Thales Mello Carvalho

MATEMÁTICA

2º ciclo

ão Getúlio Vargas

OUTRAS OBRAS DO AUTOR

Curiosidades Matemáticas
Lições de Trigonometria Retilínea
Lições de Matemática, 2 fascículos
Sôbre um sistema de amortização por anuidades variáveis, **Revista Brasileira de Atuária**
O número de ouro
Sôbre alguns ábacos de alinhamento e sua aplicação ao cálculo da taxa de anuidades, tese
Elementos de Matemática Comercial e Financeira
Matemática, para o primeiro ano dos Cursos Comerciais Técnicos
Matemática, para o segundo ano dos Cursos Comerciais Técnicos

Thales Mello Carvalho

Catedrático de Metodologia do Cálculo do Instituto de Educação do antigo Distrito Federal. Catedrático de Matemática Financeira da Faculdade Nacional de Ciências Econômicas. Professor de Matemática Geral e Financeira do Curso de Aperfeiçoamento da Caixa Econômica do Rio de Janeiro e do Curso de Extensão do Instituto de Resseguros do Brasil.

MATEMÁTICA

2.º CICLO

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
INSTITUTO DE DOCUMENTAÇÃO
SERVIÇO DE PUBLICAÇÕES
RIO DE JANEIRO — GB — BRASIL — 1969

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS — INSTITUTO DE DOCUMENTAÇÃO — BENEDICTO SILVA, Diretor; Serviço de Publicações: Diretor: RAUL LIMA; Coordenação Editorial: R. A. AMARAL VIEIRA; capa de N. MEDINA; composto e impresso nas oficinas da SEDEGRA — Sociedade Editôra e Gráfica Ltda.

Nota do Editor

Visando ao desenvolvimento cultural do País, a FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS voltou-se à edição de livros e revistas indispensáveis à formação de pessoal técnico à altura das exigências nacionais.

Cumprindo o objetivo imediato de contribuir para a difusão do livro técnico e didático da melhor qualidade, criou o SERVIÇO DE PUBLICAÇÕES, sua editôra, a quem compete executar o programa editorial.

De sua atividade destaca-se o lançamento ou reedição de uma série de livros destinados principalmente aos professôres e estudantes brasileiros dos cursos de nível médio. Neste último caso situa-se o famoso livro do Professor THALES MELLO CARVALHO, agora sob a responsabilidade desta instituição.

O nome do autor e as inúmeras edições atingidas tornam desnecessária qualquer apresentação dessa obra, vastamente conhecida em todo o País, por alunos e professôres de Matemática.

A edição presentemente lançada pela FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS difere das anteriores apenas em seu aspecto formal. Os três volumes que anteriormente constituíam *Matemática para o curso colegial* foram reunidos neste único volume de *MATEMÁTICA* (2º ciclo). A matéria, todavia, é exatamente a mesma que tornou clássica essa obra didática, ressalvados alguns pontos que mereceram a atualização procedida pelo Professor AMAURY PEREIRA MUNIZ, a quem a FGV incumbiu do encargo de revisão do texto e sua adaptação aos atuais currículos.

Esta edição, portanto, atinge a dois objetivos distintos mas igualmente importantes: presta sua homenagem à memória do saudoso professor e oferece a alunos e professôres um livro-texto de alto conteúdo didático.

Sumário

"Ao professor compete fazer do livro um organismo plástico e vivo; compete-lhe escolher o que se pode fazer e o que se pode deixar, o que se pode antepor ou pospor segundo as condições peculiares dos alunos. O que importa muito mais é a aptidão para pensar do que o acúmulo de conhecimentos específicos que haja conseguido fazê-los aprender."

"Nosso ideal deveria ser, especialmente agora que o ensino racional da Matemática começa nas escolas médias inferiores, encobrir, ao menos a princípio, o rigorismo lógico, como matéria perigosa para ser tocada diretamente por mãos demasiado tenras. Cobrir não quer dizer desterrar. Há um um rigor substancial que vale muito mais do que o rigor formal. A armadura fundamental do tratado e do ensino há de permanecer sempre impecável do ponto de vista racional; mas o organismo completo deve estar bem nutrido de observações intuitivas; as mais áridas considerações devem ser sàbiamente disfarçadas e dosificadas, e as definições esquemáticas oportunamente diluídas."

F. SEVERI

À minha filhinha

DORIS

com todo o carinho paternal

MATEMÁTICA

2.º ciclo

CAPÍTULO 1

O Plano e a Reta no Espaço

DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

1. Preliminares. A geometria dedutiva baseia-se num corpo de *noções não definidas* e de *proposições não demonstradas.*

Entre as primeiras podemos citar os elementos fundamentais da geometria como o *ponto,* a *reta* e o *plano.* São, conforme os concebeu HILBERT, sêres abstratos, verdadeiros símbolos vazios de significação aos quais *nossa intuição* atribui um significado concreto compatível com as impressões que, através dos sentidos, recebemos do mundo exterior. Assim, a imagem de um fio esticado, a orla de uma régua, etc., dão-nos a impressão de uma *linha reta;* a superfície de uma mesa ou de um espelho, por exemplo, são elementos intuitivos que associamos à idéia de *plano.*

Sôbre êstes elementos fundamentais estabelecem-se *proposições não demonstradas* que se denominam *axiomas* ou *postulados.*

Pretendia-se outrora distinguir *axiomas* de *postulados,* definindo-se os primeiros como *proposições indemonstráveis, porém evidentes* e os segundos como *proposições indemonstráveis, mas não evidentes.* A condição de evidência é, entretanto, inútil para o processo dedutivo(*). Sendo, além disso, um fator subjetivo, não permitiria uma classificação objetiva e rigorosa dos *princípios não demonstrados,* nas duas categorias: *axiomas* (proposições evidentes) e *postulados* (proposições não evidentes) (**).

O que há de fundamental na noção de *axioma* ou *postulado* é que êles representam proposições indemonstráveis, cuja aceitação se torna

(*) "A condição de evidência deve desaparecer por completo do processo dedutivo. Dizendo que um certo postulado é evidente ou não evidente emitiremos uma afirmação que nada tem a ver com a teoria a construir. Pouco importa que os postulados apresentem aspecto artificial, obscuro ou mesmo paradoxal" (AMOROSO COSTA, M. *As Idéias Fundamentais da Matemática,* Rio de Janeiro Pimenta de Melo, 1929, p. 37).

(**) "L'évidence n'est point une chose absolue, qui s'impose et qu'on ne puisse discuter; elle est subjective, elle a ses degrés. Et tous les esprits ne la conçoivent pas de la meme maniere". (GONSETH, F. *Les Fondaments des Mathématiques,* Paris, Lib. Le François, 1926, p. 11).

necessária como ponto de partida de todo o encadeamento lógico subseqüente (*).

Usaremos, de preferência, o vocábulo *postulado*, cuja significação etimológica está bem próxima da que lhe é, aqui, atribuída. "Postulado, diz Amoroso Costa, (**) significa *o que se pede*, o que se supõe concedido; no caso presente, aquilo que não nos obrigamos a demonstrar".

2. Postulados da reta e do plano. Admitamos como postulados, as seguintes proposições que passaremos a analisar.

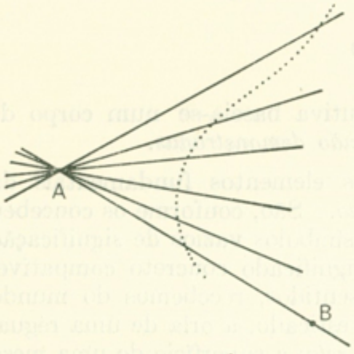


Fig. 1

a) Dois pontos distintos do espaço determinam uma reta. Êste postulado, também, se pode assim enunciar: *Por dois pontos distintos do espaço passa uma só reta.* Dêle temos a seguinte noção intuitiva: deslocando-se arbitràriamente, no espaço, uma reta fixa num ponto A (Fig. 1), e admitindo-se que ela possa tomar sucessivamente tôdas as posições possíveis, *sòmente numa posição* ela passará por um ponto fixo B do espaço, distinto de A.

b) Três pontos distintos, não em linha reta, determinam um plano. Êste postulado também se pode enunciar do seguinte modo: *Por três pontos distintos, não em linha reta, passa um só plano.* Dêle temos a seguinte noção intuitiva: fazendo girar um plano, supondo fixos dois de seus pontos A e B, e admitindo que êle assuma tôdas as posições possíveis, *sòmente numa posição* conterá um determinado ponto M do espaço não situado sôbre a reta AB (Fig. 2).

c) A reta que passa por dois pontos distintos de um plano está tôda contida nêle, isto é, todos os seus pontos são, também, pontos do plano.

Esta é uma propriedade característica do plano, chegando, alguns autores, até a considerá-la

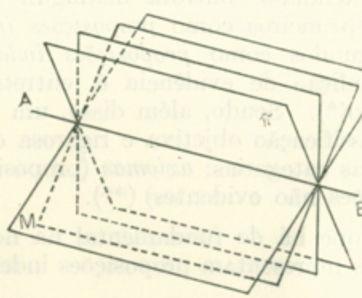


Fig. 2

(*) "La necessité d'accepter est équivalente a l'impossibilité de démonstrer. L'axiome est donc ce qu'il faut admettre pour pouvoir ensuite rester sans défaillance sur le plan logique". (Gonseth, F. *ob. cit.*, p. 11).

(**) *Ob. cit.*, p. 36.

como *definição* do plano. Dela temos uma noção intuitiva, quando fazemos com que a orla de uma régua, em qualquer direção, se adapte perfeitamente à superfície plana de uma mesa.

3. Proposições deduzidas. Vejamos, para ilustração do que foi dito, algumas proposições que se deduzem dos postulados anteriores.

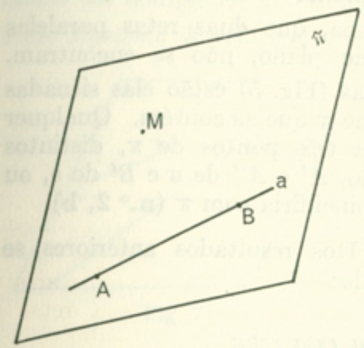


Fig. 3

a) Uma reta e um ponto exterior a ela determinam um plano, ou, o que é o mesmo, *por uma reta e por um ponto exterior a ela passa um só plano.*

Seja a uma reta e M um ponto exterior a ela. (Fig. 3). Tomemos, arbitràriamente, dois pontos distintos, A e B sôbre a. Então, os três pontos, A, B e M, não em linha reta, em virtude do postulado *b*) (**n.º 2**), determinam um plano π, que contém a reta a porque tem dois pontos comuns (distintos) com ela (postulado *c* do **n.º 2**). Êsse plano é o único que satisfaz as condições do teorema, pois qualquer outro plano, passando por a e por M, conteria os três pontos A, B e M e, portanto, coincidiria com π. (postulado *b* do **n.º 2**).

b) Duas retas distintas que têm um ponto comum determinam um plano, ou o que é o mesmo, *por duas retas distintas que têm um ponto comum passa um só plano.*

Sejam a e b duas retas distintas, tendo um ponto comum M (Fig. 4). Tomemos, arbitràriamente, dois pontos A e B respectivamente sôbre a e b. Em virtude da hipótese feita, os três pontos A, B e M não estão em linha reta e, portanto, determinam um plano

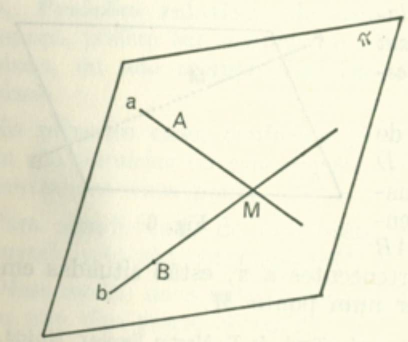


Fig. 4

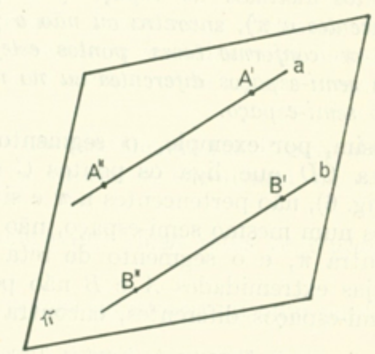


Fig. 5

π (**n.º 2, b**) que contém as retas a e b porque tem com cada uma delas dois pontos comuns (distintos) (**n.º 2, c**). Além disso, π é o único plano que satisfaz esta condição, pois qualquer outro plano que contivesse as retas a e b, conteria os pontos A, B e M e, portanto, coincidiria com π (**n.º 2, b**).

c) *Duas retas paralelas determinam um plano*, ou, o que é o mesmo, *por duas retas paralelas passa um só plano*.

Realmente, sabemos da geometria plana, que duas retas paralelas são aquelas que, situadas num mesmo plano, não se encontram. Então, se a e b são duas retas paralelas (Fig. 5) estão elas situadas sôbre um plano π, isto é, existe um plano π que as contém. Qualquer outro plano nessas condições, conteria três pontos de π, distintos e não em linha reta (como, por exemplo, A' e A'' de a e B' de b, ou B' e B'' de b e A' de a) e, portanto, coincidiria com π (**n.º 2, b**).

4. Determinação de um plano. Dos resultados anteriores se conclui que um plano fica determinado:

1) *por três pontos não em linha reta;*
2) *por uma reta e um ponto exterior a essa reta;*
3) *por duas retas distintas que têm um ponto comum;*
4) *por duas retas paralelas.*

INTERSECÇÃO DE PLANOS E RETAS

5. Preliminares.

a) Um plano π divide o espaço em duas regiões que denominaremos *semi-espaços*. Cada uma dessas regiões tem uma infinidade de pontos, caracterizando-se pela seguinte propriedade intuitiva que tomaremos como postulado: (*)

Todo segmento de reta, que une dois pontos distintos do espaço (não pertencentes a π), encontra ou não o plano π conforme êsses pontos estejam em semi-espaços diferentes ou no mesmo semi-espaço.

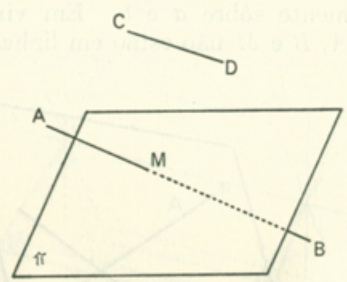


Fig. 6

Assim, por exemplo, o segmento de reta CD que liga os pontos C e D (Fig. 6), não pertencentes a π e situados num mesmo semi-espaço, não encontra π, e o segmento de reta AB cujas extremidades A e B não pertencentes a π, estão situadas em semi-espaços diferentes, encontra π num ponto M.

(*) SEVERI, F. *Elementos de Geometria*, Tomo Segundo, Trad. de T. Martin Escobar, Madrid, Editorial Labor, 1935, p. 157.

Diremos que dois pontos estão do *mesmo lado*, ou *em lados opostos* de um plano, conforme pertençam, ou não, ao mesmo semi-espaço determinado por êsse plano.

b) Da Geometria Plana sabemos que uma reta r, situada sôbre um plano π, determina sôbre êste dois semiplanos, caracterizados pela seguinte propriedade intuitiva, que pode ser denominada *postulado dos semiplanos* determinados por uma reta sôbre um plano:

Todo segmento de reta que une dois pontos distintos de π (não pertencentes a r) encontra ou não a reta r, conforme êsses pontos estejam em semiplanos diferentes ou no mesmo semiplano.

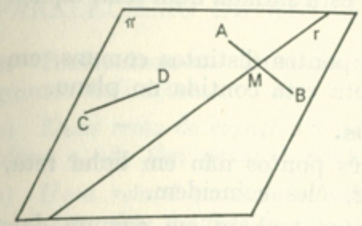


Fig. 7

Assim, o segmento AB (Fig. 7) encontra a reta r, porque A e B estão em semiplanos diferentes relativamente a r, e o segmento CD não a encontra, porque C e D estão no mesmo semiplano determinado por r.

c) Anàlogamente, um ponto M, tomado sôbre uma reta r (Fig. 8) divide esta em duas *semi-retas*, caracterizadas pela seguinte propriedade intuitiva que denominaremos *postulado das semi-retas* determinadas por um ponto sôbre uma reta:

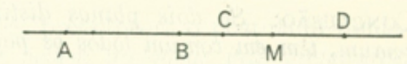


Fig. 8

Todo segmento de reta cujas extremidades são pontos (distintos) de r (diferentes de M) é ou não dividido por M, conforme êsses pontos estejam em semi-retas diferentes ou na mesma semi-reta.

No primeiro caso está incluído o segmento CD da figura 8, e no segundo o segmento AB.

6. Posições relativas de duas retas. Duas retas distintas, no espaço, podem ser *complanares*, isto é, estarem situadas num mesmo plano, ou *não complanares*, isto é, não pertencerem a um mesmo plano.

No primeiro caso, conforme já sabemos da Geometria Plana, elas ou são *paralelas* ou *concorrentes*, isto é, ou não se encontram, ou encontram-se num ponto.

Para simplicidade de expressão diremos que duas retas *se cruzam* quando não são complanares(*).

Dêsse modo, duas retas distintas no espaço ou se cortam num ponto ou não têm ponto comum.

(*) SEVERI, F. *ob. cit.*, 2.º vol., p. 160.

Observemos, ainda, que se duas retas têm dois pontos distintos comuns, em virtude do postulado, *a*, do **n.º 2** elas coincidem, isto é, têm uma infinidade de pontos comuns.

7. Posições relativas de uma reta e um plano.

a) Se uma reta e um plano não têm ponto comum, diz-se que são *paralelos*(*).

b) Se uma reta tem apenas um ponto comum com um plano, diz-se que o plano e a reta se cortam. Neste caso, o plano divide a reta em duas semi-retas, cada uma das quais está situada num semi-espaço determinado por êsse plano.

c) Se uma reta e um plano têm dois pontos distintos comuns, em virtude do postulado **c) do n.º 2**, a reta está contida no plano.

8. Posições relativas de dois planos.

a) Se dois planos têm em comum três pontos não em linha reta, em virtude do postulado *b*) do n.º 2, êles coincidem.

b) Admitamos que dois planos distintos tenham em comum dois pontos distintos. Então, a reta definida por êsses pontos (**n.º 2, a**) está contida em cada um dos planos (**n.º 2, c**). Por outro lado, não pode existir nenhum ponto comum fora dessa reta, porque, do contrário, os dois planos coincidiriam (**n.º 3, a**) o que é contra a hipótese.

Conclusão: *Se dois planos distintos têm dois pontos distintos em comum, têm em comum todos os pontos da reta por êles definida e sòmente êsses pontos.*

c) Suponhamos que dois planos distintos π e σ tenham em comum um ponto M (Fig. 9). Sejam r e s duas retas distintas de π passando pelo ponto M. Então, o plano σ divide cada uma dessas retas em duas semi-retas, situadas cada uma num semi-espaço determinado pelo plano σ (**n.º 7, b**).

Seja A um ponto de uma das semi-retas de s e B um ponto da semi-reta de r situada no semi-espaço oposto ao da semi-reta considerada de s. Então, os pontos A e B estão em lados opostos do plano σ, e, portanto, o segmento AB, situado sôbre π (**n.º 2, c**), encontra σ em um ponto P, (**n.º 5, a**) diferente de M, pois, do contrário, os pontos A, M e B estariam em linha reta e as retas r e s não seriam distintas, o que é contra a hipótese. Assim sendo, os planos π e σ têm dois pontos distintos comuns M e P e, portanto, em

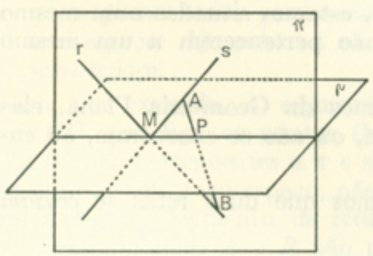


Fig. 9

(*) Estudaremos, mais adiante, suas propriedades.

virtude do teorema precedente, têm em comum todos os pontos da reta MP e sòmente êstes.

