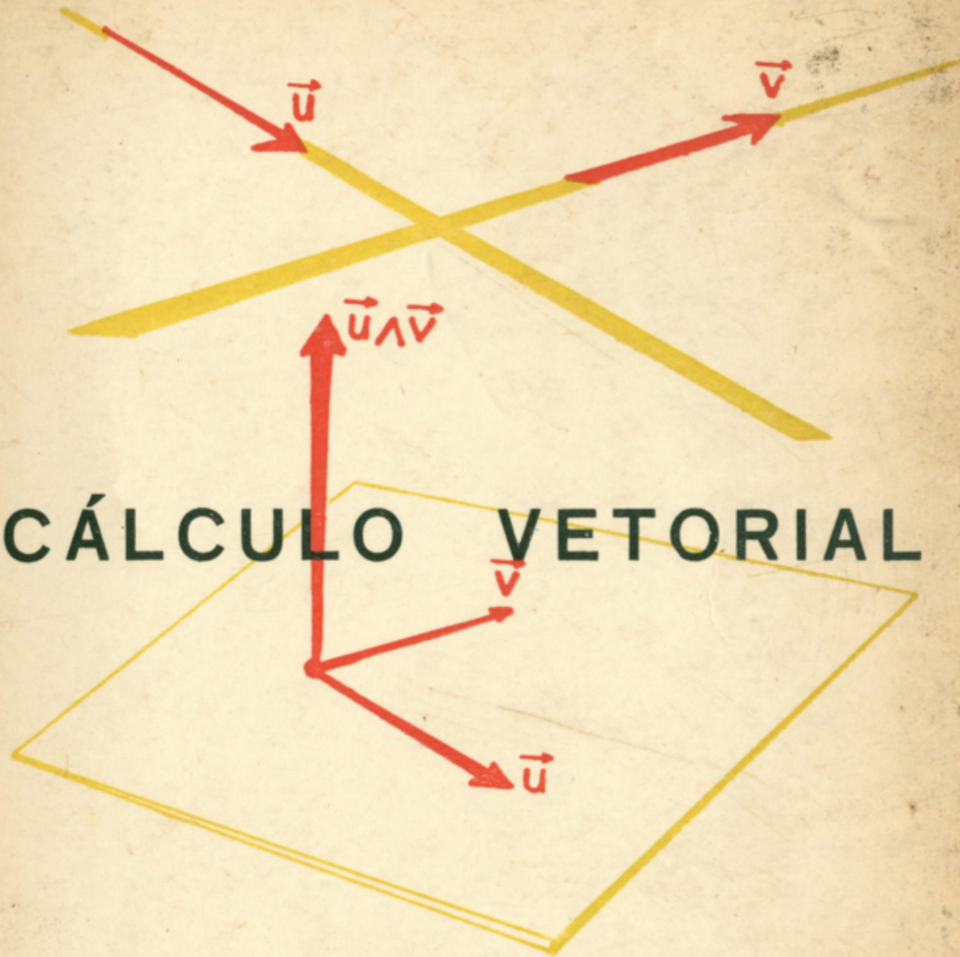
BENEDITO CASTRUCCI



CÁLCULO VETORIAL

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} \neq \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$$

2a. edição

"L.P.M."
editôra

I - ÁLGEBRA VETORIAL

1500

BENEDITO CASTRUCCI

CÁLCULO VETORIAL

2a. edição

I - ÁLGEBRA VETORIAL

Distribuição

"L. P. M." — editôra — rua maria antônia, 103 — são paulo

P R E F Á C I O

Com êste primeiro volume, apresentamos a primeira parte do curso de Cálculo Vetorial (Álgebra Vetorial) que desenvolvemos no primeiro ano de licenciatura de Matemática e Física.

O nosso objetivo é dar simultâneamente uma iniciação intuitiva e elementar do assunto e um exemplo de estrutura de espaço vetorial tri-dimensional, cujos resultados podem ser fàcilmente generalizados pelo leitor.

Para as explicações geométricas e mecânicas, cremos que foi tratado suficientemente o interessante capítulo das equações vetoriais, que ilustram a dificuldade das resoluções, no manejo de operações como produto vetorial, que não possuem inversas.

