$(x^2 - 6x + 9)$ no estado 12.

THALES MELLO CARVALHO

Catedrático de Metodologia do Cálculo do Instituto de Educação. Livre Docente de Matemática Financeira da Faculdade Nacional de Ciências Econômicas. Professor de Matemática Geral e Financeira do Curso de Aperfeiçoamento da Caixa Econômica do Rio de Janeiro e do Curso de Extensão do Instituto de Resseguros do Brasil.

$9 = 6x$ 3

$2x \therefore 9 = \frac{6x}{2x}$

MATEMÁTICA

TERCEIRA SÉRIE

De acôdo com os programas dos Cursos

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

✦

2.ª EDIÇÃO

Livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Saúde. Registro n.º 562.

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

SÃO PAULO

1 9 4 8

Obra executada nas oficinas da São Paulo Editora S|A.
São Paulo, Brasil.

PROGRAMAS DE MATEMÁTICA

Dos Cursos CLÁSSICO E CIENTÍFICO (*)

Terceira Série

ÁLGEBRA

Unidade I. — Séries: 1. *Sucessões.* 2. *Cálculo aritmético dos limites.* 3. *Séries numéricas.* 4. *Principais caracteres de convergência.*

Unidade II. — Funções: 1. Função de uma variável real. 2. Representação cartesiana. 3. Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidade de uma função racional.

Unidade III. — Derivadas: 1. Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Unidade IV. — Números complexos: 1. *Definição; operações fundamentais.* 2. *Representação trigonométrica e exponencial.* 3. *Aplicação à resolução das equações binômias.*

Unidade V. — Equações algébricas: 1. *Propriedades gerais dos polinômios.* 2. *Relações entre os coeficientes e as raizes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações.* 3. *Noções sôbre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raizes iguais.*

GEOMETRIA

Unidade VI. — Relações métricas: 1. *Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis no triângulo.* 2. *Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco.* 3. *Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais.*

Unidade VII. — Transformação de figuras: 1. *Deslocamentos, translação, rotação, simetria.* 2. *Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de três dimensões.* 3. *Inversão pelos raios vetores recíprocos.*

Unidade VIII. — Curvas usuais: 1. Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As secções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

GEOMETRIA ANALÍTICA

Unidade IX. — Noções fundamentais: 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abcissa sôbre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância entre dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade X. — Lugares geométricos: 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

(*) Os assuntos em *itálico* não fazem parte do programa do Curso Clássico.

Ao professor compete fazer do livro um organismo plástico e vivo; a êle compete escolher o que se pode fazer e o que se pode deixar, o que se pode antepor ou pospor segundo as condições peculiares dos alunos. O que importa muito mais é a aptidão para pensar do que o acúmulo de conhecimentos específicos que haja conseguido fazê-los aprender.

F. SEVERI

CAPÍTULO I

Álgebra

Unidade I: SÉRIES

Curso Científico: 1. Sucessões. 2. Cálculo aritmético dos limites. 3. Séries numéricas. 4. Principais caracteres de convergência.

NOÇÕES ELEMENTARES SÔBRE CONJUNTOS

1. Conjuntos finitos e conjuntos infinitos. Admitiremos como conhecidas as noções sôbre *conjuntos, correspondência bi-unívoca* e *conjuntos equivalentes*, dadas no primeiro volume desta série (*).

Dados, então, dois conjuntos C e C', se todos os elementos de C' pertencem a C, diz-se que C' é um *subconjunto* de C. Se, além disso, não se verifica a condição recíproca (isto é, se nem todo elemento de C pertence a C'), diz-se que C' é um *subconjunto próprio* (ou *verdadeiro*) ou uma *parte própria* de C. Por exemplo, *o conjunto dos números primos de* 1 a 97 é uma parte própria do *conjunto dos números inteiros de* 1 *a* 100. Dessa definição resulta que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo.

Diz-se que um conjunto é *finito* se existe um inteiro n tal que o conjunto seja equivalente ao conjunto dos números $1, 2, 3, \ldots n$. Em particular, se $n = 0$, diz-se que o conjunto é *vasio.*

Diz-se que um conjunto é *infinito* se não é finito.

Dado um *conjunto finito* C do qual C' é um *subconjunto próprio*, não é possível estabelecer uma correspondência bi-unívoca entre os elementos de C e os de C'. C e C' têm, assim, números cardinais diferentes. Por exemplo, não é

(*) 4.ª edição, pág. 9 e seguintes.

possível estabelecer uma correspondência perfeita entre o conjunto dos números inteiros de 1 a 100 e o conjunto dos números pares de 2 a 100.