Conclusão: *Dois planos distintos, que têm um ponto comum, têm em comum todos os pontos de uma reta que passa por êsse ponto e sòmente êsse.*

d) Se dois planos distintos não têm nenhum ponto comum diz-se que são paralelos. Veremos, mais adiante, que, existem tais planos e estudaremos suas principais propriedades.

PARALELISMO DE RETAS E PLANOS

9. Preliminares. Destaquemos do estudo anterior as três seguintes definições:

a) *Duas retas do espaço são paralelas, quando pertencem a um mesmo plano e não têm nenhum ponto comum, isto é, não se encontram.*

b) *Uma reta é paralela a um plano quando não tem ponto comum com êste, isto é, quando não o encontra.*

A existência de uma reta e um plano em tais condições será demonstrada mais adiante (**n.º 11**).

c) *Dois planos são paralelos quando não têm nenhum ponto comum, isto é, quando não se encontram.*

Convém lembrar que estas definições pressupõem o postulado fundamental de que *a reta e o plano se podem prolongar indefinidamente.*

10. Teorema. *Por um ponto do espaço pode-se tirar uma paralela a uma reta e sòmente uma.*

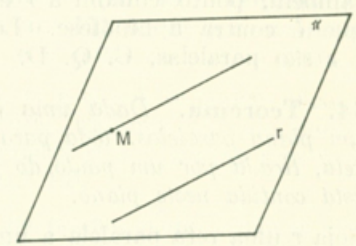


Fig. 10

Seja r uma reta do espaço e M um ponto fora dessa reta (Fig. 10). Designemos por π o plano definido por M e r (**n.º 3, a**). Uma paralela a r tirada por M determinará com r um plano (**n.º 3, b**) que, por conter a reta r e o ponto M, deve coincidir com π. Então, pelo postulado fundamental da Geometria Plana, haverá uma e sòmente uma paralela a r tirada por M, C. Q. D.

11. Teorema. *Tôda reta, não situada sôbre um plano, e paralela a uma reta contida nesse plano, é paralela ao plano.*

Seja s uma reta não situada num plano π e paralela a uma reta r contida neste plano.

Se a reta s encontrasse o plano π, verificar-se-ia uma das duas seguintes hipóteses, contrárias à que foi feita:

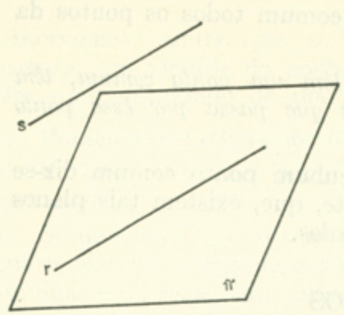


Fig. 11

a) a reta s encontraria o plano π num ponto situado sôbre r, e, portanto, r e s *seriam concorrentes;*

b) a reta s encontraria o plano π num ponto exterior a r e, portanto, r e s *se cruzariam.*

12. Corolários.

a) Dadas duas retas paralelas, todo plano que contenha uma delas e seja distinto do plano por elas definido, é paralelo à outra.

b) Por um ponto tomado fora de um plano pode-se tirar uma infinidade de retas paralelas a êsse plano. Obtêm-se estas tirando pelo ponto retas paralelas às diferentes retas contidas no plano.

13. Teorema. *Dados uma reta e um plano paralelos, todo plano que passe pela reta e encontre o plano dado, corta êste plano segundo uma paralela à reta dada.*

Seja r uma reta e π um plano paralelo a ela (Fig. 12). Tiremos por r um plano σ que corte o plano π e seja s a reta de intersecção(*). As retas r e s, situadas no mesmo plano σ, não podem encontrar-se, pois, como s está contida em π, qualquer ponto comum a r e s seria, também, ponto comum a r e π, o que é contra a hipótese. Logo, r e s são paralelas, C. Q. D.

14. Teorema. *Dada uma reta e um plano paralelos, tôda paralela à reta, tirada por um ponto do plano, está contida neste plano.*

Seja r uma reta paralela a um plano π (Fig. 12) e M um ponto dêste plano. Como só há uma reta passando por M e paralela a r (**n.° 10**), esta deve, então, coincidir com a reta s, paralela a r (**n.° 13**), e obtida pela intersecção com o plano π do plano σ definido por M e r. Logo, a paralela procurada está contida no plano π.

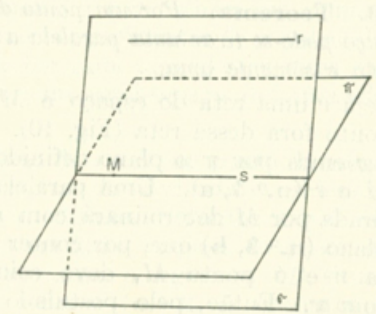


Fig. 12

15. Teorema. *Se duas retas são paralelas, todo plano que corta uma delas também corta a outra.*

*) O plano σ pode ser determinado pela reta r e por um ponto arbitrário M de π.

Sejam r e s duas retas paralelas e π um plano que corta r num ponto M (Fig. 13). Queremos demonstrar que s, também, é cortada pelo plano π.

Realmente, se s não encontrasse π, ou seria paralela a π ou estaria contida nêle. Em ambos os casos, r, sendo paralela a s, e tendo um ponto M comum com π estaria contida nêle (**n.° 14**), o que é contrário à hipótese. Logo, s também corta π, C. Q. D.

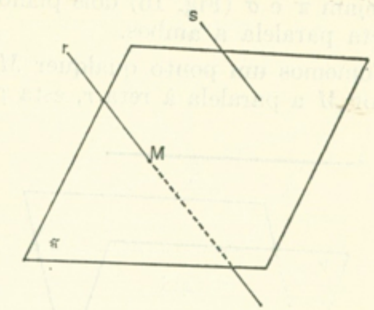


Fig. 13

16. Teorema. *Duas retas distintas, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si.*

Sejam m e n duas retas paralelas a uma mesma reta r (Fig. 14). Queremos demonstrar que m e n são paralelas entre si. Para isso demonstremos separadamente que:

a) m e n estão no mesmo plano;

b) m e n não se encontram.

a) Admitamos que m e n não estivessem no mesmo plano. Então, um plano passando por m cortaria n e, portanto, r (**n.° 15**). Cortanto r, cortaria também m (**n.° 15**), o que é contrário à hipótese. Logo, m e n estão no mesmo plano.

b) Por outro lado, m e n não se podem encontrar, pois, do contrário, teríamos por um ponto do espaço duas paralelas m e n a uma reta r, o que é impossível (**n.° 10**).

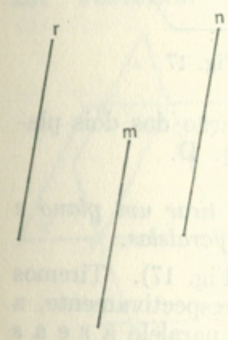


Fig. 14

Logo, m e n estão no mesmo plano e não se encontram, isto é, são paralelas.

17. Teorema. *Se por duas retas paralelas se tiram planos que se cortam, sua intersecção é uma reta paralela às retas dada*

Sejam r e s duas retas paralelas (Fig. 15). Qualquer que seja um plano π, passando por r, sua intersecção com um plano qualquer σ, passando por s, é paralela a s (**n.° 13**) e, portanto, a r (**n.° 16**).

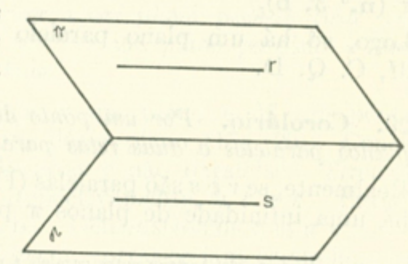


Fig. 15

CAPÍTULO 2

Poliedros

NOÇÕES GERAIS SÔBRE POLIEDROS. POLIEDROS REGULARES

1. Preliminares. Poliedro é um sólido limitado por polígonos planos, tendo, dois a dois, um lado comum. Êsses polígonos denominam-se *faces* do poliedro. Seus *lados* e seus *vértices* denominam-se, respectivamente, *arestas* e *vértices* do poliedro.

Cada *aresta* de um poliedro é aresta de um *diedro* formado por duas faces dêsse poliedro; cada *vértice* de um poliedro é *vértice* de um *ângulo poliédrico* formado por três ou mais de suas faces. Então, *um poliedro tem tantos diedros quantas são suas arestas e tantos ângulos poliédricos quantos são seus vértices.*

Diagonal de um poliedro é um segmento de reta que une dois vértices quaisquer dêsse poliedro, não situados na mesma face. Dêsse modo, as diagonais das faces de um poliedro não são diagonais dêsse poliedro.

Plano diagonal de um poliedro é todo plano que passa por três vértices quaisquer dêsse poliedro, não situados na mesma face.

A figura 54, por exemplo, representa um poliedro de 8 faces, das quais duas $ACEF$ e $DEFG$ são quadriláteros e seis AFG, ABG, BDG, CDE, BCD e ABC são triângulos. Tem 13 arestas, e portanto, 13 diedros e 7 vértices e, conseqüentemente, 7 ângulos poliédricos.

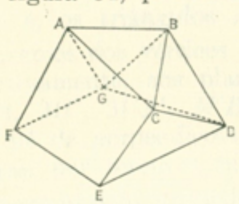


Fig. 54

Dêstes, os ângulos de vértices E e F são triedros e os demais são ângulos poliédricos de 4 faces.

Diz-se que um poliedro é *convexo* se, em relação a qualquer de suas faces, êle está todo situado num mesmo semi-espaço por ela determinado.

Observemos que um poliedro convexo não pode ser encontrado em suas faces por uma reta em mais de dois pontos, pois, se assim o fôsse,

os pontos extremos de intersecção dessa reta com as faces do poliedro não estariam no mesmo semi-espaço, limitado pelo plano da face que contém um qualquer dos pontos intermediários de intersecção.

2. Classificação dos poliedros. Analogamente ao que se faz em Geometria Plana para os polígonos, pode-se classificar os poliedros conforme seu número de faces. Tem-se assim *tetraedros* (poliedros de quatro faces), *pentaedros* (poliedros de cinco faces), *hexaedros* (poliedros de seis faces, etc.).

Essa classificação, entretanto, não tem a mesma importância da classificação dos polígonos (pelo número de lados) na Geometria Plana, pois, como iremos ver, dois poliedros de mesmo número de faces podem ter conformação absolutamente diversa, pertencendo a duas categorias diferentes de sólidos.

Para finalidade didática é conveniente grupar os poliedros em duas categorias:

1) *poliedros regulares;*

2) *poliedros não regulares.*

Poliedro regular é aquêle em que tôdas as faces são polígonos regulares iguais e todos os ângulos sólidos do mesmo número de faces são iguais. Veremos, mais adiante, que são em número limitado.

Os *poliedros não regulares* são aquêles que não satisfazem a condição anterior. Estudá-los-emos na ordem seguinte:

1) *prismas;*

2) *paralelepípedos;*

3) *pirâmides;*

4) *troncos de prisma e de pirâmide.*

3. Teorema de Euler.

a) Consideremos um conjunto de número finito de polígonos, tais que;

1.º) *cada um dêles tenha pelo menos um lado comum com outro polígono do conjunto;*

2.º) *cada lado de um polígono qualquer do conjunto, ou seja comum a dois polígonos ou pertença a um só polígono;*

3.º) *os lados dos polígonos que pertençam a um só polígono constituam uma linha poligonal fechada.*

Para facilidade de expressão denominaremos *arestas livres* aos lados dos polígonos satisfazendo esta última condição e *vértices livres* aos vértices das arestas livres.

A Fig. 55 dá uma idéia do que pode ser um tal conjunto. Observamos que ela verifica as três condições acima, sendo $ABFHIJKLM$ a linha poligonal fechada constituída pelas *arestas livres*.

Chamaremos *faces marginais* aquelas que contêm pelo menos uma aresta livre. Assim BCF é uma face marginal, porque contém a aresta livre BF; $ANKLM$ é uma face marginal, contendo as arestas livres KL, LM e MA, etc.

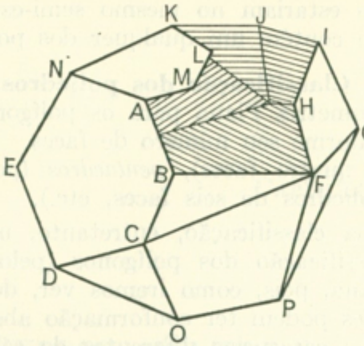


Fig. 55

Representemos por

V: *o número de vértices dêsse conjunto;*

A: *o número de arestas dêsse conjunto;*

F: *o número de faces dêsse conjunto.*

Vejamos que alteração sofre a expressão $V + F - A$, quando se destacam do conjunto sucessivamente faces marginais.

Observemos que destacando uma fase marginal que contenha uma só aresta livre (como BCF), o conjunto perde *uma face, uma aresta* (no exemplo citado, a aresta BF), porém conserva os mesmos vértices. Se a face destacada tivesse *duas arestas livres* (como a face $FGHI$), o conjunto perderia *uma face, duas arestas* e *um vértice.* Se a face destacada tivesse *três arestas livres* (como a face $AMLKN$), o conjunto perderia *uma face, três arestas* e *dois vértices.* Se, de um modo geral, a face destacada tivesse n arestas livres, o conjunto perderia *uma face, n arestas* e *$n - 1$ vértices,* pois n arestas livres (consecutivas) de uma face determinam $n - 1$ vértices livres. Então, representando por V', A' e F', respectivamente, os números de vértices, arestas e faces do novo conjunto, seria

$$V' = V - (n - 1) \qquad F' = F - 1 \qquad A' = A - n$$

e, portanto,

$$V' + F' - A' = V - (n - 1) + F - 1 - (A - n) = V + F - A$$

Concluímos, então, que a *expressão $V + F - A$ não se altera quando se destaca uma face marginal.*

Destaquemos então, sucessivamente, cada face marginal do conjunto até reduzí-lo a uma única face. Sendo n o número de lados dessa face, será

$$V = n \qquad F = 1 \qquad A = n$$

e, portanto,

$$V + F - A = n + 1 - n = 1$$

Concluímos, então, que $V + F - A = 1$, qualquer que seja o número de faces de um conjunto como foi definido.

b) Consideremos um conjunto que, além de satisfazer às condições anteriores, verifique, ainda, a seguinte: *a poligonal fechada de suas arestas livres forme um polígono plano.*

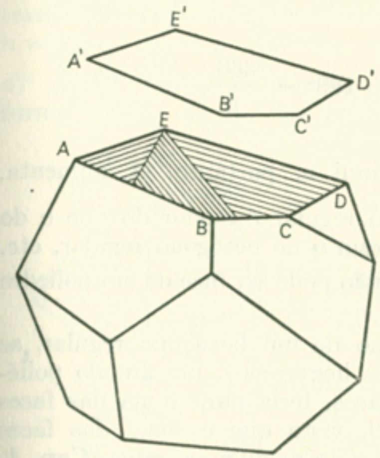


Fig. 56

Seja $ABCDE$ essa poligonal (Fig. 56) de um conjunto para o qual, de acôrdo com o que já foi dito, se tem

$$V + F - A = 1 \qquad (1)$$

Construindo um polígono $A'B'C'D'E'$ cujo contôrno possa coincidir com essa poligonal, e acrescentando êsse polígono ao conjunto, de modo a realizar a coincidência referida, formamos um *poliedro*, cujo número de vértices e arestas é o mesmo do conjunto anterior, mas cujo número de faces aumentou de uma unidade. Então, a relação (1) passa a ser

$$V + F - A = 2$$

ou,

$$\boxed{V + F = A + 2} \qquad (2)$$

Como todo poliedro convexo é tal que, destacando-se uma qualquer de suas faces, se obtém um conjunto como o que foi estudado, o resultado anterior pode ser assim enunciado(*):

Em todo poliedro convexo o número de arestas mais 2 é igual ao número de faces mais o número de vértices. (Teorema de Euler).

4. Poliedros regulares. Vimos no **n.º 2** a definição de poliedros regulares. Façamos, agora, ligeiras considerações sôbre os mesmos.

(*) O leitor percebe pelo estudo anterior que o teorema é válido para *poliedros não convexos*, desde que satisfaçam às condições estudadas. Estender, entretanto, o teorema a êsse caso, fazendo as restrições necessárias, exigiria um maior desenvolvimento, que nos parece dispensável dada a finalidade dêste compêndio.

Observemos, inicialmente, o seguinte fato: enquanto na Geometria Plana se pode construir um polígono regular de um número qualquer de lados, na Geometria no Espaço, o número de poliedros regulares é limitado a *cinco* apenas, pois, como iremos ver, sua existência depende de algumas condições.

Mostremos que as faces de um poliedro regular só podem ser *triângulos equiláteros, quadrados* ou *pentágonos regulares,* ou, em outras palavras, que o número máximo de lados da face de um poliedro regular é cinco.

Realmente, sabemos da Geometria Plana que o ângulo interno de um polígono regular de n lados é

$$A_i = \frac{180^\circ (n-2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Aumentando n, a fração $\dfrac{360^\circ}{n}$ diminui e, portanto, A_i aumenta.

Assim, o ângulo interno do hexágono regular é menor do que o do heptágono regular, que é menor do que o do octógono regular, etc.

Mostremos que um hexágono regular não pode ser face de um poliedro regular.

De fato, sendo 120° o ângulo interno de um hexágono regular, se existisse um poliedro regular de faces hexagonais, um ângulo poliédrico dêle, tendo, no mínimo, três faces, teria para soma das faces $3 \times 120^\circ = 360^\circ$, o que é impossível, visto que a soma das faces de um ângulo poliédrico é inferior a quatro ângulos retos (**Cap. 1, n.° 66**). Então, em virtude do que foi dito, os polígonos regulares de mais de 6 lados também não podem ser faces de um poliedro regular.

Fica, assim, demonstrado que as faces de um poliedro regular só podem ser *triângulos equiláteros, quadrados* ou *pentágonos regulares.*

Sejam, então, n e p, respectivamente, o número de arestas de cada face e o número de arestas de cada ângulo poliédrico de um poliedro regular. Sendo F o número de faces concluímos que o número A de arestas é

$$A = \frac{Fn}{2} \qquad (3)$$

visto que cada aresta pertence a duas faces. Anàlogamente, como cada aresta une dois vértices, sendo V o número dêstes, o número de arestas será

$$A = \frac{Vp}{2} \qquad (4)$$

Das relações (3) e (4) resulta

$$V = \frac{Fn}{p} \qquad (5)$$

Substituindo os valôres (3) e (5) na relação (2) obtemos:

$$F = \frac{4p}{2(n+p) - np} \qquad (6)$$

Sendo n, no mínimo igual a 3 e no máximo igual a 5 (como demonstramos), podemos formular sòmente as três seguintes hipóteses: $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$.

a) $n = 3$ (*faces triangulares*). Nesta hipótese a relação (6) se transforma em

$$F = \frac{4p}{6-p} \qquad (7)$$

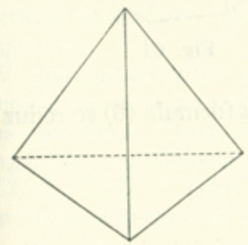


Fig. 57

Como $p \geq 3$, a relação (7) só dá valôres inteiros (e positivos) para F nos seguintes casos:

a) $p = 3$, donde resulta $F = 4$. O poliedro apresenta, então, quatro faces triangulares; é o *tetraedro regular* (Fig. 57).

b) $p = 4$, donde resulta $F = 8$. O sólido constituído de oito faces triangulares (Fig. 58) é o *octaedro regular.*

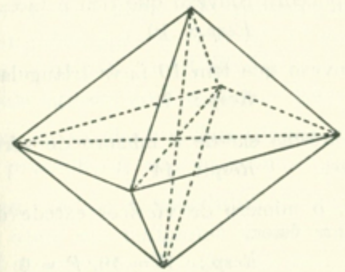


Fig. 58

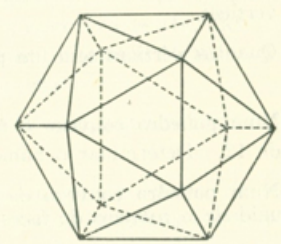


Fig. 59

c) $p = 5$, donde resulta $F = 20$. Tem-na um poliedro formado por vinte faces regulares: o *icosaedro regular* (Fig. 59).

d) $n = 4$ (*faces quadrangulares*). Nesta hipótese a fórmula (6) se se reduz a

$$F = \frac{2p}{4 - p}$$

e, como $p \geq 3$, sòmente para $p = 3$ fornece um valor inteiro (e positivo) para F, a saber $F = 6$. O sólido apresenta, pois 6 faces quadrangulares; é o *hexaedro regular* ou *cubo* (Fig. 60).