O estudo relativo à Análise acha-se num segundo volume denominado Cálculo Vetorial - II Análise Vetorial escrito em colaboração com Geraldo Santos Lima Filho.

Ficamos desde já muito gratos aos colegas que apontarem erros e senões, que certamente nos permitirão melhorar o trabalho.

Benedito Castrucci

ÍNDICE

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA VETORIAL

§ 1º - CONCEITO ELEMENTAR DE VETOR

1.1. Nas questões de física e mecânica aparecem grandezas que são caracterizadas por um número real e outras que, além dêsse número necessitam das noções de sentido e direção, para serem determinadas.

As primeiras denominam-se grandezas escalares e as últimas, grandezas vetoriais.

Devido a isto, surgiu uma teoria, a vetorial, que estabeleceu algoritmos baseados nessas considerações.

1.2. É intuitivo que, num segmento AB, há dois sentidos: o de A para B e o de B para A. O segmento com um sentido chama-se orientado e se anota AB, se de A para B, e BA, se de B para A. No segmento orientado AB, A é a origem e B é a extremidade.

Para facilitar a teoria, admitimos a existência de um segmento orientado em que B coincide com A: o segmento nulo, que indicamos por O.

Ao segmento orientado não nulo estão associados três elementos:

a) um número real (módulo), que é a medida de AB com uma unidade de u;

b) uma direção que é o que há de comum a tôdas as retas paralelas a AB;

c) um sentido, que é individuado pelo par AB, de A para B, ou BA, de B para A.

O módulo do segmento nulo é zero; a direção e o sentido não são definidos.

Note-se que dois segmentos orientados de uma mesma reta ou de retas paralelas têm a mesma direção, podendo ter ou não o mesmo sentido; mas, se ambos têm o mesmo sentido, então têm a mesma direção.

1.3. Um segmento orientado AB é equipolente a um segmento orientado CD se e sòmente se:

a) ambos são nulos, ou

b) no caso em que não são nulos, os módulos são iguais e ambos têm o mesmo sentido, e portanto, a mesma direção.

Valem as propriedades igualiformes:

a) reflexiva: todo segmento AB é equipolente a si mesmo;

b) simétrica: se AB é equipolente a CD, então CD é equipolente a AB;

c) transitiva: se AB é equipolente a CD, e CD é equipolente a MN, então AB é equipolente a MN.

Admitimos, também, como axiomas:

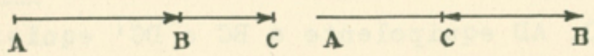
a) Segmentos equipolentes de mesma origem coincidem;

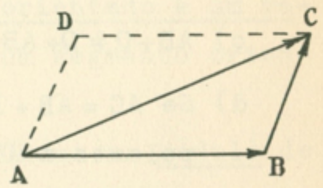
b) Dados um segmento AB e um ponto P existe um e um só segmento PQ equipolente a AB e de origem P.

1.4. DEFINIÇÃO. Diversos segmentos orientados são consecutivos quando a extremidade do primeiro é origem do segundo, a extremidade do segundo é origem do terceiro, e assim por diante.

DEFINIÇÃO. Chama-se soma ou resultante de dois segmentos orientados consecutivos ao segmento orientado cuja origem é a origem do primeiro e cuja extremidade é a extremidade do segundo.

As figuras mostram que AC é a soma de AB e BC, sendo que, no último caso, AC é a diagonal do paralelogramo ABCD.

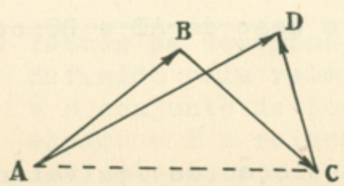


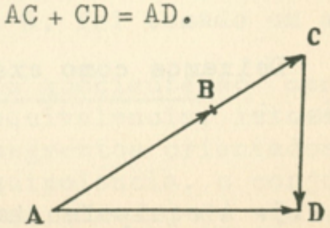


Indicamos esta operação de adição com o sinal +. Assim,

$$AC = AB + BC$$

A operação se estende a mais de dois segmentos orientados consecutivos; basta adicionar à soma de dois, o terceiro, e assim por diante. Nos casos das figuras, temos: $(AB+BC) + CD = AC + CD = AD$.