Entretanto, se C é um *conjunto infinito*, é possível em muitos casos estabelecer esta correspondência. Por exemplo, a cada número n do conjunto dos números inteiros

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n,\ \ldots. \qquad (1)$$

se pode fazer corresponder um único número $2n$ do conjunto dos números pares

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots.\ 2n,\ \ldots. \qquad (2)$$

que é uma parte própria do primeiro.

Esta notável propriedade, descoberta por BOLZANO (*) permite definir um *conjunto infinito:* aquêle que pode ser posto em correspondência biunívoca com um conjunto que dêle seja parte própria (**).

2. Possança de um conjunto. Da proposição de BOLZANO resulta a extensão aos conjuntos infinitos da noção de número cardinal estabelecida para os conjuntos finitos (***).

Quando dois conjuntos infinitos são equivalentes, isto é, quando entre seus elementos se pode estabelecer uma correspondência biunívoca, diz-se que êles têm o mesmo *número cardinal transfinito* ou a mesma *possança.*

Assim, os conjuntos (1) e (2) têm a mesma possança.

Pode parecer, à primeira vista, que todos os *conjuntos infinitos* tenham a mesma possança. Tal não acontece, entretanto, como veremos a seguir.

3. Conjuntos numeráveis. Diz-se que um conjunto é *numerável* quando tem a mesma possança do conjunto dos números inteiros e positivos. Por exemplo, o conjunto dos números pares é numerável, pois, conforme vimos (**n.° 1**), pode ser posto em correspondência perfeita com aquêle conjunto.

(*) BERNARDO BOLZANO (1781-1848).

(**) *"On peut remarquer que la propriété d'avoir même puissance que certaines de leurs parties aliquotes "caractérise" les ensembles infinis: cette propriété a pu être proposé comme définition de ces ensembles, par opposition aux ensembles finis"*. (EMILE BOREL, *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, 3.ª ed., pág. 7).

(***) Vol. I, Cap. I, n.° 2.

CANTOR demonstrou que são numeráveis o *conjunto dos números racionais* e o dos *números algébricos* e que o *conjunto dos números reais* não é numerável.

4. Conjuntos lineares. Tomemos sôbre uma reta orientada um ponto O (fig. 1) e um segmento OA, arbitràriamente tomado para unidade.

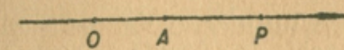

Fig. 1

Pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos desta reta e o conjunto dos números reais: a cada ponto P da reta corresponde um número real (positivo ou negativo), a saber, a medida algébrica do segmento OP tomado OA para unidade, ou seja a *abcissa* dêste ponto. Recìprocamente a cada número real (positivo ou negativo) corresponde um ponto P da reta de abcissa igual a êste número real. O conjunto dos números reais tem, então, a mesma possança do conjunto dos pontos de uma reta.

Dêste modo, podemos usar indistintamente as expressões *número real* e *ponto* (de uma reta).

O conjunto dos números reais e qualquer um de seus sub-conjuntos (tais como conjunto dos números racionais, conjunto dos números inteiros, etc.) denominam-se *conjuntos lineares.*

5. Conjuntos limitados. Diz-se que um conjunto *linear é limitado superiormente* (ou *limitado à direita*) se todos os seus elementos são inferiores a um número finito L, e *é limitado inferiormente* (ou *limitado à esquerda*) se todos os seus elementos são superiores a um número finito l. Os números L e l denominam-se respectivamente *cota superior* e *cota inferior* do conjunto.

Por exemplo, o conjunto $1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n,\ \ldots.$ é *limitado à esquerda* e o conjunto $\ldots.\ -2n,\ \ldots.\ -6,\ -4,\ -2$ é *limitado à direita.*

Diz-se que um conjunto linear é *limitado* se é limitado à esquerda e à direita. Por exemplo, o conjunto dos números ímpares de 1 a 99 é um *conjunto limitado.*

6. Entôrno e vizinhança de um ponto. Sendo a um ponto (ou um elemento) de um conjunto linear, chama-se *entôrno* de a ao conjunto de todos os pontos x tais que

$$a - \lambda \leqq x \leqq a + \lambda$$

sendo λ um número positivo.