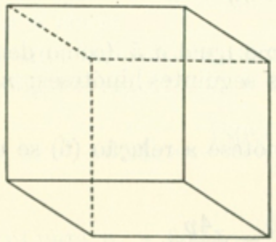


Fig. 60

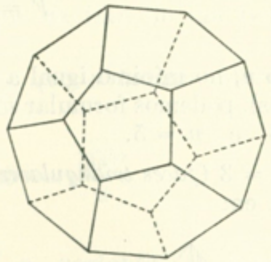


Fig. 61

c) $n = 5$ (*faces pentagonais*). Nesta hipótese a fórmula (6) se reduz a

$$F = \frac{4p}{10 - 3p}$$

fornecendo, sòmente para $p = 3$, um valor satisfatório para F, a saber, $F = 12$. Tem-se, então, um poliedro formado por 12 faces pentagonais: o *dodecaedro regular* (Fig. 61).

5. Exercícios para resolver.

1. Calcular o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 6 vértices. *Resp.*: 10
2. Quantos vértices tem um poliedro convexo que tem 10 faces triangulares? *Resp.*: 7
3. Num poliedro convexo o número de arestas excede o número de vértices de 12. Determinar o número de faces. *Resp.*: 14
4. Num poliedro convexo de 17 arestas, o número de vértices excede de 1 unidade o número de faces. Determinar êstes. *Resp.*: $V = 10$, $F = 9$
5. Um poliedro convexo tem n faces triangulares e p faces quadrangulares. Determinar o número de seus vértices. *Resp.*: $V = p + 2 + \frac{n}{2}$
6. Um poliedro convexo de F faces e V vértices é formado de faces triangulares e faces quadrangulares. Determinar o número destas. *Resp.*: $x = 2(V - 2) - F$

6. Superfície prismática. Consideremos um polígono $ABCDE$ (Fig. 62) e tiremos de cada um de seus vértices retas AA', BB', CC', DD', EE' paralelas entre si e não situadas no plano dêsse polígono. A superfície constituída pelas porções de plano limitadas por duas retas paralelas que passam por vértices consecutivos, denomina-se *superfície prismática.*

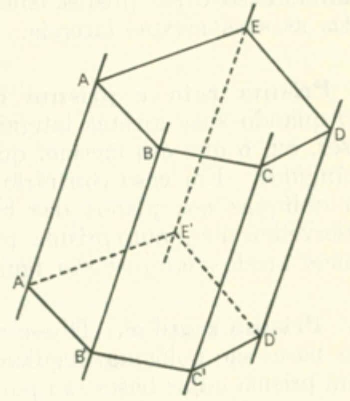


Fig. 62

7. Prisma. Consideremos um plano paralelo ao plano do polígono $ABCDE$. Seja o polígono $A'B'C'D'E'$ sua secção com a superfície prismática (Fig. 62). Os segmentos AA', BB', CC', DD', EE' são iguais como sendo intersecções de retas paralelas por planos paralelos (**Cap. 2, n.º 26**). Logo, os quadriláteros $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$ são paralelogramos e, portanto, seus lados opostos são iguais, isto é,

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \ldots \quad EA = E'A'$$

Os ângulos planos A e A', respectivamente, dos polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são iguais, por terem lados paralelos e de mesmo sentido (**Cap. 1. n.º 28**). Do mesmo modo demonstraremos as igualdades dos ângulos planos B e B', C e C', etc., respectivamente, dos polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$. Logo, êsses polígonos têm lados e ângulos iguais dois a dois. São, portanto, iguais.

Então, *as secções em dois planos paralelos, determinadas por uma superfície prismática, são polígonos iguais.*

Vemos, assim, a possibilidade da existência de um *poliedro, de cujas faces duas são polígonos iguais e as demais paralelogramos em número igual ao número de lados dos polígonos iguais.* Um tal poliedro denomina-se *prisma.*

As faces do prisma, que são polígonos iguais, chamam-se *bases* do prisma. As demais (paralelogramos) chamam-se *faces laterais* do prisma.

As arestas não situadas nas bases do prisma (como AA', BB', ...) chamam-se *arestas laterais*; as demais denominam-se *arestas das bases.*

5. Uma pirâmide hexagonal regular de 36 dm de perímetro da base e 9 dm de aresta lateral foi cortada por dois planos paralelos à sua base que dividiram sua altura em três partes iguais. Achar o volume do tronco cujas bases estão situadas sôbre êsses planos.

Resp.: $162{,}54 \text{ dm}^3$

6. Demonstrar que se o apótema de um tronco de pirâmide regular de bases quadrangulares é o dôbro da média aritmética das arestas das bases, a altura é a média geométrica dessas arestas.

7. Sendo a e a', respectivamente, as arestas das bases do tronco de pirâmide, definido no exercício anterior, calcular sua área lateral e seu volume.

$$Resp.: \quad S_l = 2\,(a + a')^2$$

$$V = \frac{2\sqrt{aa'}}{3}\,(a^2 + a'^2 + aa')$$

8. Sendo a, $a - r$ e $a + r$, respectivamente, o apótema e as arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular, calcular r de modo que a área lateral seja m vêzes a área total do paralelepípedo retângulo de dimensões a, $a - r$ e $a + r$.

$$Resp.: \quad \frac{a}{m}\sqrt{3m^2 - 2m}.$$

Os Corpos Redondos

NOÇÕES SÔBRE SUPERFÍCIES

1. Preliminares. Quando uma linha l se desloca no espaço (Fig. 91), o conjunto de todos os pontos situados sôbre a infinidade de posições de l, constitui uma *superfície*. Diz-se, então, que, no seu movimento, a linha l *gera* a superfície, sendo, por isso, chamada *geratriz* da mesma. Cada posição sucessiva de l é uma linha pertencente à superfície e cada ponto M de l descreve uma linha s situada na superfície (Fig. 91).

Pode-se admitir que, no seu movimento, a geratriz l se mantenha ou não invariável em *forma* e em *grandeza*. No segundo caso, a *definição geométrica* da superfície exigirá, também, o conhecimento da lei de variação da geratriz l durante seu movimento.

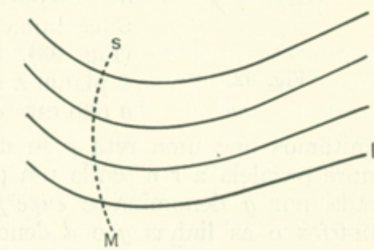


Fig. 91

Para tornar mais claras essas noções, vejamos, a seguir, o modo de geração de algumas superfícies.

2. Superfície de revolução. Seja g uma linha situada num semiplano, que designaremos por π, cuja origem é uma reta r (Fig. 92). Dando a π uma rotação de 360° em tôrno de r, a linha g irá descrever uma certa superfície(*) que se denomina *superfície de revolução* ou *superfície de rotação*(**).

Cada ponto de g, não situado sôbre r, descreve uma circunferência cujo centro está em r e cujo plano é perpendicular a r. Estas circunferências denominam-se *paralelos* da superfície de revolução e representam intersecções da superfície com planos perpendiculares ao eixo de rotação r.

(*) Isto equivale a supor, como o fazem muitos autores, que a linha g dê uma rotação de 360° em tôrno de r, conservando-se *invariàvelmente ligada* à reta r.
(**) SEVERI, F. *Elementos de Geometria*, Editorial Labor, 2.º vol., 1931, p. 269.

Cada posição da linha g, no seu movimento de rotação, representa a intersecção da superfície com um determinado semiplano de origem r. Dêste modo, todo plano que passe pelo eixo corta a superfície segundo duas geratrizes, situadas em semiplanos opostos e, portanto, simétricas em relação a r. O conjunto dessas duas linhas denomina-se *meridiano* da superfície. Todo plano que contém o eixo r denomina-se *plano meridiano* da superfície.

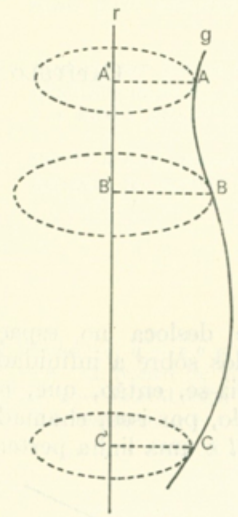


Fig. 92

Observemos, ainda, que a superfície de revolução pode ser gerada por uma circunferência de raio variável, cujo centro descreve o eixo r e cujo plano é perpendicular a êle, tendo a circunferência sempre um ponto em comum com uma determinada posição da linha g no espaço. Nesse caso, a circunferência variável é a *geratriz* da superfície, denominando-se diretrizes as linhas g e r.

3. Superfícies cilíndricas. Consideremos uma linha d, plana ou não, e uma reta r (Fig. 93). Suponhamos inicialmente que se d é plana, a reta r não é paralela ao plano de d e não está contida nêle.

Admitamos que uma reta g se desloque no espaço, conservando-se sempre paralela a r e tendo um ponto comum com d. A superfície gerada por g denomina-se *superfície cilíndrica* e as linhas g e d denominam-se, respectivamente, *geratriz* e *diretriz* da superfície cilíndrica.

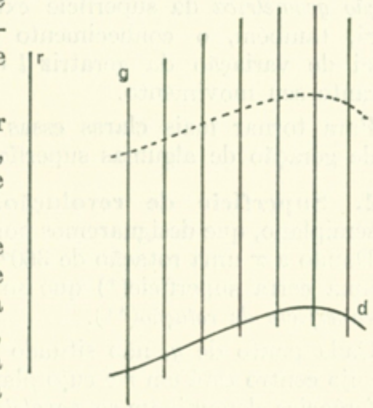


Fig. 93

Observemos que a diretriz d pode ser substituída por qualquer outra linha, que esteja situada sôbre a superfície e encontre tôdas as geratrizes.

Se a linha d é fechada, a superfície cilíndrica diz-se *fechada* (Fig. 94). Se d é uma reta, a superfície se reduz a um plano. Se d é uma linha plana, cujo plano contém r ou é paralelo a êle, a superfície também se reduz a um plano.

Seja d uma diretriz plana de uma superfície cilíndrica, ou seja a intersecção da superfície com um plano π que corte suas geratrizes (Fig. 94). A superfície cilíndrica pode ser gerada pela linha d, supondo-se que ela se desloque no

espaço de modo que seu plano se conserve sempre paralelo a π e que dois de seus pontos descrevam retas paralelas.

Nesse caso, d é a *geratriz* da superfície.

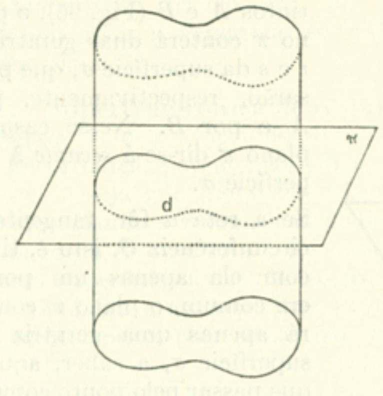


Fig. 94

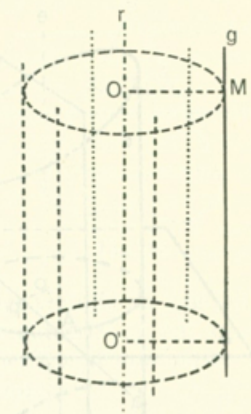


Fig. 95

4. Superfície cilíndrica de revolução. Consideremos duas retas paralelas g e r (Fig. 95) e designemos por π o semiplano de origem r que contém a reta g. Dando a π uma rotação de 360° em tôrno de r, a reta g irá descrever uma superfície (**n.° 2**) que, em virtude do que foi dito, é, também, uma superfície cilíndrica, pois g em qualquer posição se conserva paralela a r. Tal superfície denomina-se *superfície cilíndrica de revolução*. Sua intersecção com um plano perpendicular a r é uma circunferência cujo centro está em r.

A distância (constante) das retas paralelas r e g denomina-se *raio* da superfície cilíndrica de revolução.

Observemos, ainda, que a superfície cilíndrica de revolução pode ser gerada por uma circunferência de raio constante, cujo centro descreve uma reta, conservando-se seu plano sempre perpendicular a esta reta. Neste caso, a circunferência será a *geratriz* da superfície cilíndrica.

5. Planos secante, tangente e exterior a uma superfície cilíndrica de revolução. Consideremos uma superfície cilíndrica de revolução σ (Fig. 96) e seja α um plano perpendicular ao seu eixo e. Como já vimos (**n.° 4**) a intersecção da superfície σ com o plano α é uma circunferência cujo centro designaremos por O. Sejam π um plano paralelo ao eixo da superfície σ, e a a reta de intersecção dos planos π e α.

Observemos, inicialmente, que se π cortar a superfície cilíndrica, as intersecções serão retas paralelas ao seu eixo, isto é, serão *geratrizes* da superfície. Haverá tantas retas de intersecção quantos forem os pontos comuns à reta a e à circunferência O.

Se, então, a reta a fôr secante à circunferência O, isto é, tiver com ela dois pontos comuns distintos A e B (Fig. 96), o plano π conterá duas geratrizes r e s da superfície σ, que passarão, respectivamente, por A e por B. Nesse caso, o plano π dir-se-á *secante* à superfície σ.

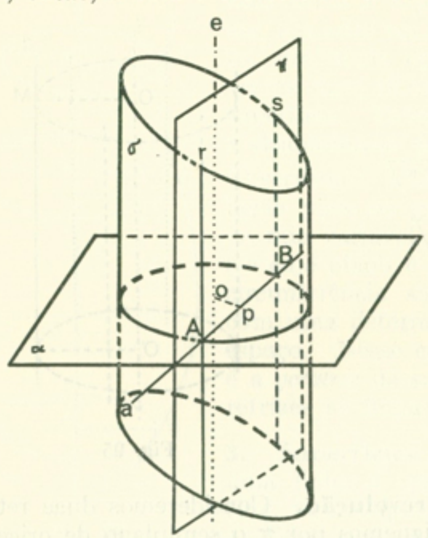


Fig. 96

Se a reta a fôr tangente à circunferência O, isto é, tiver com ela apenas um ponto em comum, o plano π conterá apenas uma geratriz da superfície σ, a saber, aquela que passar pelo ponto comum à circunferência O e à reta a. Nesse caso o plano π dir-se-á *tangente* à superfície σ.

Se a reta a não tiver ponto comum com a circunferência O, o plano π não terá ponto comum com a superfície σ e dir-se-á *exterior* a ela. A distância do plano π ao eixo e do cilindro é a mesma distância da reta a ao ponto O. Da Geometria Plana sabemos que, conforme seja essa distância inferior, igual ao superior ao raio do círculo O (que é o próprio raio da superfície cilíndrica de revolução), a reta a será *secante, tangente* ou *exterior* ao círculo O. Podemos, então, dizer que o plano π é *secante, tangente* ou *exterior* à superfície cilíndrica σ, conforme sua distância ao eixo da superfície seja *inferior, igual* ou *superior* ao raio da mesma.

6. Superfícies cônicas. Seja d uma linha qualquer e P um ponto a ela não pertencente (Fig. 97). Seja g uma reta que se desloque no espaço, passando por P e tendo em cada posição um ponto comum com d. A superfície gerada por g denomina-se *superfície cônica*. O ponto P chama-se *vértice* da superfície e a linha d *diretriz* da mesma.

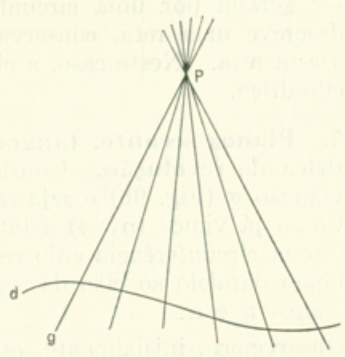


Fig. 97

Observemos que a *diretriz* d pode ser substituída por qualquer outra linha que esteja situada sôbre a superfície cônica e encontre tôdas as *diretrizes*.

Se d é uma linha fechada, a superfície cônica diz-se *fechada* (Fig. 98). Se d é uma reta, a superfície se reduz a um plano.

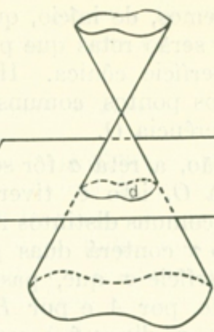


Fig. 98

7. Superfície cônica de revolução. Sejam r e g (Fig. 99) duas retas concorrentes, porém não perpendiculares e seja π o plano por elas definido. Dando a π uma rotação de 360° em tôrno de r, a reta g irá descrever uma superfície de revolução (**n.° 2**), que, em virtude do que foi dito, é, também, uma *superfície cônica*, pois a geratriz g, em qualquer posição, passa pelo ponto fixo P. Tal superfície denomina-se *superfície cônica de revolução.*

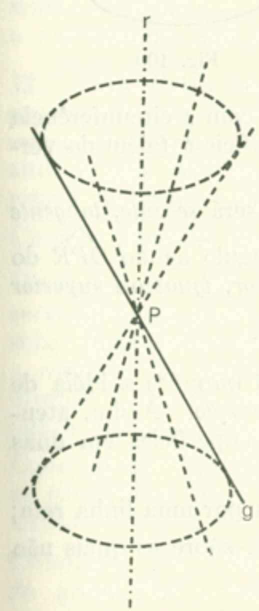


Fig. 99

Sua intersecção com um plano qualquer perpendicular a r é uma circunferência cujo centro está em r. Qualquer uma dessas circunferências de intersecção pode ser considerada *diretriz* da superfície cônica.

O vértice P divide a superfície cônica em duas *fôlhas* distintas, sendo cada uma dessas fôlhas geradas por uma das semi-retas de g de origem P.

O ângulo agudo formado por qualquer uma das semi-retas de g com o eixo r denomina-se *abertura* da superfície cônica.

Observemos, ainda, que a superfície cônica de revolução pode ser gerada por uma circunferência de raio variável, cujo centro descreve o eixo r, cujo plano é perpendicular a r e que tem sempre um ponto em comum com a reta g.

8. Planos secante, tangente e exterior a uma superfície cônica de revolução. Consideremos uma superfície cônica de revolução σ (Fig. 100) e seja α um plano perpendicular ao seu eixo. A intersecção da superfície σ com o plano α é, como já vimos (**n.° 7**), uma circunferência cujo centro O está sôbre o eixo da superfície cônica. Seja π um plano passando pelo vértice P da superfície cônica e a a reta de intersecção dos planos π e α.

Observemos, de início, que, se π cortar a superfície cônica, as intersecções serão retas que passam pelo ponto P, isto é, serão geratrizes da superfície cônica. Haverá tantas retas de intersecção quantos forem os pontos comuns à reta a e à circunferência O.

Se, então, a reta a fôr secante à circunferência O, isto é, tiver com ela dois pontos comuns distintos A e B (Fig. 100), o plano π conterá duas geratrizes r e s da superfície σ que, passarão, respectivamente, por A e por B. Nesse caso, o plano π dir-se-á *secante* à superfície cônica.

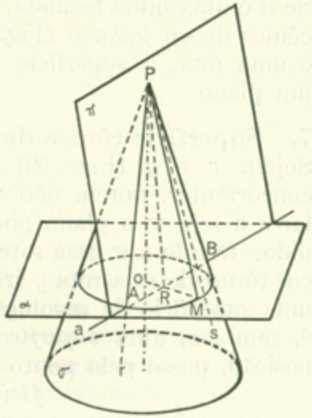


Fig. 100

Se a reta a fôr tangente à circunferência O, isto é, tiver com ela apenas um ponto em comum, o plano π conterá apenas uma geratriz da superfície σ, a saber, aquela que passar pelo ponto comum à circunferência O e à reta a. Nesse caso, o plano π dir-se-á *tangente* à superfície cônica.