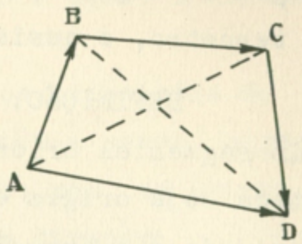




Dois segmentos de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos chamam-se opostos.

Propriedades da adição:

a) Associativa: $(AB+BC)+CD = AB+(BC+CD)$. Com efeito, $(AB+BC)+CD = AC+CD = AD$ e $AB+(BC+CD) = AB + (BC+CD) = AB+BD = AD$, o que verifica a propriedade.

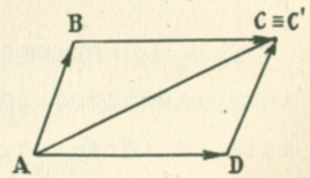


b) A soma de dois segmentos consecutivos opostos é o segmento nulo, isto é, $AB+BA = O$.

c) $AB+O = O+AB = AB$

d) Se $AC = AB+BC$, AD equipolente a BC e DC' equipolente a AB, então, C' coincide com C e $AC = AD + DC$.

A figura esclarece a propriedade, pois segmento AD = segmento BC e AD é paralelo a BC, donde ABCD é um paralelogramo e daí, segmento DC = segmento AB e DC é paralelo a AB, donde DC coincide com DC' (Propr.b,1.3) e, então, $C \equiv C'$.



Deixamos como exercício o caso de AB e BC colineares.

1.5. A equipolência é uma relação de equivalência no conjunto de todos os segmentos orientados, pois,

conforme 1.3, satisfaz às propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva. Dêste modo, formamos um novo conjunto, que é chamado das classes de equivalência, isto é, onde cada elemento é um conjunto de todos os segmentos equipolentes a um dado segmento. Cada classe de equivalência chama-se um vetor[1]. Êste é representado por um segmento orientado qualquer da classe que o define.

Note-se que todo segmento orientado AB representa um vetor, mas, êste pode ser representado por qualquer segmento orientado de um conjunto, onde todos são equipolentes a AB. Assim, pode-se dizer, por abuso de linguagem, que um segmento orientado é um vetor. Porém, um vetor não é sòmente um segmento orientado.

Designa-se o vetor por $\vec{v}$. Chama-se módulo do vetor ao módulo de um segmento orientado que o represente, e se designa por $|\vec{v}|$.

O vetor $\vec{v}$ quando representado por um segmento orientado AB, pode ser indicado pela notação de Grassmann, $B - A$. O seu módulo é $|B-A|$.

Da indicação $\vec{v} = B - A$, resulta a expressão $A + \vec{v} = B$, que se diz soma de um ponto e um vetor, o que significa que, a partir de A, foi tomado um segmen

(1) Também se denomina conjunto quociente ao conjunto definido pela relação de equivalencia, isto é se S é o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço e E a relação de equipolência, o conjunto V dos vetores é o conjunto das classes de equivalência ou conjunto quociente de S por E, o que se indica: $V = S/E$.

to orientado AB, que representa o vetor $\vec{v}$. A operação, a rigor, deveria ser indicada por outro sinal, pois não tem nada a ver com a adição de segmentos orientados consecutivos.

DEFINIÇÃO. Vetor unitário é o que tem módulo 1.

DEFINIÇÃO. Vetor nulo é o definido pela classe dos segmentos nulos. Indica-se por $\vec{0}$ [2].

DEFINIÇÃO. Versor de um vetor $\vec{v}$ não nulo é o vetor unitário de mesmo sentido que $\vec{v}$.

NOTA: Para um vetor não nulo, o vetor é o conjunto de um número real, uma direção e um sentido.

DEFINIÇÃO. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais se têm o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido. Indica-se: $\vec{u} = \vec{v}$. Pela definição de vetor, se $\vec{u} = \vec{v}$, então, $\vec{u}$ é idêntico a $\vec{v}$, isto é, são o mesmo vetor.

1.6. Dados a real diferente de zero e um vetor $\vec{v}$, não nulo, chama-se produto de a por $\vec{v}$ ao vetor $\vec{w}$ que tem módulo $|a||\vec{v}|$, a direção de $\vec{v}$, e o sentido de $\vec{v}$, se $a > 0$ e o oposto, se $a < 0$.