Vizinhança de um ponto a é o conjunto obtido excluindo-se do entôrno o ponto a. (*)

7. Ponto de acumulação de um conjunto. Diz-se que um ponto a é *ponto de acumulação* ou *ponto limite* de um conjunto linear se em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um ponto do conjunto. Isto equivale a dizer que qualquer vizinhança de a contém uma infinidade de pontos do conjunto. Um ponto de acumulação de um conjunto pode não pertencer a êsse conjunto. Por exemplo, o conjunto

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \ldots . \ \frac{1}{n}, \ \ldots . \qquad (3)$$

admite o ponto de acumulação *zero* que não pertence ao conjunto.

Todo ponto de um conjunto que não é ponto de acumulação chama-se *ponto isolado.*

8. Teorema de Bolzano-Weierstrass (**). A existência de pontos de acumulação nos conjuntos lineares é estabelecida pelo seguinte teorema, conhecido por teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS:

Todo conjunto (linear) infinito e limitado tem pelo menos um ponto de acumulação.

Por exemplo, o conjunto infinito e limitado (3) tem, como vimos, o ponto de acumulação *zero.*

O teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS pode ser extendido aos conjuntos não limitados, como veremos a seguir.

Marquemos sôbre uma reta r, a partir de uma origem A (fig. 5), os pontos do conjunto não limitado

$$1, \ 2, \ 3, \ \ldots . \ n, \ \ldots . \qquad (4)$$

Considerando a parte de r à direita de qualquer segmento AA'' como um *entôrno* do *ponto impróprio* (ponto do infinito),

(*) As denominações *entôrno* e *vizinhança* são devidas ao eminente matemático brasileiro PROF. LELIO GAMA (Cfr. *Contribuição à Teoria dos Limites*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, Tomo IX, n.º 3, 30 de Setembro de 1937, pág. 122).

(**) CARL WEIERSTRASS, matemático alemão (1815-1897).

em virtude do que foi dado, podemos dizer que êste ponto (impróprio) é um ponto de acumulação do conjunto (4). Se fizermos uma correspondência perfeita entre os pontos de (4) marcados sôbre r e os pontos do conjunto.

$$1', \ 2', \ 3', \ \ldots . \ n', \ \ldots . \qquad (5)$$

marcados sôbre AA' (tal como indica a fig. 2) veremos que o ponto (impróprio) de acumulação de (4) corresponde ao ponto (próprio) A' de acumulação de (5).

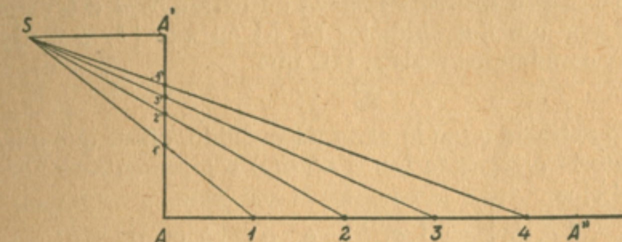

Fig. 2

Dêste modo, o teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS pode ter o seguinte enunciado mais geral:

Todo conjunto (linear) infinito tem pelo menos um ponto de acumulação (próprio)ou impróprio).

9. Extremos superior e inferior de um conjunto. Dado um conjunto linear infinito, limitado à direita, chama-se *extremo superior* dêsse conjunto a um número E tal que:

1) *à direita de E não há pontos do conjunto;*
2) *qualquer entôrno à esquerda de E contém, pelo menos, um ponto do conjunto.*

Anàlogamente se define o *extremo inferior* e de um conjunto.

Obsérvemos que E (ou e) pode ser um *ponto isolado* do conjunto, pois qualquer entôrno de E (ou de e) conterá um ponto do conjunto, a saber o próprio ponto E (ou e). Nêste caso, então, o *extremo superior* ou *inferior* é necessàriamente um ponto do conjunto. Por exemplo, o conjunto

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \ldots . \ \frac{1}{n}, \ \ldots . \qquad (6)$$

tem o extremo superior 1 que é ponto isolado do conjunto.

Se o extremo superior (ou inferior) E (ou e) é um ponto de acumulação do conjunto, pode não pertencer a êste. Por exemplo, o extremo inferior do conjunto (6) é o ponto de acumulação *zero* que não pertence ao conjunto.

Admitiremos, sem demonstração, a seguinte proposição:

Todo conjunto linear, limitado à direita (ou à esquerda), admite um extremo superior (ou inferior).