Se, finalmente, a reta a não tiver ponto comum com a circunferência O, o plano π não terá ponto comum com a superfície σ (além do vértice P) e dir-se-á *exterior* a ela.

Pela Fig. 100 podemos concluir que o plano π será *secante, tangente* ou *exterior* à superfície cônica σ, conforme o ângulo agudo $\widehat{OPR}$ do eixo da superfície com o plano π (*) seja *inferior, igual* ou *superior* à *abertura* da superfície cônica (*ângulo* $\widehat{OPM}$).

9. Classificação das superfícies. Data de Monge(**) a idéia de classificar as superfícies segundo seu *modo de geração.* Assim, atendendo-se à natureza da *geratriz,* grupam-se as superfícies em duas grandes classes:

a) *superfícies retilíneas* que podem ser geradas por uma linha reta;

b) *superfícies pròpriamente curvas* ou *curvilíneas,* sôbre as quais não é possível traçar uma reta.

10. Superfícies retilíneas. As superfícies retilíneas podem ser divididas em dois grandes grupos:

a) *superfícies desenvolvíveis;*

b) *superfícies reversas.*

(*) Ângulo de uma reta com um plano é o ângulo dessa reta com sua projeção ortogonal sôbre o plano.

(**) Gaspard Monge, geômetra francês (1746-1818).

Diz-se que uma superfície é *desenvolvível* se, suposta flexível mas inextensível, pode ser adaptada sôbre um plano sem ser necessário sofrer qualquer dobra ou ruptura.

As superfícies não desenvolvíveis denominam-se *reversas.*

11. Superfícies desenvolvíveis. Entre as superfícies desenvolvíveis podemos citar as *superfícies cilíndricas e cônicas* de que já tratamos (**n.os 3 e 6**) e as superfícies de aresta de *reversão.* Estas últimas são, assim, denominadas, porque mantêm uma linha denominada *aresta de reversão,* à qual a geratriz é tangente em qualquer posição. Em cada um dos dois primeiros grupos (superfícies cilíndricas e cônicas) as superfícies só diferem entre si pela natureza da diretriz; diz-se, então, que tais grupos constituem *famílias* de superfícies. Entretanto, o grupo das superfícies de *aresta de reversão* contém uma infinidade de famílias, pois tôdas as superfícies desenvolvíveis podem ser consideradas casos particulares das superfícies de aresta de reversão. Assim, nas superfícies cônicas e cilíndricas a aresta de reversão se reduz a um ponto, que nas primeiras é o *vértice* da superfície e nas últimas está afastado ao infinito.

12. Superfícies reversas. Em geral uma reta deslocando-se no espaço e tendo um ponto comum com três linhas fixas, gera uma superfície reversa. Fixadas as naturezas de duas diretrizes, constitui-se uma *família* de superfícies, onde cada superfície só se diferencia de outra pela natureza da terceira diretriz.

Citemos algumas das principais superfícies reversas.

Cilindróides. São as superfícies geradas por uma reta que se conserva paralela a um plano fixo, chamado *plano diretor,* e se apóia sôbre duas linhas denominadas *diretrizes.* Nesse caso, como se vê, a condição de ter um ponto comum com uma diretriz linear foi substituída pela de ser paralela a um plano diretor.

Como as duas diretrizes lineares são arbitrárias, os cilindróides constituem uma infinidade de famílias.

Conóides. Os conóides *constituem* uma família do grupo dos cilindróides. São as superfícies geradas por uma reta que se conserva paralela a um plano fixo (plano diretor) e se apóia sôbre uma reta e uma curva, denominadas *diretrizes.*

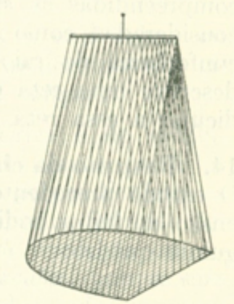


Fig. 101

A Fig. 101 representa um conóide cuja diretriz é perpendicular ao plano diretor e cuja diretriz curvilínea é uma semicircunferência, situada sôbre um plano perpendicular ao plano diretor.

Progressões

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1. Preliminares. Chama-se *progressão aritmética* ou *por diferença* uma sucessão de números, denominados *têrmos*, tais que a diferença entre um têrmo qualquer, a partir do segundo, e o têrmo precedente seja constante. Esta diferença constante chama-se *razão* da progressão.

Representa-se uma progressão aritmética fazendo-se preceder ao primeiro têrmo um dos sinais $\div$ ou : e separando-se cada dois têrmos consecutivos por um ponto.

Sendo, então, $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n, \ldots$ números tais que

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \ldots = r \qquad (1)$$

a progressão aritmética (de razão r), cujos têrmos são êsses números, pode ser assim representada

$$: a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots a_{n-1} \,.\, a_n \ldots \qquad (2)$$

Conforme tenha ou não um número limitado de têrmos a progressão denomina-se *limitada* ou *ilimitada*. Por exemplo

$$: 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 16 \,.\, 19 \,.\, 22 \,.\, 25$$

$$: 8 \,.\, 3 \,.\, -2 \,.\, -7 \,.\, \ldots$$

são progressões aritméticas de razões 3 e -5 respectivamente, sendo a primeira limitada e a segunda ilimitada.

2. Observações.

a) *Cada têrmo de uma progressão aritmética, a partir do segundo, é igual ao têrmo precedente mais a razão.*

Realmente, das igualdades (1) a que satisfazem os têrmos da progressão (2), resultam

$$a_2 = a_1 + r, \; a_3 = a_2 + r, \ldots a_n = a_{n-1} + r \ldots \qquad (3)$$

b) As igualdades (3) mostram que cada têrmo de uma progressão aritmética é maior ou menor do que o precedente, conforme a razão r seja positiva ou negativa. No primeiro caso diz-se que a progressão é *crescente* e, no segundo, que é *decrescente*. Concluímos, pois: *Uma progressão aritmética é crescente ou decrescente conforme sua razão seja positiva ou negativa.*

3. Propriedade. *Cada têrmo de uma progressão aritmética, a partir do segundo, é a média aritmética entre o têrmo precedente e o seguinte.* Realmente, sendo a_{n-1}, a_n e a_{n+1} três têrmos consecutivos de uma progressão aritmética, podemos, de acôrdo com a definição, escrever

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n, \text{ donde tiramos } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

4. Fórmula do têrmo geral. Seja a progressão aritmética (2) cujos n primeiros têrmos, como já vimos (**n.º 2**), verificam as relações (3). Somando, membro a membro, as $n - 1$, igualdades (3) e eliminando os têrmos comuns a ambos os membros, obtemos a fórmula do têrmo de ordem n

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \qquad (4)$$

que traduz o seguinte teorema:

Cada têrmo de uma progressão aritmética é igual ao primeiro têrmo, aumentado do produto da razão pelo número de têrmos que o precedem.

5. Exercício. *Achar o trigésimo têrmo da progressão* : 5 . 7 . 9 . 11. . .

RESOLUÇÃO: Temos, usando as notações anteriores, $a_1 = 5$, $n = 30$ e $r = 7 - 5 = 2$. O trigésimo têrmo a_{30} será, então, de acôrdo com o princípio anterior

$$a_{30} = a_1 + 29r = 5 + 29 \times 2 = 63$$

6. Fórmulas derivadas. A fórmula (4) estabelece uma relação entre os quatro elementos de uma progressão aritmética: *primeiro têrmo* (a_1), *têrmo de ordem n* (a_n), *razão* (r) e *número de têrmos* (n). Conhecidos, então, três dêstes elementos, podemos calcular o quarto. Para isso utilizamos as seguintes fórmulas, deduzidas de (4)

$$\boxed{a_1 = a_n - (n-1)r} \qquad (5)$$

$$\boxed{r = \frac{a_n - a_1}{n-1}} \qquad (6)$$

$$\boxed{n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r}} \qquad (7)$$

7. Exercício. *Calcular o primeiro têrmo de uma progressão aritmética de 10 têrmos cuja razão é 4 e cujo último têrmo é 43.*

RESOLUÇÃO: São dados $r = 4$, $n = 10$ e $a_{10} = 43$.
Aplicando a fórmula (5), obtemos

$$a_1 = a_{10} - 9r = 43 - 9 \times 4 = 7$$

8. Exercício. *Qual a razão de uma progressão aritmética de 20 têrmos, cujo primeiro têrmo é 7 e cujo último têrmo é 197?*

RESOLUÇÃO: São dados $a_1 = 7$, $a_{20} = 197$ e $n = 20$.
Aplicando a fórmula (6) obtemos

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{197 - 7}{20 - 1} = 10$$

9. Exercício. *Quantos números ímpares há de 17 a 193 inclusive?*

RESOLUÇÃO: Os números considerados formam a progressão aritmética $: 17 . 19 . 21 \ldots 193$ de razão 2 e cujos têrmos extremos são 17 e 193. Assim, são dados $a_1 = 17$, $a = 193$ e $r = 2$. Aplicando a fórmula (7), obtemos

$$n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r} = 1 + \frac{193 - 17}{2} = 89$$

10. Inserção de meios aritméticos. Inserir n meios aritméticos entre dois números A e B, é formar uma progressão aritmética de $n + 2$ têrmos, cujos têrmos extremos sejam A e B.

A resolução do problema consiste, inicialmente, em calcular a razão da progressão, o que se obtém pela aplicação da fórmula (6). Conhecida, esta, escrevem-se os n têrmos (entre A e B) de acôrdo com a observação I do **n.º** 2.

11. Exercício. *Inserir 4 meios aritméticos entre os números 11 e 13.*

RESOLUÇÃO: De acôrdo com o que foi dito no número anterior, precisamos calcular a razão de uma progressão aritmética de 6 têrmos cujos têrmos extremos são 11 e 31. São dados, portanto $a_1 = 11$, $a_6 = 31$ e $n = 6$. Aplicando a fórmula (6), obtemos

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{31 - 11}{6 - 1} = 4$$

A progressão pedida será: $11 . 15 . 19 . 23 . 27 . 31$.

12. Teorema. *Dada uma progressão aritmética crescente e um número. A arbitrário, existe um número n tal que o têrmo de ordem n da progressão seja superior a A.*

Realmente, sendo (**n.º** 4) $a_n = a_1 + (n - 1)r$ o têrmo de ordem n da progressão, se n crescer indefinidamente, a crescerá ultrapassando

qualquer limite. Para calcular o menor valor (inteiro) de n que verifique a desigualdade

$$a_1 + (n - 1)r > A$$

bastará resolvê-la em relação a n o que dá(*)

$$n > 1 + \frac{A - a_1}{r}$$

e atribuir a n o menor valor inteiro superior ou igual ao da expressão $1 + \dfrac{A - a_1}{r}$.

Êste teorema poderia, também, ser assim enunciado:
Em tôda progressão aritmética crescente, o têrmo geral a_n cresce com n, de modo a ultrapassar qualquer valor arbitràriamente escolhido.

EXEMPLO: Calcular o primeiro têrmo da progressão $: -20 . -17 . -14 \ldots$ que seja superior ao número 104.

RESOLUÇÃO: Sendo $r = 3$ a razão desta progressão, temos

$$1 + \frac{A - a_1}{r} = 1 + \frac{104 + 20}{3} = 42\,\frac{1}{3}$$

De acôrdo com o que foi dito, resulta $n = 43$, isto é, o têrmo pedido é o quadragésimo terceiro.

13. Têrmos eqüidistantes dos extremos. Diz-se que dois têrmos de uma progressão aritmética limitada são *eqüidistantes dos extremos* se o número de têrmos da progressão que precedem o primeiro é igual ao número de têrmos da progressão que seguem o segundo. Por exemplo, na progressão $: 2 . 7 . 12 . 17 . 22 . 27 . 32 . 37 . 42$, os têrmos 17 e 27 são eqüidistantes dos extremos, porque há três têrmos precedendo 17 e três em seguida a 27.

14. Propriedade. Consideremos a progressão

$$: a_1 . a_2 \ldots a_{k+1} \ldots a_{n-k} \ldots a_n$$

na qual os têrmos a_{k+1} e a_{n-k} são eqüidistantes dos extremos visto que há k têrmos antes de a_{k+1} e k têrmos depois de a_{n-k}.

De acôrdo com a fórmula do têrmo geral (**n.º 4**), temos, designando por r a razão da progressão

$$a_{k+1} = a_1 + kr$$

Para a progressão de $k + 1$ têrmos, cujo primeiro têrmo é a_{n-k} e cujo último têrmo é a_n, podemos escrever (**n.º 6, fórmula n.º 5**)

$$a_{n-k} = a_n - kr$$

(*) Como r é positivo (porque a progressão é *crescente*) podemos dividir ambos os membros da desigualdade por r sem mudar o seu sentido.

Somando, membro a membro, as igualdades anteriores, obtemos

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$$

resultado que traduz o seguinte teorema:

Em tôda progressão aritmética limitada, a soma de dois têrmos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

15. Corolário. *Numa progressão aritmética de número ímpar de têrmos o têrmo do meio é a média aritmética dos extremos (ou de dois têrmos quaisquer eqüidistantes dos extremos).*

Realmente, sendo o têrmo do meio a média aritmética entre o têrmo precedente e o seguinte (n.º 3), como êstes são eqüidistantes dos extremos, será, em virtude do teorema precedente, a média aritmética de dois têrmos quaisquer eqüidistantes dos extremos e, em particular, a média aritmética dos extremos.

16. Soma dos têrmos. Consideremos a progressão (2). Representando por S_n a soma de seus n primeiros têrmos, podemos escrever

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

ou, em virtude da propriedade comutativa da adição,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Somando, membro a membro, essas igualdades, obtemos

$$2S_n = \ldots (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observando que as n expressões entre parêntesis são somas de têrmos eqüidistantes dos extremos (*) e, portanto, em virtude da propriedade anterior, iguais à soma dos extremos, podemos escrever

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

donde

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}} \qquad (8)$$

17. Exercício. *Achar a soma dos 20 primeiros têrmos da progressão* $\div 4 . 10 . 16 \ldots$

Resolução: Calculemos o vigésimo têrmo. Temos $a_1 = 4$, $n = 20$ e $r = 10 - 4 = 6$. Aplicando a fórmula (4), obtemos

$$a_{20} = a_1 + 19r = 4 + 19 \times 6 = 118$$

(*) Se a progressão tem um número ímpar de têrmos, a soma do meio representa o dôbro do têrmo do meio da progressão, sendo, também, em virtude do corolário anterior, igual à soma dos extremos.

Aplicando a fórmula (8), obtemos a soma procurada

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(4 + 118)20}{2} = 1220$$

18. Observação. A aplicação da fórmula (8), como vimos, exige o conhecimento do têrmo a_n. Podemos, entretanto, por uma simples transformação, exprimir S_n em função de a_1, n e r. Para isso, substituamos em (8) a_n por seu valor dado em (4). Obtemos, após ligeira transformação, a fórmula

$$\boxed{S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} r} \qquad (9)$$

Aplicando-a, por exemplo, à resolução do exercício anterior, obtemos

$$S_{20} = 20 \times 4 + \frac{20 \times 19}{2} \times 6 = 1220$$

19. Soma dos n primeiros números naturais. Consideremos a progressão $\div 1 . 2 . 3 . 4 \ldots$ cujos têrmos são os números naturais. Sendo 1 a razão desta progressão, a soma de seus n primeiros têrmos será, de acôrdo com a fórmula (9)

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

ou

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}} \qquad (10)$$

Por exemplo, a soma dos 100 primeiros números naturais (ou seja dos números naturais até 100 inclusive) é

$$S_{100} = \frac{100\,(100 + 1)}{2} = 5050$$

20. Soma dos n primeiros números ímpares. Consideremos a progressão $\div 1 . 3 . 5 . 7 \ldots$ cujos têrmos são os números ímpares. Sendo 2 a razão desta progressão, a soma de seus n primeiros têrmos será, de acôrdo com a fórmula (9),

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n + n^2 - n$$

ou

$$S_n = n^2$$

Conclusão: *A soma dos n primeiros números ímpares é igual ao quadrado de n.*

21. Exercício. *O terceiro têrmo de uma progressão aritmética é 21 e o sétimo 53. Achar a soma dos quinze primeiros têrmos.*

RESOLUÇÃO: Representando por a_1 e r respectivamente o primeiro têrmo e a razão da progressão, o terceiro têrmo, de acôrdo com a fórmula (4), é $a_1 + 2r$ e o sétimo têrmo é $a_1 + 6r$, de modo que podemos formar o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 21 \\ a_1 + 6r = 53 \end{cases}$$

Resolvendo-o por qualquer um dos processos clássicos, obtemos $a_1 = 5$ e $r = 8$. A soma dos 15 primeiros têrmos será, de acôrdo com a fórmula (9),

$$S_{15} = 15 \times 5 + \frac{15 \times 14}{2} \times 8 = 915$$

22. Exercício. Demonstrar que, se os números $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$, $\dfrac{1}{a+b}$ estão em progressão aritmética, os números a^2, b^2, c^2 também estão em progressão aritmética, cuja razão é o produto da razão da progressão anterior por $(a + b)\ (b + c)$.

DEMONSTRAÇÃO: Dentro da hipótese feita devemos ter

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}$$

ou efetuando as subtrações indicadas e simplificando

$$\frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b}$$

Dessa igualdade resulta imediatamente

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2$$

Conclui-se, pois, que a^2, b^2, c^2 estão em progressão aritmética. Sendo $b^2 - a^2$ sua razão e $\dfrac{b-a}{b+c}$ a razão da primeira (como se deduz da penúltima igualdade), o quociente

$$(b^2 - a^2) \div \frac{b-a}{b+c} = (a+b)\,(b+c)$$

responde à segunda parte da questão.

23. Exercício. Escrever a progressão aritmética cuja soma dos n primeiros têrmos é $n(2n + 3)$, qualquer que seja n (inteiro e positivo).

RESOLUÇÃO: Sejam a_1 e r, respectivamente, o primeiro têrmo e a razão da progressão. Em virtude do enunciado, podemos, utilizando a fórmula (9) do **n.º 18**, escrever

$$na_1 + \frac{n(n-1)r}{2} = n(2n+3)$$

ou, após as simplificações,

$$(2a_1 - r - 6) = n(4 - r)$$

Para que esta igualdade se verifique para qualquer valor de n, devemos ter

$$2a_1 - r - 6 = 0$$
$$4 - r = 0$$

donde resultam $r = 4$, $a_1 = 5$. A progressão pedida é, pois,

$$:5\ .\ 9\ .\ 13\ \ldots\ldots$$

24. Exercícios para resolver.

1. Achar o décimo segundo têrmo da progressão $:11\ .\ 16\ .\ 21\ ..$
Resp.: 66

2. Calcular o vigésimo têrmo da progressão $:5\ .\ 9\ .\ 13\ \ldots$
Resp.: 81

3. Achar a razão de uma progressão aritmética de 11 têrmos cujo primeiro têrmo é 10 e cujo último têrmo é 40.
Resp.: 3

4. Numa progressão aritmética de 10 têrmos o primeiro têrmo é 5 e o último 77. Calcular a razão.
Resp.: 8

5. Achar o número de têrmos de uma progressão aritmética cuja razão é 4 e cujos têrmos extremos são 5 e 61.
Resp.: 15

6. Achar o número de têrmos de uma progressão aritmética cuja razão é 11, sabendo-se que o primeiro têrmo é 9 e o último têrmo 86.
Resp.: 8

7. Achar o primeiro têrmo de uma progressão aritmética de 14 têrmos cujo último têrmo é 41 e cuja razão é 4.
Resp.: -11

8. Achar o primeiro têrmo de uma progressão aritmética de 10 têrmos, sabendo-se que o último têrmo é 12 e a razão -5.
Resp.: 57

9. Quantos múltiplos de 7 há entre 20 e 1 000?
Resp.: 140

10. Quantos números divisíveis por 3 há entre 100 e 400?
Resp.: 100

11. Inserir 5 meios aritméticos entre 7 e 25.
Resp.: $:7\ .\ 10\ .\ 13\ .\ 16\ .\ 19\ .\ 22\ .\ 25$

12. Inserir 6 meios aritméticos entre 6 e $3^2/_3$.
Resp.: $6\ .\ 5^2/_3\ .\ 5^1/_3\ .\ 5\ .\ 4^2/_3\ .\ 4^1/_3\ .\ 4\ .\ 3^2/_3$

46. Exercícios para resolver.

1. Resolver a equação $5 \times 3^x = 405$.
   Resp.: $x = 4$
2. Resolver a equação $2 \times 3^{2x} = 1458$.
   Resp.: $x = 3$
3. Resolver a equação $(a^{x+1})^x = (a^x)^2$.
   Resp.: $x' = 0, \quad x'' = 1$
4. Resolver a equação $2{,}37^x = 3{,}754$.
   Resp.: $x = 1{,}534$
5. Resolver a equação $2{,}634^{x-1} = 3{,}41$.
   Resp.: 2,266
6. Resolver a equação $(a^{x+2})^x = a^{3x}$.
   Resp.: $x' = 0, \quad x'' = 1$
7. Resolver a equação $(5^{x-1})^{x-4} = 625$.
   Resp.: $x' = 5, \quad x' = 0$
8. Resolver a equação $2^{(x-1)(x+3)} = 1$.
   Resp.: $x' = 1, \quad x'' = -3$
9. Resolver a equação $\sqrt[x]{a} = a^{4x}$.
   Resp.: $x = \pm\frac{1}{2}$
10. Resolver a equação $2^{x+3} = 128$.
    Resp.: $x = 3$
11. Resolver a equação $4^{x+2} - 2^{x+3} = 48$.
    Resp.: $x = 1$
12. Resolver a equação $3^x + 9^x = 90$.
    Resp.: $x = 2$
13. Resolver a equação $4^{\sqrt{x}} = 256$.
    Resp.: $x = 16$
14. Resolver a equação $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 30$.
    Resp.: $x = 4$
15. Resolver a equação $2^x + 2^{x+2} + \dfrac{8}{2^{x-1}} = 49$.
    Resp.: $x = 4$.