Se $a = 0$ ou $\vec{v}$ nulo, ou ainda ambos nulos, então o produto é o vetor nulo. O oposto de $\vec{v}$ vem quando $a = -1$, isto é, $-1.\vec{v} = -\vec{v}$.

Propriedades:

a) $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$.

(2) Embora não seja usual, para facilidade de impressão, indicamos o vetor nulo por $\bar{0}$.

Com efeito, temos $|(ab)\vec{v}| = |ab||\vec{v}| = |a||b||\vec{v}| = |a||b\vec{v}| = |a(b\vec{v})|$, e, quanto ao sentido de $(ab)\vec{v}$, é fácil ver que é o mesmo de $a(b\vec{v})$.

b) O versor de $\vec{v}$ é o vetor $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{1}{|\vec{v}|} . \vec{v}$.

Com efeito, o módulo de

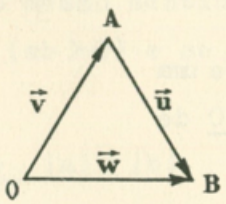
$$\frac{1}{|\vec{v}|} . \vec{v} \quad \text{é} \quad \left|\frac{1}{|\vec{v}|}\right| . \vec{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} . |\vec{v}| = 1$$

c) $1. \vec{v} = \vec{v}$.

De fato, $|1.\vec{v}| = |1|.|\vec{v}| = |\vec{v}|$ e o sentido de $1.\vec{v}$ é o de $\vec{v}$.

1.7. DEFINIÇÃO. Chama-se soma de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ ao vetor $\vec{w}$, que é representado por um dos segmentos equipolentes à soma de dois segmentos orientados consecutivos, respectivamente equipolentes a dois segmentos que representam $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

Geomètricamente, a partir de 0, tomados $0 + \vec{v} = A$ e $A + \vec{u} = B$, o vetor $B - 0 = \vec{w}$ é a soma.



Indicamos a nova operação de adição ainda pelo sinal +, isto é, $\vec{v} + \vec{u} = \vec{w}$.

Propriedades da adição de vetores.

1) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Decorre da propriedade associativa da adição de segmentos orientados consecutivos (nº 1.4).

2) <u>Comutativa:</u> $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

Pela propriedade d) do nº 1.4, vê-se fàcilmente a comutatividade.

3) $\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$.

Vem da propriedade c) do nº 1.4.

4) Para cada vetor $\vec{v}$, existe $-\vec{v}$, tal que $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$.

Provém da propriedade b) do nº 1.4, e do nº 1.6.

Valem as <u>propriedades distributivas</u>:

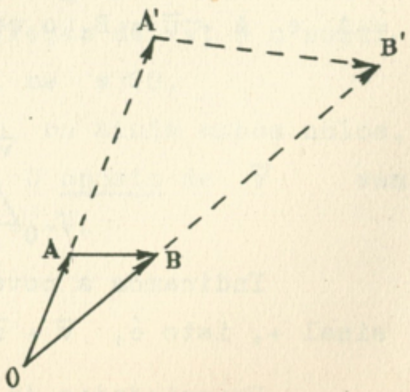
1) $a(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=a\,\vec{v}_1+a\,\vec{v}_2$. Se $a=0$ ou $\vec{v}_1=\vec{0}$, a prova é imediata.

Suponhamos $a\neq 0$, $\vec{v}_1\neq\vec{0}$ e $\vec{v}_2\neq\vec{0}$. Seja a soma $\vec{w}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, representada pela soma OB dos segmentos orientados OA e AB.

Aplicando-se uma <u>homotetia de centro O</u> de razão <u>a</u>, vem que

B' - O = (A'-O) + (B'-A') ou seja,

$a\vec{w}=a(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=a\vec{v}_1+a\vec{v}_2$.



2) $(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$.

Temos os seguintes casos.

a) <u>$a=0$ ou $b=0$ ou $\vec{v}=\vec{0}$</u>.

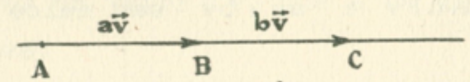
A prova é fácil, pois, seja $(0+b)\vec{v}$. É claro que $(0+b)\vec{v}=b\vec{v}=\vec{0}+b\vec{v}=\vec{0}.\vec{v}+b.\vec{v}$.

