} \qquad r = 1, 2, \dots n$$

Ora, por definição

$$\text{(III)} \qquad A = \sum (-1)^{\sigma} a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{r_i i} \dots a_{r_j j} \dots a_{ns_n}$$

sendo

$$1, 2, \ldots r_i \ldots r_j \ldots n$$

a permutação principal.

Substituindo-se a_{rs} em função de b_{rs}, de acordo com (I) e (II), da igualdade (III), temos

$$\text{(IV)} \qquad A = \sum (-1)^{\sigma} b_{1s_1} b_{2s_2} \ldots b_{r_ij} \ldots b_{r_ji} \ldots b_{ns_n}$$

Ora, a permutação

$$s_1\ s_2 \ldots i \ldots j \ldots s_n$$

tinha σ inversões; a permutação

$$s_1\ s_2 \ldots j \ldots i \ldots s_n$$

terá σ' inversões, sendo

$$\sigma \neq \sigma' \ldots 2 \qquad \text{(V)}$$

porque passamos de uma para outra, com uma mudança de posição dos elementos i e j.

De acordo com a relação (V), temos portanto,

$$(-1)^{\sigma} = (-1) . (-1)^{\sigma'} \qquad \text{(VI)}$$

Substituindo-se $(-1)^{\sigma}$ em (IV), pelo seu valor em função de σ', temos

$$A = \sum (-1) . (-1)^{\sigma'} b_{1s_1} b_{2s_2} \ldots b_{ns_n}$$

ou

$$A = -\sum (-1)^{\sigma'} b_{1s_1} b_{2s_2} \ldots b_{ns_n}$$

Como a soma da igualdade anterior representa o determinante B, fica provado que

$$A = - B, \text{ q.e.d.}$$

22 — **Teorema.** Um determinante com duas filas paralelas iguais é nulo.

Seja o determinante

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} & r & & s & \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\
A = & \left| \begin{array}{ccccc} \ldots & a & \ldots & a & \ldots \\ \ldots & b & \ldots & b & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & \ldots & 1 & \ldots \end{array} \right|
\end{array}$$

em que as colunas r e s são iguais.

Trocando-se a posição dessas colunas, teremos (teorema anterior) u'a matriz a que vai corresponder um número

$$B = - A \qquad \text{(I)}$$

Como, no entanto, a matriz obtida é igual à antecedente, pois, que as colunas que mudamos de posição eram iguais, seus determinantes serão iguais:

$$A = B \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (III), concluimos que

$$A = 0, \text{ q.e.d.}$$

INDICE

Trabalhos do mesmo autor:

Já publicados:

- TEORIA DAS MEDIDAS
- EXERCÍCIOS DE VETORES

No prélo:

- LIÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Em preparação:

- FÓRMAS E EQUAÇÕES LINEARES
- NÚMEROS REAIS E COMPLEXOS
- PROBLEMAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA
- EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA PROJETIVA (Fórmas de primeira espécie).

Imprimiu
Est. Gráf. Cruzeiro do Sul
Rua S. Antonio, 93- -S. Paulo

PREÇO Cr.$ 20,00