Capítulo 14

Análise Combinatória

1. Preliminares. Dados m elementos distintos

$$a_1, a_2, \ldots a_m$$

tomando-se p dêsses elementos (sendo $p \leq m$) e dispondo-os *linearmente*, forma-se um agrupamento de *módulo, classe* ou *ordem* p. Nos casos particulares de p igual a 2, 3 e 4, os agrupamentos podem denominar-se *binários, ternários* e *quaternários*, respectivamente.

Um agrupamento pode ser *simples* ou *com repetição*. No primeiro caso nenhum elemento figura mais de uma vez no agrupamento; no segundo caso, pelo menos um elemento aparece duas ou mais vêzes no agrupamento.

Com os m elementos anteriores podem ser formados diferentes tipos de agrupamentos, como veremos a seguir. A determinação do número dêstes agrupamentos, de grande importância em diversos ramos da Matemática (como, por exemplo, no Cálculo das Probabilidades), constitui o objetivo da *Análise Combinatória* ou *Cálculo Combinatório* (*).

Um agrupamento de p dos m elementos dados (sendo $p \leq m$) pode ser considerado, prescindindo-se ou não da *ordem* dêstes p elementos. No primeiro caso, dois agrupamentos são *idênticos* quando *contêm os mesmos elementos, qualquer que seja sua ordem,* considerando-se *distintos* dois agrupamentos *que difiram de, pelo menos, um elemento.* No segundo caso, dois agrupamentos são *idênticos* quando são *constituídos dos mesmos elementos, dispostos numa mesma ordem,* considerando-se *distintos* dois agrupamentos que difiram de, pelo menos, um elemento ou dois agrupamentos de mesmos elementos em que, *pelo menos, dois elementos iguais não ocupem a mesma posição.*

Diremos que dois agrupamentos se diferenciam *pela natureza de seus elementos* se diferem de, pelo menos, um elemento.

(*) Sua origem data do século XVII e encontra-se no *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, no *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz (a quem se deve a denominação *ars combinatoria*) e em trabalhos de Walls (1673) Frenicle de Bessy (1693). J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718). O tratado mais completo, *Lehrbuch der Combinatorik* de E. Netto foi publicado em Leipzig, em 1901).

Um agrupamento de p elementos distintos, tirados dos m elementos dados, abstração feita de sua ordem (tal como foi definido no primeiro caso) denomina-se *combinação simples de classe p dêsses m* elementos.

Um agrupamento ordenado de p elementos distintos tirados dos m elementos dados (tal como foi definido no segundo caso) chama-se *arranjo simples* ou *disposição simples de classe p* dêsses m elementos (*).

No caso particular de $p = m$ tem-se evidentemente *uma única combinação* dos m elementos e tantos arranjos quantos são os diferentes modos de ordená-los. Êsses *arranjos simples de classe m dos m elementos* recebem a denominação especial de *permutações simples* dêsses m elementos.

Resumindo as considerações feitas, podemos, em conclusão, dar as seguintes definições:

1) *Arranjos simples de classe p de m elementos* (*sendo* $p \leq m$) ou *arranjos simples de m elementos p* a *p* são todos os agrupamentos de p elementos distintos tirados dentre os m elementos dados, de modo que cada agrupamento se diferencie de outro, seja pela *natureza*, seja pela *ordem* de seus elementos;

2) *permutações simples* de m elementos são todos os agrupamentos de m elementos sem repetição que se podem formar com os m elementos dados, de modo que cada agrupamento se diferencie de outro pela ordem de seus elementos;

3) *combinações simples de classe p de m elementos* ou *combinações simples de m elementos p a p* são todos os agrupamentos de p elementos distintos tirados dentre os m elementos dados de modo que cada agrupamento se diferencie de outro pela *natureza* de seus elementos.

2. Formação dos arranjos simples. Consideremos, para fixar as idéias, quatro elementos: a, b, c, d.

Conforme será demonstrado mais adiante, obtêm-se os *arranjos binários* dêsses quatro elementos, juntando-se a cada elemento sucessivamente os outros *três*. Então, os arranjos binários dos quatro elementos são

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Juntando-se, a seguir, a cada um dêstes agrupamentos binários sucessivamente os *dois* elementos que nêle não figuram, obtêm-se os *arranjos ternários*, ou sejam

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac

(*) A denominação *disposição* é usada por muitos autores italianos como PINCHERLE, SEVERI, SIBIRANI, TRICOMI, VITALI, etc. REY-PASTOR usa a denominação *variação*.

acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

Demonstremos que êste processo de formação é geral, isto é, que dados m elementos distintos, se obtêm os *arranjos binários simples* dêles, juntando-se a cada um dêles sucessivamente os $m - 1$ elementos restantes; que se obtêm os *arranjos ternários simples* dos m elementos, juntando-se a cada agrupamento binário sucessivamente os $m - 2$ elementos que nêle não figuram, e assim por diante. Para isto admitamos que estejam formados todos os arranjos $p - 1$ a $p - 1$ dos m elementos dados, e demonstremos que, acrescentando-se a cada um dêstes agrupamentos de classe $p - 1$, *numa certa posição*, sucessivamente todos os $m - (p - 1)$ elementos que nêle faltam, obtemos os arranjos de m elementos p a p. Para facilidade de exposição suponhamos que cada elemento seja acrescentado depois do último elemento, tal como fizemos no exemplo acima.

Demonstremos, então, que:

1) *os arranjos de classe p, assim obtidos, são simples*;

2) *não há falta nem repetição de arranjos de classe p.*

De fato, como os arranjos de classe $p - 1$ são simples, juntando-se a êles sucessivamente elementos que nêles não figuram, os arranjos de classe p, assim obtidos, são, também, *simples*. Por outro lado, não poderia faltar um arranjo da classe p, pois, neste caso, em contradição com a hipótese, faltaria o arranjo de classe $p - 1$, que se obtém daquele suprimindo-se seu último elemento. Igualmente, nenhum arranjo de classe p, formado pelo processo anterior, poderá ser obtido duas vêzes, porque dois arranjos quaisquer de classe p, assim obtidos, diferem, seja pelo último elemento, quando provém do mesmo arranjo de classe $p - 1$, seja pela ordem ou pela natureza dos $p - 1$ primeiros elementos, quando se originam de dois arranjos distintos de classe $p - 1$.

3. Número de arranjos simples de classe p de m elementos. Representa-se por um dos símbolos A_m^p ou $A_{m,p}$ o *número de arranjos simples de m elementos p a p* (*).

Da demonstração anterior se conclui que o *número de arranjos de classe p de m elementos é igual ao produto de* $m - (p - 1)$ *pelo número de arranjos de classe* $p - 1$ *dêsses elementos.*

(*) Os autores que adotam a denominação *disposições* representam o seu número por $D_{m,p}$ ou D_m^p; os que empregam a denominação *variações* representam-no por $V_{m,p}$ ou V_m^p.

Adotando, então, a primeira das notações acima referidas podemos escrever

$$A_{m,p} = [m - (p-1)]\, A_{m,p-1}$$

Sendo geral esta relação, podemos estabelecê-la para diferentes valôres de p. Observando que, evidentemente $A_{m,1} = m$ resultam as p relações

$$\begin{aligned} A_{m,1} &= m \\ A_{m,2} &= (m-1)\, A_{m,1} \\ A_{m,3} &= (m-2)\, A_{m,2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m,p} &= [m-(p-1)]\, A_{m,p-1} \end{aligned}$$

Multiplicando-se, membro a membro, e suprimindo os fatôres comuns a ambos os membros, obtemos a fórmula do número de arranjos simples de m elementos p a p

$$\boxed{A_{m,p} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)} \qquad (1)$$

CONCLUSÃO: *O número de arranjos simples de m elementos p a p é dado pelo produto de p números inteiros, consecutivos e decrescentes a partir de m.*

Por exemplo, o número de arranjos de 10 elementos 3 a 3 é dado pelo produto dos três números 10, 9 e 8, ou

$$A_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

4. Formação das permutações simples. Sendo as *permutações simples de m elementos*, por definição, os *arranjos simples de classe m* dos mesmos, sua formação, de acôrdo com esta definição, exigiria a formação sucessiva de todos os arranjos simples de ordens 1, 2, ... $m-1$. Pode-se, entretanto, seguindo-se rumo diferente, evitar êsse longo processo.

Consideremos as duas permutações simples

ab   *ba*

de *dois* elementos a e b.

Como será demonstrado mais adiante, obtêm-se as permutações simples de *três* elementos a, b, c, acrescentando-se o elemento c a cada grupo anterior em cada uma das três posições possíveis: depois do segundo elemento, entre o primeiro e o segundo, e antes do primeiro. Obtém-se, então,

abc	*bac*
acb	*bca*
cab	*cba*

Formam-se, anàlogamente, as permutações de *quatro* elementos a, b, c, d, acrescentando-se o quarto elemento d a tôdas as permutações anteriores, em cada uma das quatro posições possíveis. Obtém-se, então,

abcd	*bacd*	*acbd*	*bcad*	*cabd*	*cbad*
abdc	*badc*	*acdb*	*bcda*	*cadb*	*cbda*
adbc	*bdac*	*adcb*	*bdca*	*cdab*	*cdba*
dabc	*dbac*	*dacb*	*dbca*	*dcab*	*dcba*

Demonstremos a generalidade dêste processo de formação, isto é, que se obtêm tôdas as permutações de m elementos distintos, acrescentando-se um dêsses elementos a *tôdas as permutações dos outros $m - 1$ elementos* em cada uma das m posições possíveis: depois do último elemento, em cada um dos $m - 2$ intervalos entre dois elementos consecutivos quaisquer, e antes do primeiro elemento.

Demonstremos, então, que:

1) *As permutações de m elementos, assim obtidas, são simples;*

2) *não há falta nem repetição de permutações dos m elementos.*

De fato, como as permutações dos $m - 1$ elementos são simples, juntando-se a elas um elemento que nelas não aparece, obtêm-se, também, permutações simples de m elementos. Além disso, não poderia faltar uma permutação dos m elementos, pois, nesse caso, faltaria, em contradição com a hipótese, a permutação de $m - 1$ elementos, obtida daquela pela supressão do *emésimo* elemento acrescentado. Por outro lado, nenhuma permutação de m elementos, assim formada, poderia ser obtida duas vêzes, pois duas permutações quaisquer de m elementos diferem, seja pela posição do emésimo elemento acrescentado (se provém da mesma permutação de $m - 1$ elementos), seja pela posição dos $m - 1$ primeiros elementos (se se originam de duas permutações distintas de $m - 1$ elementos).

5. Número de permutações simples de m elementos. De acôrdo com a primeira observação do **n.º 4**, o número de permutações simples de m elementos é igual ao número de arranjos simples de m elementos tomados m a m. Designando, então, por P_m aquêle número, obtém-se sua fórmula fazendo-se $p = m$ na fórmula (1) o que dá

$$P_m = A_{m,m} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)$$

ou, invertendo a ordem dos fatôres

$$P_m = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (m-1)\, m$$

Êste produto de todos os números inteiros de 1 a m denomina-se *fatorial de m* e representa-se por um dos três símbolos $m!$, $\underline{|m}$ ou

$\pi(m)$ (*). Adotaremos o primeiro por ser o mais usado. Podemos, então, escrever

$$\boxed{P_m = m!} \qquad (2)$$

fórmula que dá o número de permutações simples de m elementos.

Conclusão: *O número de permutações simples de m elementos é igual a fatorial de m, ou seja, o produto de todos os números inteiros de 1 a m.*

Por exemplo, com os algarismos ímpares 1, 3, 5, 7 e 9 podem ser formados 5! números de 5 algarismos sem repetição, ou

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

6. Observação. Adotando o símbolo *fatorial* anteriormente definido (**n.° 5**), podemos estabelecer uma outra expressão para a fórmula de $A_{m,p}$. Com efeito, multiplicando e dividindo o segundo membro da igualdade (1) por $(m - p)!$, obtemos

$$A_{m,p} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)(m-p)!}{(m-p)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)(m-p)(m-p-1)\ldots 3.2.1}{(m-p)!}$$

ou, observando que o numerador é o produto de todos os números inteiros de 1 a m,

$$\boxed{A_{m,p} = \frac{m!}{(m-p)!}} \qquad (3)$$

7. Formação das combinações simples. Consideremos, para fixar as idéias, cinco elementos a, b, c, d, e na ordem em que se acham. Conforme será demonstrado mais adiante, obtêm-se as combinações simples dêsses 5 elementos 2 a 2, acrescentando-se a cada um dêles (quando possível) sucessivamente os elementos que o seguem. Assim, ao elemento a acrescentam-se sucessivamente os elementos b, c, d, e; ao elemento b acrescentam-se sucessivamente c, d, e; ao elemento c acrescentam-se sucessivamente d e e e finalmente ao elemento d acrescenta-se o elemento e. Êste último não dá origem a grupo binário. Obtêm-se, assim, as combinações

(*) O símbolo $\pi(m)$ foi introduzido por Gauss (1811); $m!$ é devido a Kramp (1808); $\underline{|m}$ é a notação freqüentemente usada pelos autores inglêses e norte-americanos. A denominação *fatorial* é devida a Arbogast (1800).

ab	***bc***	***cd***	***de***
ac	***bd***	***ce***	
ad	***be***		
ae			

Formam-se as combinações ternárias dos cinco elementos dados, acrescentando-se a cada um dos grupos binários acima, não terminados pelo último elemento, sucessivamente todos os elementos que seguem o seu último. Assim, ao grupo ab acrescentam-se sucessivamente c, d, e, aos grupos ac e bc sucessivamente d, e aos grupos ad, bd e cd o elemento e. Os grupos binários ae, be, ce e de não dão origem a grupos ternários. Obtêm-se, então, as combinações

abc	***acd***	***ade***	***bcd***	***bde***	***cde***
abd	***ace***		***bce***		
abe					

Acrescentando-se a cada um dêsses agrupamentos, não terminados em e, sucessivamente todos os elementos que seguem o seu último, obtêm-se as combinações quaternárias, ou

abcd	***abde***	***acde***	***bcde***
abce			

Consideremos, de um modo geral, m elementos distintos numa certa ordem $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$. Admitamos que estejam formadas *tôdas as combinações simples de classe* $p - 1$ dêsses m elementos e que, em cada uma, os $p - 1$ elementos estejam ordenados. Demonstremos que formaremos as combinações simples de classe p, dêsses m elementos, acrescentando a cada combinação de classe $p - 1$, não terminada pelo último elemento a, sucessivamente todos os elementos seguintes ao seu último elemento. Demonstremos, então, que:

1) *as combinações de classe p, assim obtidas, são simples;*

2) *não há falta nem repetição de combinações de classe p.*

De fato, como as combinações de classe $p - 1$ são simples, juntando-se a elas sucessivamente elementos que nelas não figuram, as combinações de classe p, assim obtidas, são, também, simples. Além disto, não poderia faltar uma combinação de classe p, pois, nesse caso, em contradição com a hipótese feita, faltaria a combinação de classe $p - 1$, obtida daquela pela supressão do último elemento. Por outro lado, não poderia haver repetição de uma combinação. Com efeito, vemos, de início, que duas combinações quaisquer de classe p, provenientes de uma mesma combinação de classe $p - 1$ diferem pelo último elemento agregado. Também são distintas duas combinações quaisquer de classe p originadas de combinações distintas de classe $p - 1$. Com efeito, sejam a_r e a_s respectivamente os dois últimos elementos dessas combinações de classe $p - 1$, cujos elementos supomos ordenados. Admitamos que, na sua ordem natural, a_r preceda a_s. A primeira dessas combinações tem, pelo menos, um elemento precedente a a_r (ou o próprio a_r) que não aparece na segunda e é diferente do elemento que se agrega a esta, por ser êste seguinte a a_s e, portanto, a a_r (*).

8. Número de combinações simples de classe p de m elementos. A formação das combinações, estudada no parágrafo anterior, não permite estabelecer a fórmula do número de combinações simples de classe p de m elementos.

Façamos, então, outro raciocínio, que será prèviamente esclarecido com um exemplo. Seja calcular as combinações ternárias simples dos 4 elementos a, b, c, d. Formemos seus arranjos simples e disponhamo-los, como se vê no quadro abaixo, de modo que os arranjos de cada coluna contenham

$a\ b\ c$	$a\ b\ d$	$a\ c\ d$	$b\ c\ d$
$a\ c\ b$	$a\ d\ b$	$a\ d\ c$	$b\ d\ c$
$c\ a\ b$	$d\ a\ b$	$d\ a\ c$	$d\ b\ c$
$b\ a\ c$	$b\ a\ d$	$c\ a\ d$	$c\ b\ d$
$b\ c\ a$	$b\ d\ a$	$c\ d\ a$	$c\ d\ b$
$c\ b\ a$	$d\ b\ a$	$d\ c\ a$	$d\ c\ b$

os mesmos elementos. Então, cada coluna contém tantos arranjos quantas são as permutações de 3 elementos ou $P_3 = 3!$, visto que êsses arranjos são tôdas as permutações do grupo de sua primeira linha (por ex., na primeira coluna estão tôdas as permutações dos elementos a, b, c). Por outro lado, o número de colunas é, pela definição dada, o próprio número de combinações ternárias simples dos 4 elementos a, b, c, d, ou $C_{4,3}$, pois essas combinações estão representadas, em qualquer das seis linhas do quadro. Como o produto do número de colunas pelo número de linhas dá o número de agrupamentos do quadro, em virtude do que foi dito, podemos escrever

$$C_{4,3} \times P_3 = A_{4,3}$$

Consideremos, de um modo geral, m elementos $a_1, a_2, \ldots a_m$. Admitamos que estejam formados todos os seus arranjos simples de classe p e distribuamos êsses $A_{m,p}$ arranjos em um certo número de colunas, de modo que os arranjos de cada coluna contenham os mesmos elementos, só se diferenciando entre si pela sua ordem. Cada coluna, conterá, então, tantos arranjos quantas são as permutações de p

(*) O leitor verifica que êste raciocínio é válido ainda no caso de serem a_r e a_s idênticos.

elementos e, como o número de colunas é, pela própria definição, o número de combinações de classe p dos m elementos, podemos, representando por $C_{m,p}$ êsse número, escrever

$$C_{m,p} \times P_p = A_{m,p} \tag{4}$$

donde

$$\boxed{C_{m,p} = \frac{A_{m,p}}{P_p}} \tag{5}$$

ou, substituindo $A_{m,p}$ e P_p respectivamente por suas expressões (1) e (2),

$$\boxed{C_{m,p} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{p!}} \tag{6}$$

CONCLUSÃO; *O número de combinações simples de classe p de m elementos é igual ao quociente da divisão do número de arranjos simples de classe p de m elementos pelo número de permutações simples de p elementos, ou seja, o quociente da divisão do produto de p números inteiros, consecutivos e decrescentes a partir de m, por fatorial de p.*

Por exemplo, o número de combinações simples de 9 elementos 4 a 4 é

$$C_{9,4} = \frac{A_{9,4}}{P_4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 126$$

9. Observação. Sendo, pela própria definição, $C_{m,p}$ essencialmente um número natural, a fórmula (6) estabelece indiretamente um teorema da Aritmética:

O produto de p inteiros e consecutivos é divisível por fatorial de p.