Ainda, no caso, $(a+b).\vec{0}$, tem-se imediatamente $(a+b).\vec{0}=\vec{0}=a.\vec{0}+b.\vec{0}$.

b) <u>$ab>0$</u>

Nesta hipótese, é claro que $|a+b|=|a|+|b|$. Daí, $|(a+b)\vec{v}|=|a+b|.|\vec{v}|=(|a|+|b|).|\vec{v}|=|a||\vec{v}|+|b||\vec{v}|=|a\vec{v}|+|b\vec{v}|$ e como $a\vec{v}$ e $b\vec{v}$ têm o mesmo sentido, $|a\vec{v}|+|b\vec{v}|=|a\vec{v}+b\vec{v}|$, isto é,

$$|(a+b)\vec{v}|=|a\vec{v}+b\vec{v}|$$

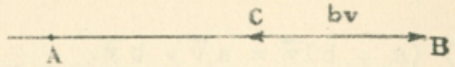


Assim os vetores $(a+b)\vec{v}$ e $a\vec{v}+b\vec{v}$ têm o mesmo módulo e mesma direção.

Como a e b têm o mesmo sinal, segue-se que os dois vetores têm o mesmo sentido, pois se $a+b>0$ então $a>0$ e $b>0$ ($ab>0$) e se $a+b<0$, também, $a<0$ e $b<0$.

c) <u>$ab<0$ e $|a|>|b|$</u>

É claro, então, que $|a+b|=|a|-|b|$. Daí, tem se $|(a+b)\vec{v}|=|a+b||\vec{v}|=(|a|-|b|)|\vec{v}|=|a||\vec{v}|-|b||\vec{v}|=|a\vec{v}|-|b\vec{v}|=|a\vec{v}+b\vec{v}|$ pois $a\vec{v}$ e $b\vec{v}$ são de sentidos opostos.



Os vetores $(a+b)\vec{v}$ e $a\vec{v} + b\vec{v}$ tendo mesmo modêlo e mesma direção, possuem, também, o mesmo sentido, pois, se $a<0$ e $b>0$, como $|a|>|b|$, então, o sentido de $(a+b)\vec{v}$ é o de $a\vec{v}$; anàlogamente, o sentido de $a\vec{v}+b\vec{v}$ é o de $a\vec{v}$. Raciocínio semelhante pode ser feito, se $a>0$ e $b<0$.

d) $\underline{ab<0 \text{ e } |a|=|b|}$

Agora, $|a+b| = |a| - |b| = 0$

Vem, então,

$$|(a+b)\vec{v}| = |a+b|\,|\vec{v}| = (|a|-|b|)|\vec{v}| = 0.\vec{v} = \vec{0} =$$

$$= |a\vec{v}| - |b\vec{v}| = |a\vec{v} + b\vec{v}|.$$

Os vetores $(a+b)\vec{v}$ e $a\vec{v}+b\vec{v}$ são nulos e, portanto, iguais.

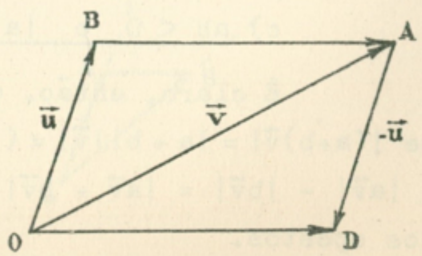
1.8. DEFINIÇÃO. A operação de adicionar a um vetor $\vec{v}$, o oposto $-\vec{u}$ de um vetor $\vec{u}$, chama-se <u>subtração</u>; $\vec{v}+(-\vec{u})$ é a diferença e se escreve $\vec{v}-\vec{u}$.

Geomètricamente, temos: $A-O=\vec{v}$ e $B-O=\vec{u}$, então $A-B=\vec{v}-\vec{u}$, pois

$D-A=-\vec{u}$ e $\vec{v}+(-\vec{u}) =$

$=(A-O)+(D-A)=D-O=$

$=A-B.$



1.9. Resumindo as considerações atrás, vemos que o conjunto dos vetores do espaço constituem um <u>grupo comutativo</u>, para a operação de adição, pois valem as propriedades:

(A)
- a) $\vec{u}+\vec{v}$ é um vetor $\vec{w}$ (fechamento);
- b) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativa);
- c) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (comutativa);
- d) existe o vetor $\vec{0}$ tal que $\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$ (elemento neutro);
- e) dado $\vec{v}$, existe $-\vec{v}$, tal que $\vec{v}+(-\vec{v})=(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$ (elemento inverso).