10. Arranjos com repetição. Dados m elementos distintos $a_1, a_2, \ldots a_m$, chamam-se *arranjos com repetição* ou *arranjos completos* de classe p dêsses m elementos a todos os agrupamentos de p elementos, *distintos ou não*, tirados dentre os m elementos dados, de modo que cada agrupamento difira de outro, seja pela natureza, seja pela ordem de seus elementos.

Nesta definição não é necessária a restrição $p \leq m$, feita na de arranjos simples, podendo ser p superior a m. Observemos, ainda, que os *arranjos com repetição* compreendem os *arranjos simples* e o conjunto de todos os arranjos onde há, pelo menos, um elemento repetido. É o que veremos a seguir.

18. Demonstrar que o número de permutações de m letras $a, b, \ldots l$, nas quais uma, pelo menos, ocupa sua posição inicial, é

$$m!\left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m!}\right]$$

19. Demonstrar a relação

$$m\, C_{m-1,\,p} = (m - p)\, C_{m,\,p}$$

20. Demonstrar que, se m é primo e $p < m$, $C_{m,\,p}$ é divisível por m.

21. Demonstrar a relação

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{m!}{(m+1)!} = 1 - \frac{1}{(m+1)!}$$

Sugestão: Partir da identidade

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$$

fazer sucessivamente $k = 1, 2, \ldots, m$, etc.

Binômio de Newton

1. Produto de binômios. Consideremos m binômios $x + a_1$, $x + a_2, \ldots x + a_m$, que diferem entre si apenas pelo segundo têrmo, e formemos seu produto

$$P = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_m)$$

De acôrdo com a regra de multiplicação algébrica, êste produto é a soma de todos os produtos de m têrmos que se obtém, tomando-se um têrmo e um só de cada binômio; será, portanto, um polinômio do grau m em x, como veremos a seguir.

Realmente, seu têrmo de mais alto grau é x^m, obtido pelo produto dos m têrmos x. Seu coeficiente é, então, a unidade.

Os têrmos em x^{m-1} são formados, tomando-se, de todos os modos possíveis, o primeiro têrmo de $m - 1$ binômios e o segundo têrmo do restante e formando-se seu produto. Obtêm-se, assim, os têrmos $a_1x^{m-1}, a_2x^{m-2}, \ldots a_mx^{m-1}$. O têrmo em x^{m-1} do produto é, portanto,

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)x^{m-1}$$

isto é, tem para coeficiente a soma dos segundos têrmos dos fatôres binômios.

Anàlogamente os têrmos em x^{m-2} são formados multiplicando-se $m - 2$ fatôres x tirados de $m - 2$ binômios pelos segundos têrmos dos dois binômios restantes, sendo esta operação feita de todos os modos possíveis. Obtêm-se, assim, os têrmos $a_1a_2x^{m-2}, a_1a_3x^{m-2}, \ldots a_{m-1}a_mx^{m-2}$, e, portanto, o têrmo em x^{m-2} do produto será

$$(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{m-1}a_m)x^{m-2}$$

isto é, terá para coeficiente a soma dos produtos dois a dois dos segundos têrmos dos fatôres binômios.

Prosseguindo, anàlogamente, demonstraríamos que o têrmo em x^k do produto tem para coeficiente a soma dos produtos $m - k$ a $m - k$ dos m têrmos $a_1, a_2, \ldots a_m$, havendo $\binom{m}{m-k}$ dêsses produtos.

Sendo o têrmo independente de x o produto dos m têrmos $a_1, a_2, \ldots a_m$, podemos escrever, então,

$$(x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_m) = \\ = x^m + x^{m-1}\,\Sigma a_i + x^{m-2}\,\Sigma a_i a_j + \ldots + \\ + x^{m-k}\,\Sigma a_i a_j \ldots a_l + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_m \qquad (1)$$

onde

$$\Sigma a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \\ \Sigma a_i a_j = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{m-1} a_m \qquad (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma a_i a_j \ldots a_l = a_1 a_2 \ldots a_k + \ldots + a_{m-k+1} a_{m-k+2} \ldots a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Exercício. *Calcular o produto*

$$(x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$$

aplicando a fórmula (1).

Resolução: O produto será, de acôrdo com a fórmula (1), um polinômio do 4.º grau, cujos coeficientes, a partir do segundo, são:

$$\Sigma a_i = 1 + 3 + 4 + 5 = 13 \\ \Sigma a_i a_j = 1\,.\,3 + 1\,.\,4 + 1\,.\,5 + 3\,.\,4 + 3\,.\,5 + 4\,.\,5 = 59 \\ \Sigma a_i a_j a_k = 1\,.\,3\,.\,4 + 1\,.\,3\,.\,5 + 1\,.\,4\,.\,5 + 3\,.\,4\,.\,5 = 107 \\ \Sigma a_i a_j a_k a_l = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4 = 24$$

O produto é, então, $x^4 + 13x^3 + 59x^2 + 107x + 24$.

3. Potência de um binômio. Sendo a fórmula (1) estabelecida para valôres $a_1, a_2, \ldots a_m$, quaisquer, podemos nela, fazer $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a$. Observando que, nesta hipótese, as fórmulas (2) ficam

$$\Sigma a_i = a + a + \ldots + a = ma \\ \Sigma a_i a_j = a^2 + a^2 + \ldots + a^2 = \binom{m}{2} a^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma a_i a_j \ldots a_l = a^k + a^k + \ldots + a^k = \binom{m}{k} a^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 a_2 \ldots a_m = a^m$$

e que o produto $(x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_m)$ se transforma na potência m do binômio $(x + a)$, podemos escrever

$$(x + a)^m = x^m + max^{m-1} + \binom{m}{2} a^2 x^{m-2} + \ldots + \\ + \binom{m}{k} a^k x^{m-k} + \ldots + a^m \qquad (3)$$

fórmula habitualmente chamada do *binômio de* Newton (*). Observando que (**Cap. 14, n.º 20**) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$, podemos escrever a fórmula (3) do seguinte modo:

$$(x + a)^m = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} a^k x^{m-k} \qquad (4)$$

ou, ainda,

$$(x + a)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!}\, a^\alpha x^\beta \qquad (5)$$

onde o sinal somatório se extende a todos os pares de números inteiros não negativos α e β cuja soma seja m.

4. Têrmo geral do desenvolvimento da potência m do binômio. O têrmo precedido de k têrmos no desenvolvimento da potência m do binômio chama-se *têrmo geral* do desenvolvimento e representa-se por T_k (**). Desta definição se deduz que T_k é o têrmo de ordem $k + 1$ do desenvolvimento. Sua expressão, de acôrdo com a fórmula (3) é

$$T_k = \binom{m}{k} a^k x^{m-k} \qquad (6)$$

5. Formação sucessiva dos têrmos. Estabeleçamos a lei que permite determinar um têrmo T_{k+1} quando é conhecido o têrmo precedente T_k.

De acôrdo com a definição de têrmo geral, o têrmo T_{k+1} terá para valor

$$T_{k+1} = \binom{m}{k+1} a^{k+1} x^{m-k-1} \qquad (7)$$

Dividindo, membro a membro, a igualdade (7) pela igualdade (6), obtemos, após ligeira simplificação,

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{m - k}{k + 1} \cdot \frac{a}{x}$$

donde

$$T_{k+1} = T_k\, \frac{m - k}{k + 1} \cdot \frac{a}{x} \qquad (8)$$

(*) A expressão da potência m de um binômio para m inteiro e positivo, parece ter sido estabelecida pela primeira vez por Tartaglia, que a apresentou no seu *Trattato de numeri e misuri*. A Newton cabe a glória de haver generalizado a fórmula do binômio, aplicando-a ao desenvolvimento em série das funções.

(**) Preferimos, como o faz Niewenglowski (*Cours d'Algebre*, Paris, Armand Colin, 9.ª ed., 1.º vol., pág. 78) designar por T não o *têrmo de ordem k* e sim o *têrmo de ordem k + 1*, isto é, o têrmo precedido de k têrmos. O leitor compreenderá a vantagem desta definição acompanhando o desenvolvimento seguinte.

Observando que $m - k$ é o expoente de x no têrmo T_k e k o expoente de a no mesmo têrmo, a fórmula (8) permite estabelecer a seguinte *lei de formação sucessiva dos têrmos*:

Conhecido um têrmo qualquer do desenvolvimento de $(x + a)^m$, obtém-se o coeficiente do têrmo seguinte, multiplicando-se o coeficiente do têrmo conhecido pelo expoente de x nesse têrmo e dividindo-se o produto pelo expoente de a nesse têrmo aumentando de uma unidade; obtém-se a parte literal diminuindo-se o expoente de x de uma unidade e aumentando-se o de a de uma unidade.

O leitor poderá verificar esta regra observando o desenvolvimento seguinte:

$$(x + a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

6. Desenvolvimento de $(x - a)^m$. Sendo a fórmula (3) válida qualquer que seja a, podemos aplicá-la no caso de o segundo têrmo ser negativo, isto é, para a potência $(x - a)^m$, observando, apenas, que, de acôrdo com as condições do **n.° 3**, os têrmos em que a tem expoente par são positivos, sendo negativos aquêles em que o expoente de a é ímpar.

Obtemos, pois,

$$(x - a)^m = x^m - max^{m-1} + \binom{m}{2} a^2x^{m-2} - \ldots +$$
$$+ (-1)^k \binom{m}{k} a^kx^{m-k} + \ldots + (-1)^m a^m \tag{9}$$

7. Teorema. Consideremos, no desenvolvimento de $(x + a)^m$, os têrmos T_k e T_{m-k}, que, por definição (**n.° 4**) são precedidos, respectivamente, de k e $m - k$ têrmos. Como o desenvolvimento considerado tem $m + 1$ têrmos, visto ser um polinômio completo do grau m em x, o têrmo T_{m-k} será seguido de $(m + 1) - (m - k + 1)$ ou k têrmos. Assim, há k têrmos antes de T_k e k têrmos depois de T_{m-k}. Os têrmos T_k e T_{m-k} dizem-se, então, *eqüidistantes dos extremos.*

Como seus coeficientes, de acôrdo com a fórmula geral (6) são $\binom{m}{k}$ e $\binom{m}{m-k}$ respectivamente, e, como (**Cap. 14, n.° 19, a**)

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

concluímos:

Os coeficientes de dois têrmos eqüidistantes dos extremos são iguais (*).

8. Aplicação do triângulo dos números combinatórios. Sendo o desenvolvimento do binômio um polinômio homogêneo do grau m

(*) Esta propriedade já foi estabelecida entre as propriedades do *triângulo dos números combinatórios* (**Cap. 14, n.° 22, a**), pois, os elementos das linhas dêste são os coeficientes do desenvolvimento de potências do binômio, como veremos a seguir.

de duas variáveis x e a, sua determinação necessita apenas do cálculo dos coeficientes

$$\binom{m}{0} \quad \binom{m}{1} \quad \binom{m}{} \ldots\ldots \binom{m}{m}$$

Mas como êstes são os elementos da $(m + 1)$ *ésima* linha do *triângulo dos números combinatórios* (**Cap. 14, n.° 21**) podemos utilizar êste para o seu cálculo.

Seja, por exemplo, achar o desenvolvimento de $(x + a)$. A 8ª. linha do triângulo (**Cap. 14, n.° 21**) dá-nos os coeficientes procurados, o que nos permite escrever

$$(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 +$$
$$+ 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$$

9. Têrmo de máximo coeficiente. Vimos, na formação sucessiva dos têrmos (**n.° 5**), que, conhecido o têrmo geral T_k, se obtém o coeficiente do têrmo seguinte, multiplicando-se o coeficiente de T_k pela relação $\dfrac{m - k}{k + 1}$.

Logo os coeficientes irão aumentando enquanto $m - k$ fôr maior do que $k + 1$. Mas, observando que $m - k$ é o número de têrmos seguintes a T_k e $k + 1$ o número de têrmos até T_k, podemos dizer que *os coeficientes irão aumentando enquanto o número de têrmos restantes fôr maior do que o número de têrmos calculados.*

Se m fôr par, o desenvolvimento terá um número ímpar $m + 1$ de têrmos, e *o têrmo central será o de coeficiente máximo.* Se m fôr ímpar, o desenvolvimento terá um número par $m + 1$ de têrmos, e *os dois têrmos centrais terão o mesmo coeficiente máximo.*

10. Soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^m$. Fazendo, na fórmula (3), $x = a = 1$ e substituindo o coeficiente 1 de a^m por $\binom{m}{m}$, resulta

$$2^m = 1 + m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \ldots + \binom{m}{m} \tag{10}$$

isto é:

A soma dos coeficientes do desenvolvimento da potência m do binômio é igual a 2^m.

Procedendo anàlogamente em relação à fórmula (9), obtemos:

$$0 = 1 - m + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}$$

donde

$$1 + \binom{m}{2} + \ldots = m + \binom{m}{3} + \ldots$$

CONCLUSÃO: *A soma dos coeficientes de ordem ímpar é igual à soma dos coeficientes de ordem par.*

Como a soma total é 2^m, a soma dos coeficientes de ordem ímpar (ou a dos de ordem par) é a metade, isto é, 2^{m-1}.

11. Soma de potências de mesmo grau dos têrmos de uma progressão aritmética. Consideremos uma progressão aritmética: $:a_1 . a_2 \dots a_n$ de n têrmos e de razão r, e seja calcular a soma das potências m de seus têrmos, ou, designando por S_m esta soma

$$S_m = a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$$

Escrevamos o desenvolvimento

$$(x + r)^{m+1} = x^{m+1} + \binom{m+1}{1} r x^m + \binom{m+1}{2} r^2 x^{m-1} + \dots + r^{m+1}$$

e substituamos nesta igualdade x sucessivamente por

$$a_1, a_2 \dots a_n.$$

Resulta

$$(a_1 + r)^{m+1} = a_1^{m+1} + \binom{m+1}{1} r a_1^m + \binom{m+1}{2} r^2 a_1^{m-1} + \dots + r^{m+1}$$

$$(a_2 + r)^{m+1} = a_2^{m+1} + \binom{m+1}{1} r a_2^m + \binom{m+1}{2} r^2 a_2^{m-1} + \dots + r^{m+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a_n + r)^{m+1} = a_n^{m+1} + \binom{m+1}{1} r a_n^m + \binom{m+1}{2} r^2 a_n^{m-1} + \dots + r^{m+1}$$

Somando, membro a membro, essas n igualdades, observando que

$$a_1 + r = a_2,\ a_2 + r = a_3,\ \dots a_{n-1} + r = a_n$$

e representando, de um modo geral por S_i a soma das potências i dos n têrmos $a_1, a_2, \dots a_n$, obtemos, após a supressão dos têrmos comuns aos dois membros,

$$(a_n + r)^{m+1} = a_1^{m+1} + \binom{m+1}{1} r S_m + \binom{m+1}{2} r^2 S_{m-1} + \dots + \binom{m+1}{m} r^m S_1 + r^{m+1} S_0 \qquad (11)$$

fórmula onde substituímos, no último têrmo, n por S_0, visto que, por definição,

$$S_0 = a_1^0 + a_2^0 + \dots + a_n^0 = \overbrace{1 + 1 + \dots + 1}^{n} = n$$

A fórmula (11), como se vê, permite calcular S_m quando se conhecem $S_1, S_2, \dots S_{m-1}$.

12. Exercício. *Calcular a soma dos quadrados dos 20 primeiros números ímpares.*

RESOLUÇÃO: O vigésimo número ímpar, sendo o vigésimo têrmo da progressão $: 1 . 3 . 5 \dots\dots$, será

$$a_{20} = a_1 + 19 . r = 1 + 19 \times 2 = 39$$

A fórmula (11), para $m = 2$, fica

$$(a_n + r)^3 = a_1^3 + \binom{3}{1} r S_2 + \binom{3}{2} r^2 S_1 + r^3 S_0$$

Para calcularmos S_2 precisaremos conhecer S_1, cujo cálculo pode ser feito pela própria fórmula (11), escrita para $m = 1$, ou, mais ràpidamente, pela fórmula da soma dos têrmos de uma progressão aritmética. Porém, no caso particular da progressão considerada, já sabemos que esta soma é $S_1 = 20^2 = 400$. Substituindo os valôres conhecidos na fórmula acima, obtemos

$$(39 + 2)^3 = 1 + 3 \times 2 \times S_2 + 3 \times 2^2 \times 400 + 2^3 \times 20$$

donde tiramos $S_2 = 10\,660$.

13. Soma das potências de mesmo grau dos números naturais. Consideremos a sucessão dos números naturais de 1 até n

$$: 1 . 2 . 3 \dots n$$

que constitui uma progressão aritmética de razão 1. Aplicando a fórmula (11) a esta progressão, obtemos

$$(n + 1)^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} S_m + \binom{m+1}{2} S_{m-1} + \dots + \binom{m+1}{m} S_1 + S_0 \qquad (12)$$

fórmula que permite calcular S_m, conhecidos $S_0, S_1, \dots S_{m-1}$.

14. Exemplo. *Calcular a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais.*

RESOLUÇÃO: Escrevamos a fórmula (12) para $m = 2$

$$(n + 1)^3 = 1 + \binom{3}{1} S_2 + \binom{3}{2} S_1 + S_0$$

sendo, como já sabemos $S_0 = n$. Podemos calcular S_1, ou pela própria fórmula (12) escrita para $m = 1$, ou, mais ràpidamente, pela fórmula da soma dos têrmos de uma progressão aritmética. Porém, no caso particular da progressão considerada, já sabemos que esta soma é

$$S_1 = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Substituindo êstes valôres de S_0 e S_1 na igualdade acima, tiramos sem dificuldade

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

15. Exercício. *Demonstrar a relação*

$$C_{2m,m} = 1 + (C_{m,1})^2 + (C_{m,2})^2 + \ldots + (C_{m,m})^2$$

utilizando a fórmula do binômio.

Resolução: Façamos $a = 1$ no desenvolvimento de (3). Obtemos, observando que $C_{m,1} = m$.

$$(x+1)^m = x^m + C_{m,1}x^{m-1} + C_{m,2}x^{m-2} + \ldots + C_{m,p}x^{m-p} + \ldots + C_{m,m}$$

Como os coeficientes eqüidistantes dos extremos são iguais (**n.° 7**), podemos escrever

$$(x+1)^m = 1 + C_{m,1}x + C_{m,2}x^2 + \ldots + C_{m,p}x^p + \ldots + C_{m,m}x^m$$

Multiplicando, membro a membro, essas duas igualdades, obteremos o desenvolvimento de $(x+1)^{2m}$, onde o coeficiente de x^m é, pela própria fórmula do binômio, igual a $C_{2m,m}$. Porém, o produto dos segundos membros das igualdades acima mostra que êste coeficiente é a soma

$$1 + (C_{m,1})^2 + (C_{m,2})^2 + \ldots + (C_{m,m})^2$$

o que prova a relação acima.

16. Potência de um polinômio. Consideremos o polinômio de p têrmo

$$a + b + c + \ldots + l \qquad (13)$$

cuja potência de grau m queremos determinar. Escrevendo, uma abaixo da outra m parcelas iguais a (13)

$$\begin{array}{c} a + b + c + \ldots + l \\ a + b + c + \ldots + l \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a + b + c + \ldots + l \end{array}$$

podemos dizer que a potência procurada será de todos os produtos de m fatôres que se obtém, tirando-se um fator (elemento) de cada linha. Dêste modo, um têrmo geral do produto obtido, tirando-se o elemento a de $\alpha\,(\geq O)$ linhas, o elemento b de outras $\beta\,(\geq O)$ linhas, o elemento c de outras $\gamma\,(\geq O)$ linhas (diferentes das $\alpha + \beta$) primeiras, etc., e finalmente o elemento l das $\lambda\,(\geq O)$ linhas restantes, será da forma

$$\overbrace{a \,.\, a \ldots a \,.\, a}^{\alpha} \,.\, \overbrace{b \,.\, b \ldots b}^{\beta} \,.\, \overbrace{c \,.\, c \ldots c}^{\gamma} \ldots \overbrace{l \,.\, l \ldots l}^{\lambda} \qquad (14)$$

ou

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda \qquad (15)$$

com a condição necessária

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m \qquad (16)$$

Evidentemente há tantos têrmos (15) quantas são as permutações que se podem fazer com os m elementos (14), entre os quais há α elementos iguais a a, β elementos iguais a b, γ elementos iguias a c, etc., e λ elementos iguais a l. Sendo êste número, como já vimos (**Cap. 14, n.° 13**),

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}$$

o têrmo do produto, após a redução dos têrmos semelhantes a (15) será

$$\frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda \qquad (17)$$

A potência m do polinômio (13) será, então, a soma de todos os têrmos (17), para os quais os números não negativos α, β, γ, ... λ verifiquem a relação (16). Podemos, pois, escrever a fórmula de Leibniz.

$$\boxed{(a + b + c + \ldots + l) = \sum \frac{m}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda} \qquad (18)$$

na qual o sinal somatório se estende a tôdas as decomposições possíveis do número m em p números inteiros não negativos α, β, γ, ... λ de acôrdo com a condição 16).

A fórmula do binômio apresentada sob a forma (5) (n.° 3) é, como se vê, um caso particular de (18), a saber, aquêle em que $p = 2$.

17. Observações.

Na aplicação da fórmula (18), decompõe-se inicialmente o número m, de todos os modos possíveis, numa soma de p números inteiros, não crescentes e não negativos.

Seja, por exemplo, calcular a quarta potência de um polinômio de p têrmos. Sendo, pois, $m = 4$, temos as seguintes decomposições possíveis, de acôrdo com a observação acima:

$$\begin{array}{l} 4 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 \\ 4 = 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 \\ 4 = 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 \\ 4 = 2 + 1 + 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 \\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + \ldots + 0 \end{array}$$

18. Exercício. — *Calcular o descobrimento de*

$$(a + b + \ldots + l)^2$$

aplicando a fórmula de Leibniz

Resolução. — Temos as seguintes decomposições possíveis:

$$\begin{array}{l} 2 = 2 + 0 + 0 + \ldots + 0 \\ 2 = 1 + 1 + 0 + \ldots + 0 \end{array}$$

CAPÍTULO 16

Teoria dos Determinantes

1. Preliminares. A teoria dos determinantes tem sua origem nas pesquisas iniciadas por LEIBNIZ, em 1678, no sentido de simplificar as trabalhosas eliminações necessárias à resolução de um sistema de m equações lineares com m incógnitas.

Seguem-se, na ordem cronológica, os trabalhos de CRAMER (1750), BEZOUT (1764), LAPLACE (1772), VANDERMONDE (1772) LAGRANGE (1773), CAUCHA (1815) a quem se deve uma sistematização completa dos trabalhos de todos os seus antecessores além de suas notáveis contribuições e JACOBI (1841) cujos estudos sôbre os determinantes funcionais grande auxílio deram à Análise. O primeiro tratado sistemático e completo sôbre o assunto é de BRIOSCHI (1854), seguindo-se-lhe, então, outros, entre os quais, se destaca o de GÜNTHER (1877) que fornece minuciosa indicação bibliográfica para cada parte da teoria e um resumo histórico de seu desenvolvimento (*).

Tendo sua origem num problema de Álgebra Elementar, a teoria dos determinantes desenvolveu-se a tal ponto, que hoje constitui um algoritmo de suma importância tanto na Análise como na Geometria.

2. Classe de uma permutação. Dados m elementos $a, b, \ldots l$, tomemos uma de suas $m!$ permutações, por exemplo,

$$ab \ldots l$$

que designaremos *fundamental, principal* ou *direta*.

Diremos, então, que dois elementos em uma qualquer outra permutação dêsses m elementos formam uma *inversão* quando estão em ordem inversa àquela em que se acham na permutação principal.

Consideremos, por exemplo, os cinco elementos a, b, c, d, e e tomemos para permutação principal aquela em que se acham na ordem alfabética *abcde*. Assim sendo, uma permutação *daceb* apresentará cinco inversões, a saber, as inversões da, $d \ldots c$, $d \ldots b$, $c \ldots b$, eb.

(*) Cfr. ERNESTO PASCAL, *I Determinanti*, Milano, Ulrico Hoepli, 2.ª ed., 1923, pág. 4.

Diz-se que uma permutação é de *classe par* ou de *classe ímpar* segundo apresenta um número par ou ímpar de inversões. Por exemplo, a permutação acima *daceb* é de classe ímpar, porque, como vimos, apresenta 5 inversões.

3. Teorema.

a) Consideremos uma permutação

$$a \ldots c\,e\,b\,f \ldots l \tag{1}$$

de m elementos dados e permutemos dois elementos *consecutivos* quaisquer, como por exemplo e e b,

$$a \ldots c\,b\,e\,f \ldots l \tag{2}$$

Evidentemente, não foi alterada a posição de cada um dêstes dois elementos em relação aos demais $m - 2$, havendo, apenas, alteração na sua posição recíproca. Logo o número de inversões da permutação *diminuiu ou aumentou de uma unidade* conforme os dois elementos formavam ou não uma inversão em (1). Resulta daí que a permutação (2) não é da mesma classe da permutação (1).

b) Consideremos, ainda, uma permutação

$$a \ldots e\,c\,d \ldots f\,b \ldots l \tag{3}$$

dos mesmos m elementos, e permutemos dois *elementos não consecutivos* e e b, entre os quais existem r ($r \geq 1$) elementos. Poderemos realizar esta permuta, fazendo, em primeiro lugar, o elemento à esquerda e avançar r posições (para a direita), e em seguida, o elemento à direita b retroceder $r + 1$ posições (para a esquerda). Isto equivale a realizar sucessivamente um número ímpar $2r + 1$ de permutações de dois elementos consecutivos, do que decorre, em virtude do resultado anterior, haver uma mudança de classe na permutação.

Os resultados acima permitem-nos enunciar o seguinte teorema:

Trocando-se dois elementos quaisquer de uma permutação, esta muda de classe.

4. Observações.

a) Se considerarmos $a\,b\,c \ldots kl$ como *permutação principal* dos m elementos $a, b, c, \ldots k, l$, o *número máximo* de inversões aparece, quando, dois a dois, todos os elementos formam inversão, ou seja, na permutação $lk \ldots cba$. Êste número máximo de inversões é, portanto, o número de combinações de m elementos dois a dois, isto é, $\binom{m}{2}$.

b) Consideremos, entre as $m!$ permutações dos m elementos $a, b, \ldots l$, as de classe par. Permutando dois elementos prèviamente prefixados, em cada uma destas permutações de classe par, obteremos o mesmo número de permutações de classe ímpar. Recìprocamente, a permutação de dois elementos, prèviamente escolhidos, em cada uma das permutações de classe ímpar dos m elementos, forma permutações de classe par dos mesmos.

Concluímos, pois:

O número de permutações de classe par de m elementos é igual ao número de permutações de classe ímpar dêsses elementos.

5. Matriz quadrada. Um conjunto de n^2 elementos, dispostos num quadro, como o que se segue,

$$\left|\begin{matrix} a_1^1\, a_1^2 \dots a_1^n \\ a_2^1\, a_2^2 \dots a_2^n \\ \dots\dots\dots \\ a_n^1\, a_n^2 \dots a_n^n \end{matrix}\right| \tag{4}$$

denomina-se *matriz quadrada de ordem n.* O conjunto de n elementos situados numa mesma *horizontal* denomina-se *linha* da matriz e o conjunto de n elementos que figuram numa mesma *vertical* chama-se *coluna.* Chama-se *fila* da matriz indiferentemente uma *linha* ou uma *coluna.* Dêste modo, por *filas paralelas* entendem-se *linhas* ou *colunas*, e por *filas perpendiculares* uma linha e uma coluna (*).

Cada um dos n^2 elementos da matriz (4) está afetado de dois índices: um *superior*, indicando sua *coluna*, isto é, sua posição sôbre a horizontal, e outro *inferior* indicando sua linha, ou seja, sua posição sôbre a vertical. Dêste modo, a_j^i indica *elemento da coluna i e da linha j.*

Chama-se *diagonal principal* da matriz (4) à sucessão, ordenada em relação aos índices, $a_1^1\, a_2^2 \dots a_n^n$ dos elementos afetados de dois índices iguais, e *diagonal secundária* à sucessão ordenada em relação aos índices das linhas e das colunas $a_n^1\, a_{n-1}^2 \dots a_1^n$ dos elementos cuja soma dos índices é $n + 1$.

Dois elementos a_s^r e a_r^s dizem-se *simétricos* em relação à diagonal principal. Se, quaisquer que sejam r e s, se tem $a_s^r = a_r^s$, diz-se que a *matriz* (4) é *simétrica.*

Consideremos uma permutação

$$a_\alpha^{\alpha'}\, a_\beta^{\beta'} \dots a_\lambda^{\lambda'} \tag{5}$$

formada de n elementos tirados de (4), sendo um, e sòmente um, de cada linha e de cada coluna. Nestas condições a sucessão $\alpha'\ \beta' \dots \lambda'$ dos índices superiores de (5) é uma permutação dos números

(*) O estabelecimento de uma denominação comum para linha ou coluna muito difundido entre os autores italianos, simplifica, como veremos, os enunciados dos teoremas sôbre determinantes.

1, 2, ... n; o mesmo diremos para a sucessão $\alpha\beta \dots \lambda$ dos índices inferiores.

Atribuamos à permutação (5) o sinal + ou o sinal − segundo as permutações

$$\alpha'\, \beta' \dots \lambda' \tag{6}$$

e

$$\alpha\, \beta \dots \lambda \tag{7}$$

sejam ou não *de mesma classe* (**n.º** 2).

É evidente, então, que uma troca de dois elementos quaisquer de (5) não altera o seu sinal, porque acarreta simultâneamente a mudança de paridade de cada uma das permutações (6) e (7) (**n.º** 3). Ora, da regra dada acima para o sinal de (5), concluímos que esta permutação é *positiva* ou *negativa*, conforme a soma $I + I'$ dos números de inversões de (7) e (6), respectivamente, seja *par* ou *ímpar.* Podemos, então, ordenar os elementos de (5) segundo os seus índices superiores (ou inferiores) o que equivale a anular I' (ou I) e atribuir-lhe o sinal + ou o sinal − conforme o número de inversões I (ou I') de seus índices inferiores (ou superiores) seja par ou ímpar.

6. Determinante. Consideremos, então, a permutação (5) supondo seus elementos ordenados em relação a seus índices superiores e, sendo $\alpha''\ \beta'' \dots \lambda''$ a sucessão de seus índices inferiores, formemos o produto P de seus n elementos

$$P = a_{\alpha''}^1 \,.\, a_{\beta''}^2 \dots a_{\lambda''}^n \tag{8}$$

Podemos, então, atribuir ao produto P o sinal da permutação

$$a_{\alpha''}^1\, a_{\beta''}^2 \dots a_{\lambda''}^n$$

de seus fatôres, porque, como foi visto acima, êste sinal é independente da ordem dos mesmos, o que o torna compatível com a propriedade comutativa da multiplicação. Ora há tantos produtos P quantas são as permutações dos n números 1, 2, ... n, ou sejam, $n!$

Anàlogamente formemos os produtos P', cujos elementos estão ordenados segundo os índices das linhas.

$$P' = a_1^{\alpha'''}\, a_2^{\beta'''} \dots a_3^{\lambda'''} \tag{9}$$

aos quais se aplicam, *mutatis mutandis*, as considerações feitas sôbre P.

Chama-se, então, *determinante da matriz quadrada* (4) à soma algébrica de todos os produtos P ou P', obtidos de acôrdo com a regra indicada. Sendo p'' e p''', respectivamente, os números de inversões das permutações $\alpha'' \beta'' \ldots \lambda''$ e $\alpha''' \beta''' \ldots \lambda'''$, podemos escrever as seguintes expressões simbólicas do determinante

$$\Delta = \Sigma\,(-1)^{p''}\, a^1_{\alpha''}\, a^2_{\beta''} \ldots a_{\lambda''} \qquad (10)$$

$$\Delta = \Sigma\,(-1)^{p'''}\, a_1^{\alpha'''}\, a_2^{\beta'''} \ldots a_n^{\lambda'''} \qquad (11)$$

O número n indica a *ordem* do determinante

7. Determinante de segunda ordem. Consideremos o determinante de 2.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

Segundo a regra anterior, obtemos seu desenvolvimento, considerando o produto $a_1^1\, a_2^2$ e permutando de todos os modos possíveis seus índices superiores ou inferiores. Permutemos, por exemplo, os primeiros. Como só há duas permutações 12 e 21 dos índices, o desenvolvimento terá apenas dois têrmos $a_1^1\, a_2^2$ e $a_1^2\, a_2^1$, respectivamente positivo e negativo, de acôrdo com a regra dada dos sinais. Então,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2 - a_1^2\, a_2^1$$

Conclusão: *O desenvolvimento de um determinante de 2.ª ordem é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.*

8. Exercício. *Calcular o valor do determinante*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

Resolução: De acôrdo com a regra anterior, temos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3\,(-5) = 8 + 15 = 23$$

9. Determinante de terceira ordem. Tomemos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

e formemos o produto

$$a_1^1 \quad a_2^2 \quad a_3^3 \qquad (11a)$$

dos elementos de sua diagonal principal. De acôrdo com a regra dada, efetuadas, por exemplo, tôdas as permutações dos índices superiores de (11*a*), obteremos os têrmos do desenvolvimento de Δ, cujos sinais são dados de acôrdo com a classe destas permutações. Teremos, então, como é fácil verificar,

$$\Delta = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 - a_1^3 a_2^2 a_3^1$$

Na prática, obtém-se ràpidamente êste desenvolvimento pela *regra de Sarrus*: forma-se o quadro ao lado, repetindo-se à direita da terceira coluna as duas primeiras na ordem em que se acham no determinante. Os têrmos positivos do determinante são os produtos dos elementos da diagonal principal e dos elementos situados em linhas paralelas; os têrmos negativos são os produtos dos elementos da diagonal secundária e dos elementos situados em linhas paralelas.

$$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^1 & a_3^2 \end{array}$$

Outra modalidade da *regra de Sarrus* consiste em repetir abaixo da última linha as duas primeiras, na sua ordem, e aplicar aos elementos do quadro obtido a mesma regra.

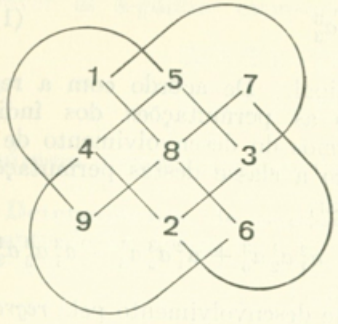
10. Exercício. *Calcular o valor do determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Resolução: Aplicando a regra de Sarrus, obtemos

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 4 & 8 \\ 9 & 2 & 6 & 9 & 2 \end{array}$$

$$\Delta = 1 \times 8 \times 6 + 5 \times 3 \times 9 + 7 \times 4 \times 2 - 9 \times 8 \times 7 - \\ - 2 \times 3 \times 1 - 6 \times 4 \times 5 = -391$$



11. Observação. Com um pouco de prática, entretanto, pode-se obter fàcilmente o desenvolvimento de um determinante de 3.ª ordem, sem necessidade de repetir linhas ou colunas, bastando adotar o esquema ao lado (que pode ser realizado mentalmente).

12. Determinantes de ordem superior à terceira. Vimos que o desenvolvimento de um determinante de ordem n tem $n!$ têrmos. Assim o determinante de quarta ordem tem 24 têrmos, o de quinta ordem 120 têrmos, etc. Para êstes não há uma regra prática (como a regra de *Sarrus*) que permita formar ràpidamente seu desenvolvimento. Veremos, entretanto, mais adiante, no estudo de *determinantes menores*, os recursos que podem ser utilizados para seu cálculo.

13. Propriedades dos determinantes. Veremos adiante, que o cálculo dos determinantes pode ser grandemente simplificado com o auxílio de suas propriedades, que passaremos a estudar.

14. Teorema. Consideremos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1\, a_1^2 \cdots\cdots a_1^n \\ a_2^1\, a_2^2 \cdots\cdots a_2^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^1\, a_n^2 \cdots\cdots a_n^n \end{vmatrix} \tag{12}$$

e formemos o determinante Δ'

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1\, a_2^1 \cdots\cdots a_n^1 \\ a_1^2\, a_2^2 \cdots\cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^n\, a_2^n \cdots\cdots a_n^n \end{vmatrix}$$

cujos elementos de cada coluna são os elementos da linha de mesma ordem de Δ.

Seja

$$T = a_\alpha^1 \cdot a_\beta^2 \cdots a_\lambda^n$$

um têrmo qualquer de Δ, cujo sinal é dado pela permutação $\alpha\beta \ldots \lambda$ dos índices das linhas. Ora, a êste têrmo corresponde um têrmo

$$T' = a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \cdots a_n^\lambda$$

de Δ', constituído dos mesmos elementos de T, e cujo sinal é o mesmo de T.

Assim, os desenvolvimentos de Δ e Δ' são iguais, o que nos permite concluir a propriedade:

Um determinante não se altera quando se trocam suas linhas por suas colunas, respeitada sua ordem.

15. Observação. Do teorema anterior decorre que qualquer propriedade relativa às *linhas* (ou às *colunas*) de um determinante se aplica igualmente às *colunas* (ou às *linhas*). Podemos, então, de agora em diante, adotar a denominação *fila*, para designar indiferentemente uma linha ou uma coluna (**n.º 5**).

16. Teorema. Troquemos no determinante (12) duas filas paralelas, como, por exemplo, duas colunas. Isto acarretará, em cada um dos têrmos do desenvolvimento de Δ, supostos ordenados em relação aos índices das linhas, uma troca de dois elementos na permutação dos índices das colunas, e, portanto, uma troca de sinal, o que traz como conseqüência a troca de sinal do determinante.

CONCLUSÃO: *Trocando-se duas filas paralelas de um determinante, conservada a ordem de seus elementos, êste muda de sinal.*

17. Corolário. Se o determinante tem duas filas paralelas idênticas (*), sua troca deve acarretar a troca de sinal do determinante (**n.º 16**). Mas, se as duas filas são idênticas, permutando-as, o determinante não se altera. Estas duas condições só podem coexistir na hipótese de o determinante ser nulo.

CONCLUSÃO: *O determinante que tem duas filas paralelas idênticas é nulo.*

18. Teorema. Vimos (**n.º 6**) que o determinante é a soma algébrica de todos os produtos formados tirando-se um (e sòmente um) elemento de cada fila. Podemos, então, enunciar a seguinte propriedade:

Cada têrmo do desenvolvimento de um determinante contém um (e sòmente um) elemento de cada fila, ou ainda, *todo determinante é função linear e homogênea dos elementos de uma mesma fila.*

19. Corolários. Do teorema anterior decorrem imediatamente os seguintes corolários:

a) Um determinante que tenha uma fila de elementos nulos é nulo.

b) Multiplicando-se ou dividindo-se os elementos de uma fila por um mesmo número o determinante fica multiplicado ou dividido por êsse número.