Como, além disto, existe o <u>produto</u> de um número real <u>a</u> por um vetor $\vec{v}$, que é um vetor $\vec{w}=a\vec{v}$, com as propriedades:

(B)
- a) $b(a\vec{v}) = (ba)\vec{v}$;
- b) $1.\vec{v}=\vec{v}$.

(C)
- a) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$;
- b) $(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$,

dizemos, então, que o conjunto dos vetores constitui um <u>espaço vetorial</u> sôbre o corpo dos números reais, devido às propriedades (A), (B) e (C).

<u>Nota</u>. O produto $a\vec{v}$ de a por $\vec{v}$. é denominado, também, <u>produto do escalar a pelo vetor $\vec{v}$</u>.

EXERCÍCIOS

1. Há diferença nas operações indicadas abaixo ?

$$AB + BC = AC$$

$$A + \vec{v} = B$$

$$(B - A) + (C - B) = (C - A)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}.$$

2. A operação de adição de segmentos orientados consecutivos é comutativa? Por que?

3. Qual é a estrutura do conjunto V' de pares ordenados de números reais relativos (a,b) para a adição definida por

$$(a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d)\ ?$$

4. Qual é a estrutura do conjunto V, se acrescentarmos à anterior a nova operação

$$\alpha(a,b) = (\alpha a,\ \alpha b),$$

onde α é real ?

§ 2º - DEPENDÊNCIA LINEAR

2.1. DEFINIÇÃO. Diz-se que n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes, ou que o conjunto é linearmente independente, se de

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

decorre que todos os números a_i (reais) são nulos.

Se houver algum a_i não nulo, em $\sum a_i \vec{v}_i = \vec{0}$, então os vetores são linearmente dependentes.

TEOREMA 1. O vetor $\vec{0}$ é linearmente dependente e, também, linearmente dependente com qualquer conjunto de vetores.

Com efeito, $1.\vec{0} = \vec{0}$ prova que existe um $a_i = 1$ que não é nulo.

Por outro lado,

$$1.\vec{0} + \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

mostra que os $n+1$ vetores $0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ são linearmente dependentes.

2.2. DEFINIÇÃO. O vetor $\vec{v}_1$ não nulo é paralelo a $\vec{v}_2$ não nulo se e sòmente se

$$\vec{v}_1 = a\,\vec{v}_2,$$

Daí, é claro que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ têm a mesma direção.

TEOREMA 2. Se $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linearmente dependentes.

Como $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{v}_2$, então, $\vec{v}_1 = a\,\vec{v}_2$ ou seja $\vec{v}_1 - a\vec{v}_2 = \vec{0}$, o que mostra que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são linearmente dependentes, pois $\vec{v}_1 = 1.\,\vec{v}_1$.

TEOREMA RECÍPROCO. Se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, não nulos, são linearmente dependentes, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos.

Como ambos são não nulos, então $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = 0$ e pelo menos um dos a_i, por exemplo, a_1 é diferente de zero. Daí, vem

$$\vec{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\vec{v}_2 \quad \text{ou} \quad \vec{v}_1 = b\,\vec{v}_2, \text{ onde } b \neq 0, \text{ pois } \vec{v}_1 \neq 0.$$

Então, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ têm a mesma direção, pois $\vec{v}_1$ tem a direção de $b\,\vec{v}_2$, ou seja, a de $\vec{v}_2$. Logo, $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{v}_2$.

Reunindo o teorema 2 e o seu recíproco, temos:

Condição necessária e suficiente para que dois vetores não nulos sejam paralelos é que os mesmos sejam linearmente dependentes.

TEOREMA 3. Se $\vec{v}_1$ é paralelo a $\vec{v}_2$, então existe um só número real a tal que $\vec{v}_1 = a\,\vec{v}_2$.