(*) Assim denominaremos duas filas constituídas de *mesmos elementos na mesma ordem.*

Sistemas de Equações Lineares

1. Preliminares. Chama-se *forma linear* de n variáveis x_1, x_2, ... x_n uma função linear e homogênea dessas n variáveis. Assim, a expressão

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \tag{1}$$

na qual os coeficientes a_1, a_2, ... a_n são constantes é uma *forma linear* das n variáveis x_1, x_2, ... x_n.

Igualando uma forma linear a uma constante, obtém-se uma equação algébrica do 1.° grau com n variáveis, que se denomina, então, *equação linear*. Assim, sendo a_1, a_2, ... a_n e b constantes, a igualdade

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_n \tag{2}$$

é uma equação linear. No caso particular de $b = 0$ a equação linear diz-se *homogênea*.

Na equação (2), x_1, x_2, ... x_n chamam-se *incógnitas*.

Um conjunto de m equações lineares com n incógnitas constitui o caso mais geral de um sistema de equações lineares. Particularmente apresenta interêsse para o nosso estudo o caso de $m = n$, isto é, de um sistema de n equações lineares com n incógnitas.

Seja

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_1^n\,x_n = b_1 \\ a_2^1x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_2^n\,x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1x_1 + a_n^2x_2 + \ldots + a_n^nx_n = b_n \end{array}\right. \tag{3}$$

um dêstes sistemas.

Sabemos que a solução do sistema (3) — quando existe — pode ser conseguida por um dos processos clássicos de eliminação estudados na Álgebra Elementar. Para $n < 3$, entretanto, a aplicação de um dêsses processos torna-se bastante trabalhosa. Das pesquisas de

Leibniz no sentido de simplificar a resolução de um tal sistema, resultou, como já dissemos (**Cap. 16, n.° 1**), a teoria dos determinantes, cujos elementos expusemos no capítulo anterior. Com o auxílio dêstes estabelece-se uma regra que dá o valor de cada uma das incógnitas. Esta é geralmente conhecida pela denominação de *Regra de* Cramer.

2. Regra de Cramer. Consideremos o sistema (3) e representemos por Δ o determinante dos coeficientes de suas incógnitas

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \tag{4}$$

Designemos por A_1^r, A_2^r, ... A_n^r os complementos algébricos dos elementos da coluna $r \leq n$. Multipliquemos tôda a primeira equação do sistema (3) por A_1^r, tôda a segunda por A_2^r, e assim por diante, até a última que será multiplicada por A_n^r. Somando, a seguir, membro a membro, as n equações, assim obtidas, encontramos

$$\begin{aligned} &(a_1^1A_1^r + a_2^1A_2^r + \ldots + a_n^1A_n^r)x_1 + \\ &+ (a_1^2A_1^r + a_2^2A_2^r + \ldots + a_n^2A_n^r)x_2 + \ldots + \\ &+ (a_1^rA_1^r + a_2^rA_2^r + \ldots + a_n^rA_n^r)x \ + \ldots + \\ &+ (a_1^nA_1^r + a_2^nA_2^r + \ldots + a_n^nA_n^r)x \ = \\ &= \ b_1A_1^r + b_2A_2^r + \ldots + b_nA_n^r \end{aligned} \tag{5}$$

O coeficiente de x_r é, como já sabemos (**Cap. 16, n.° 34**), o próprio determinante Δ; os coeficientes das demais incógnitas são nulos (**Cap. 16, n.° 38**). A equação (5) fica, então, reduzida a

$$\Delta x_r = b_1A_1^r + b_2A_2^r + \ldots + b_nA_n^r \tag{6}$$

Ora, o segundo membro da igualdade (6) é o desenvolvimento, em relação à coluna r, do determinante

$$\Delta(x_r) = \begin{vmatrix} a_1^1 \ldots a_1^{r-1} & b_1 & a_1^{r+1} \ldots a_1^n \\ a_2^1 \ldots a_1^{r-1} & b_2 & a_2^{r+1} \ldots a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 \ldots a_n^{r-n} & b_n & a_n^{r+1} \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

obtido de Δ, substituindo-se os elementos da coluna r pelos têrmos independentes de incógnita $b_1, b_2, \ldots b$ das equações (3). A equação (6) fica

$$\Delta\, x_r = \Delta\,(x_r)$$

Como a demonstração, que acabamos de dar, não faz restrições a r, podemos escrever as seguintes n equações para r sucessivamente igual a 1, 2, ... n:

$$\Delta\, x_1 = \Delta\,(x_1),\ \Delta\, x_2 = \Delta\,(x_2),\ \ldots .\ \Delta\, x_n = \Delta\,(x_n) \qquad (7)$$

Os sistemas (3) e (7) são equivalentes, pois as equações de (7) são combinações lineares das equações de (3).

Se $\Delta \neq 0$, o sistema (7) apresenta a solução única

$$x_1 = \frac{\Delta\,(x_1)}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta\,(x_2)}{\Delta},\ \ldots x = \frac{\Delta\,(x_n)}{\Delta} \qquad (8)$$

que, em virtude do que foi dito, constitui, também, a solução do sistema (3).

Concluímos, pois, a *regra de* CRAMER:

Dado um sistema de n equações lineares com n incógnitas, se o determinante dos coeficientes das incógnitas não é nulo, o sistema tem uma única solução, sendo o valor de cada incógnita uma fração cujo denominador é êste determinante e cujo numerador é o determinante obtido dêste substituindo-se os coeficientes da incógnita considerada pelos têrmos independentes de incógnita das equações correspondentes.

3. Exercício. *Calcular a solução do sistema*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 12 \\ x - 2y - u = -1 \\ y + z + u = 5 \\ x + 2z = 8 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO: Calculando o determinante dos coeficientes obtemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Sendo, portanto, $\Delta \neq 0$, o sistema tem uma única solução, que iremos calcular. Para isso calculemos, de acôrdo com a regra dada, os quatro

determinantes que designaremos por $\Delta_{(x)}$, $\Delta_{(y)}$, $\Delta_{(z)}$ e $\Delta_{(u)}$ e que não são os numeradores das frações que dão respectivamente os valôres de x, y, z, u. Obtemos, então,

$$\Delta_{(x)} = \begin{vmatrix} 12 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 \;\therefore\; x = \frac{\Delta_{(x)}}{\Delta} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\Delta_{(y)} = \begin{vmatrix} 2 & 12 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 16 \;\therefore\; y = \frac{\Delta_{(y)}}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\Delta_{(z)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 16 \;\therefore\; z = \frac{\Delta_{(z)}}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\Delta_{(u)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 12 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 \;\therefore\; u = \frac{\Delta_{(u)}}{\Delta} = \frac{8}{8} = 1$$

4. Exercício. *Calcular a solução do sistema*

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + bz = q \\ cy + az = r \end{cases}$$

RESOLUÇÃO: Calculemos o determinante dos coeficiente das incógnitas

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = -\,2abc$$

Supondo a, b, c não nulos, teremos

$$\Delta_{(x)} = \begin{vmatrix} p & b & 0 \\ q & 0 & b \\ r & c & a \end{vmatrix} = b(br - cp - aq)$$

$$x = \frac{\Delta_{(x)}}{\Delta} = \frac{b(br - cp - aq)}{-2abc} = \frac{aq + cp - br}{2ac}$$

$$\Delta_{(y)} = \begin{vmatrix} a & p & 0 \\ c & q & b \\ 0 & r & a \end{vmatrix} = a(aq - br - cp)$$

$$y = \frac{\Delta_{(y)}}{\Delta} = \frac{a(aq - br - cp)}{-2abc} = \frac{br + cp - aq}{2bc}$$

$$\Delta_{(z)} = \begin{vmatrix} a & b & p \\ c & 0 & q \\ 0 & c & r \end{vmatrix} = c(cp - aq - br)$$

$$z = \frac{\Delta_{(z)}}{\Delta} = \frac{c(cp - aq - br)}{-2abc} = \frac{aq + br - cp}{2ab}$$

5. Discussão de um sistema de m equações lineares com n incógnitas. Consideremos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_1^px_p + \ldots + a_1^nx_n = b_1 \\ a_2^1x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_2^px_p + \ldots + a_2^nx_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1x_1 + a_p^2x_2 + \ldots + a_p^px_p + \ldots + a_p^nx_n = b_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m^1x_1 + a_m^2x_2 + \ldots + a_m^px_p + \ldots + a_m^nx_n = b_m \end{array} \right. \tag{9}$$

e formemos a matriz dos coeficientes das incógnitas

$$\Delta = \left\| \begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^p & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^p & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^p & \ldots & a_p^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m^1 & a_m^2 & \ldots & a_m^p & \ldots & a_m^n \end{array} \right\| \tag{10}$$

Admitamos que seja p a ordem do determinante não nulo de maior ordem tirado da matriz (10); evidentemente p será, no máximo, igual ao menor dos números m ou n. Havendo um só determinante de ordem p nessas condições, diz-se que êle é o *determinante principal*

da matriz (10) ou do sistema (9); havendo mais de um determinante nessas condições, toma-se um dêles arbitràriamente para *determinante principal*. Diz-se, então, que p é a *característica* da matriz (10). Como podemos, sem qualquer restrição, alterar a ordem das m equações e a ordem das n incógnitas em cada uma delas, podemos supor que o determinante

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^p \end{vmatrix} \tag{11}$$

formado pelos coeficientes das p primeiras incógnitas nas p primeiras equações, é diferente de zero, tomando-o para *determinante* principal do sistema (9).

Assim sendo, consideremos o sistema formado pelas p primeiras equações do sistema (9)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^1x_1 + \ldots + a_1^px_p + \ldots + a_1^nx_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1x_1 + \ldots + a_p^px_p + \ldots + a_p^nx_n = b_p \end{array} \right. \tag{12}$$

e pelas $m - p$ equações da forma

$$\begin{vmatrix} a_1^1 \ldots a_1^p & a_1^1x_1 + \ldots + a_1^nx_n - b_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1 \ldots a_p^p & a_p^1x_1 + \ldots + a_p^nx_n - b_p \\ a_i^1 \ldots a_i^p & a_i^1x_1 + \ldots + a_i^nx_1 - b_i \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

obtidas fazendo-se i sucessivamente igual a $p + 1,\ p + 2,\ \ldots\ m$. O sistema formado pelas equações (12) e (13) é equivalente ao sistem a (9).

Realmente tôda solução dêste satisfaz as equações (12), que a ela pertencem e satisfaz as equações (13) porque anula a última coluna dos determinantes destas. Recìprocamente, tôda solução do segundo satisfaz o primeiro. De fato, tôda solução do segundo sistema satisfaz as p primeiras equações do sistema (9), por serem estas comuns a ambos. Demonstremos, então, que satisfaz, ainda, as $m - p$ equações restantes de (9). Tôda solução do segundo sistema, verificando as p equações (12), anula os p primeiros elementos dá última coluna dos determinantes das equações (13), que se reduzem, então, a

$$\Delta_p\,(a_i^1x_1 + \ldots + a_i^nx_n - b_i) = 0$$

Ora, sendo, por hipótese, $\Delta \neq 0$, verificar-se-ão as igualdades

$$a_i^1 x_1 + \ldots + a_i^n x_n - b_i = 0$$

para $i = p + 1,\ p + 2,\ \ldots m$, isto é, serão satisfeitas as $m - p$ equações restantes, como queríamos demonstrar.

Pôsto isto, desenvolvamos os determinantes das equações (13), de acôrdo com uma propriedade conhecida (**Cap. 6, n.° 24**), em somas de $n + 1$ determinantes, substituindo os elementos da última coluna sucessivamente pelos têrmos em x_1, em x_2, etc., em x_p e pelos têrmos independentes de incógnita. Pondo em evidência as incógnitas x_1, x_2, $\ldots$ x_n nos determinantes assim obtidos, verificamos que os coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_p$ são determinantes nulos por terem duas colunas iguais e os coeficientes das incógnitas $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n$ são também nulos por serem determinantes de ordem $p + 1$ tirados da matriz (10). As equações (13) se reduzem, então, a

$$- \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^p & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^1 & \ldots & a_p^p & b_p \\ a_i^1 & \ldots & a_i^p & b_i \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = p + 1\ , p + 2,\ \ldots m) \tag{14}$$

Os $m - p$ determinantes do primeiro membro das igualdades (14), que se obtêm, calculando o *determinante principal*, abaixo, com os elementos correspondentes das $m - p$ linhas de Δ que dêle não fazem parte, e à direita, com os têrmos independentes de incógnitas correspondentes das equações (9), chamam-se *determinantes característicos* ou *determinantes associados* do sistema.

Se um, pelo menos, dêsses $m - p$ determinantes característicos não fôr nulo, uma, pelo menos, das equações (14) não será satisfeita e o sistema *não terá solução* (*). Se todos os determinantes característicos forem nulos, o sistema ficará reduzido às p equações (12). Se, então, p fôr igual a n, o sistema (12) terá uma única solução dada pela regra de Cramer (**n.° 2**). Se p fôr inferior a n, o sistema será *indeterminado*, isto é, terá *uma infinidade de soluções*, podendo-se atribuir valôres arbitrários às $n - p$ incógnitas $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n$, e resolver o sistema em relação às p incógnitas $x_1, x_2, \ldots x_p$, visto ser o determinante de seus coeficientes o próprio determinante principal e, portanto, não ser nulo.

Podemos, então, enunciar o *Teorema de Rouché*:

Dado um sistema de m equações lineares com n incógnitas, sendo p a ordem de seu determinante principal:

(*) Diz-se, também, que o sistema é *impossível* ou que as equações são *incompatíveis*.

a) se um, pelo menos, dos determinantes característicos não fôr nulo, o sistema não terá solução;

b) se todos os determinantes característicos forem nulos, o sistema terá uma solução se $p = n$ e uma infinidade de soluções se $p < n$, caracterizando-se essa indeterminação por $n - p$ incógnitas arbitrárias.

No caso particular de $m = n$, o teorema pode ser assim apresentado: *Dado um sistema de n equações lineares com n incógnitas, se o determinante Δ de seus coeficientes não fôr nulo, o sistema será determinado, apresentando uma única solução. Se Δ fôr nulo, o sistema não terá solução se um pelo menos dos determinantes característicos não fôr nulo, e terá uma infinidade de soluções se todos os determinantes característicos forem nulos; sendo p a característica de Δ, a indeterminação caracterizar-se-á por $n - p$ incógnitas arbitrárias.*

6. Observação. Êste teorema foi apresentado, pela primeira vez, por Eugène Rouché numa nota publicada nos *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (29 de novembro de 1875), e, com maior desenvolvimento, pelo mesmo autor no *Journal de l'École Polytechnique* (Cad. XLVII, 1880) sob o título *Note sur les équations linéaires*(*)

Simultâneamente, G. Fontené apresentou-o em artigo publicado em dezembro de 1875 nos *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Em nota intitulada *Reclamação a propósito do teorema denominado de* Rouché, aparecida nesse periódico (T. XIX, 1900, p. 184), Fontené reclama para si a glória da descoberta do teorema, alegando que seu artigo foi entregue em setembro de 1875, enquanto o de Rouché foi apresentado à Academia em novembro do mesmo ano. Sugere, como proposta conciliatória, a denominação *Teorema de* Fontené e Rouché, já usada por Laurent em seu *Traité d'Algèbre* (1879). Em 1877, o matemático alemão Frobenius estabeleceu-o completamente, com tôdas as suas conseqüências(**), devendo-se a êle a noção de *característica* de uma matriz (***).

Independentemente de ambos, A. Capelli, em 1892, apresentou-o sob uma forma diferente, a qual alguns autores italianos denominam *Teorema de* Rouché-Capelli (****). Seu enunciado é o seguinte:

A condição necessária é suficiente para que um sistema de m equações lineares com n incógnitas tenha solução, é que a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas e a matriz formada por êstes coeficientes e os têrmos conhecidos, tenham a mesma característica.

(*) Cfr. Charles de Comberousse, *Cours d'Algèbre Supérieure*, 1.ª parte, Paris, Gauthier-Vilars, 1904, 3.ª ed., pág. 69.

(**) Cfr. Salvatore Pincherle, *Lezioni di Algebra Complementare*, Parte Seconda: *Teoria delle Equazioni*, Bologna, N. Zanichelli, 3.ª ed., pág. 93.

(***) Cfr. Francisco Severi, op, cit., pág. 52.

(****) Cfr. Francesco Severi, op. cit., pág. 59; Giuseppe Vitali, *Lezioni di Analisi Algebrica ed Infinitesimale*, Pádua, C.E.D.A.M., pág. 113: Francesco Tricomi, *Lezioni di Analisi Matematica*, Pádua, C.E.D.A.M., 1935, 3.ª ed., 1.° vol., pág. 54; etc.

7. Exercício. *Discutir o sistema*

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 10 \\ 3x - 7y = 6 \\ 5x + z = 12 \end{cases}$$

DISCUSSÃO: Calculemos o determinante Δ dos coeficientes das incógnitas

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 76$$

Sendo, então, $\Delta \neq 0$, concluímos que o sistema é *determinado*, isto é, admite *uma única solução.*

8. Exercício. *Discutir o sistema*

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 8 \\ 5x + y + 4z = 12 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

DISCUSSÃO: Calculemos o determinante Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sendo $\Delta = 0$, tomemos para *principal* o determinante não nulo

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

formado pelos coeficientes de x e de y nas duas primeiras equações. Haverá, então, de acôrdo com o *Teorema de* ROUCHÉ, um único determinante característico, a saber, o determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 1 & 12 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 84$$

Sendo $\Delta_1 \neq 0$, o sistema dado *não tem solução.*

9. Exercício. *Discutir o sistema*

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 9 \\ 6x + 7z = 13 \\ 4x + 2y + az = b \end{cases}$$

segundo os valôres que se podem atribuir a a e a b.

DISCUSSÃO: Calculemos o determinante dos coeficientes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} = 24\,(5 - a)$$

a) Para qualquer valor de a diferente de 5, será $\Delta \neq 0$, e o sistema terá uma *única solução.*

b) Façamos, agora, $a = 5$. Resultará $\Delta = 0$. Tomemos para principal o determinante

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

e calculemos o único característico

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 6 & 0 & 13 \\ 4 & 2 & b \end{vmatrix} = 24\,(11 - b)$$

Para qualquer valor de b diferente de 11, teremos $\Delta_1 \neq 0$, e o sistema *não terá solução.* Para $b = 11$, resultará $\Delta_1 = 0$ e o sistema será *indeterminado,* podendo-se atribuir valôres arbitrários a z (incógnita da qual nenhum coeficiente figura no determinante principal) e resolver em relação a x e a y o sistema formado pelas duas primeiras equações.

Resumo da discussão:

$$\begin{cases} a \neq 5: & \textit{Uma solução} \\ a = 5 & \begin{cases} b \neq 11: & \textit{não há solução} \\ b = 11: & \textit{uma infinidade de soluções (indeterminado, com uma incógnita arbitrária)} \end{cases} \end{cases}$$

10. Exercício. *Discutir o sistema*

$$\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = b^2 \end{cases}$$

segundo os valôres que se podem atribuir a a e b.

RESOLUÇÃO: Calculemos o determinante dos coeficientes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = (a + 1)\,(a - 1)$$

CURRICULUM

Publicação trimestral da Fundação Getúlio Vargas, iniciada em 1962 sob a responsabilidade do Colégio Nova Friburgo, dedica-se a questões relativas ao ensino médio, incluindo em suas páginas trabalhos sôbre didática, auxílios audiovisuais, práticas educativas e demais assuntos que se relacionem com o problema da educação. Dirigida por Irene Estevão de Oliveira, CURRICULUM tem como principais colaboradores os professôres Amaury Pereira Muniz, Jayder Teixeira, Adolfo Riedel Ratisbona, Antônio Savino Filho, Jorge José Abib, Maria Zely de Souza Muniz, Salomão Santana Daniel e Mário Di Lucia Castillo.