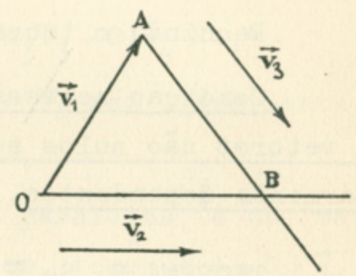
De fato, se $\vec{v}_1 = a\,\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1 = a'\vec{v}_2$, então $\vec{v}_1 - \vec{v}_1 = 0 = a\,\vec{v}_2 - a'\vec{v}_2 = (a - a')\vec{v}_2$, donde, como $\vec{v}_2 \neq 0$, vem $a - a' = 0$ e $a = a'$.

2.3. DEFINIÇÃO. Três vetores não nulos são complanares se podem ser representados por três segmentos orientados complanares.

A definição estende-se a mais de três vetores.

TEOREMA 4. Se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são complanares, então são linearmente dependentes.

Como nenhum deles é nulo, tomemos o ponto O num plano paralelo ao que contém os segmentos representantes e, suponhamos os vetores dois a dois não paralelos. Consideremos o vetor $A - O = \vec{v}_1$. Em seguida, tracemos por O a reta que tem a direção de $\vec{v}_2$ e, por A, a reta de direção igual à de $\vec{v}_3$. Estas retas cortam-se em B.



Temos então, o vetor $B - A = a_3\vec{v}_3$ e o vetor $B - O = a_2\vec{v}_2$. Daí, temos $(A - O) + (B - A) = B - O$, donde $\vec{v}_1 + a_3\vec{v}_3 = a_2\vec{v}_2$ ou

$$1.\vec{v}_1 + a_3\vec{v}_3 - a_2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Logo, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são linearmente dependentes, como é óbvio.

Se dois vetores, por exemplo, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos, então, temos: $\vec{v}_1 = a\,\vec{v}_2$. Daí, vem

$$\vec{v}_1 - a\,\vec{v}_2 + 0.\vec{v}_3 = \vec{0},$$

o que prova que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ são linearmente dependentes.

Êste número independe da base ortogonal dextrógira escolhida, mas depende da orientação do espaço, o que é fácil provar.

São propriedades imediatas:

1. $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \times \vec{c}$;

2. $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

O produto definido no § 6º satisfaz à definição acima.

*

B I B L I O G R A F I A

1. ACCIOLY - Equações Vetoriais - Rio, 1942.

2. ALBUQUERQUE SILVEIRA - Cálculo Vetorial - São Paulo, 1927.

3. BIEBERBACH - Analytische Geometrie - Teubner,1930

4. BOMFIM, L - Exercícios de Cálculo Vetorial - São Paulo.

5. BOULIGAND RABATÉ - Initiation aux Méthodes Vectorielles. Paris. 1926.

6. BREVES FILHO, J.A. - Cadernos de Matemática nº 7 - vol. 2 - Escola Politécnica.

7. DURALI-FORTE MARCOLONGO - Analisi Vettoriale Generale - Zanichelli, 1929.

8. IDEM - Omografie Vettoriale - 1909.

9. BOULIGAND - Leçons de Géométrie Vectorielle - Paris.

10. BRICARD - Cálculo Vetorial - Rio, 1958.

11. CAMARGO, J.O.M. - Cálculo Vetorial - S.Paulo,1946

12. CHATELET FÉRIET - Calcul Vectoriel - Paris.

13. COFFIN - Calcul Vectoriel - Paris, 1914.

14. DANTAS, E.M. - Elementos de Cálculo Vetorial - Rio, 1962.

15. LACAZ NETTO, F.A. - Exercícios de Vetores - S.Paulo, 1942.

16. HALMOS - Finite Dimensional Vector Spaces - Princeton, 1948.

17. TIBIRIÇÁ DIAS, A. - Notas de Cálculo Vetorial - S.Carlos, 1953.

18. VIVIER, M. - Cours de Calcul Vectoriel - Paris.

19. VARENNES MENDONÇA - Noções de Cálculo Vetorial- Lisboa, 1949.

*

Do mesmo autor:

Cálculo Vetorial II (Análise Vetorial)

Geometria Analítica — Vol I e II

Lições de Geometria Elementar

Lições de Geometria Plana

Elementos da Teoria dos Conjuntos

Geometria Projetiva (2 volumes)

"LPM"
imprimiu
rua maria antonia, 103
fone: 35-3304