10. Intervalo. Dados dois números reais a e b, sendo $a < b$, chama-se *intervalo fechado* de extremos a e b e representa-se por um dos símbolos $[a, b]$ ou $a \,|\!\!-\!\!|\, b$, o conjunto de todos os números reais x tais que

$$a \leq x \leq b$$

Se o extremo a (ou b) não está incluido, diz-se que o intervalo é *aberto à esquerda* (ou *à direita*) e representa-se por um dos símbolos

$$(a, b] \text{ ou } [a, b) \quad \text{e} \quad a \,-\!\!|\, b \text{ ou } a \,|\!\!-\, b$$

Se os extremos a e b não estão incluidos, o intervalo diz-se *aberto* e representa-se por (a, b) ou $a - b$.

Por exemplo o conjunto dos números reais não inferiores a 2 e não superiores a 3 é o intervalo fechado $[2, 3]$, porque contém os extremos 2 e 3; o conjunto dos números reais positivos inferiores a 2 é o intervalo aberto $(0, 2)$, porque não contém os extremos 0 e 2; o conjunto dos números reais negativos não inferiores a -1 é o intervalo $[-1, 0)$ aberto à direita, visto não conter o extremo superior 0, etc.

SUCESSÕES. LIMITES

11. Preliminares. Denomina-se *sucessão indefinida* ou simplesmente *sucessão* a todo conjunto de números reais (*) que pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números inteiros 1, 2, 3, ... n, ... Dêsse modo, uma sucessão constitui um conjunto numerável (n.º 3) e pode ser representada por

$$u_1, \; u_2, \; \ldots . \; u_n, \; \ldots . \qquad (1)$$

onde u_i representa o têrmo de ordem i da sucessão.

(*) Êste estudo acha-se, naturalmente, limitado ao campo real. O leitor só conhecerá os números complexos na Unidade IV.

Uma sucessão fica determinada quando se estabelece uma condição necessária e suficiente que permita estabelecer se um dado número real pertence ou não a ela. São, por exemplo, sucessões determinadas a sucessão dos números ímpares, a sucessão dos números primos, etc.

Para algumas sucessões determinadas é possível estabelecer uma fórmula geral que permita calcular o têrmo de uma ordem n qualquer dessa sucessão. Esta fórmula denomina-se *têrmo geral* da sucessão. Por exemplo, as sucessões

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots . \qquad (2)$$

$$1, \; -4, \; 9, \; -16, \; \ldots . \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \ldots . \qquad (4)$$

têm para têrmo geral, respectivamente, $2n-1$, $(-1)^{n+1}n^2$ e $\frac{n}{n+1}$.

Conhecido o têrmo geral u_n de uma sucessão, pode-se representá-la pelo símbolo (u_n).

12. Limite de uma sucessão. Diz-se que uma sucessão (u_n) é *limitada* se o conjunto constituido por seus elementos é limitado (n.º 5), ou, em outras palavras, se existe um número positivo L tal que, qualquer que seja n, se tenha $|u_n| < L$. Não se verificando esta condição, a sucessão (u_n) denomina-se *ilimitada*. Por exemplo, a sucessão (4) é limitada e as sucessões (2) e (3) são ilimitadas; o conjunto dos elementos da sucessão (2) é limitado à esquerda e o conjunto dos elementos da sucessão (3) é ilimitado tanto à esquerda como à direita.

I. Diz-se que uma sucessão limitada (u_n) tem para limite um número (finito) L se, dado um número ε arbitràriamente pequeno, existe um inteiro n' tal que, qualquer que seja $n > n'$, se tenha $|u_n - L| < \varepsilon$.

Por exemplo, a sucessão (4) tem para limite 1, porque a diferença $1 - \frac{n}{n+1}$, ou seja $\frac{1}{n+1}$, para n suficientemente grande, se pode tornar menor do que qualquer quantidade positiva arbitràriamente pequena. Para que esta diferença seja, por exemplo, inferior a 0,000 001, basta tomar $n = 1000000$.

As sucessões que têm limite finito denominam-se *convergentes*.

Observemos que os têrmos de uma sucessão convergente podem, pelo menos a partir de uma certa ordem, ser inferiores ou superiores ao limite desta, ou, ainda, podem oscilar em tôrno dêste. Por exemplo, os têrmos da sucessão (4) são inferiores ao limite 1 da mesma; os têrmos da sucessão

$$\frac{2}{1}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{4}{3}, \ \ldots . \ \frac{n+1}{n}, \ \ldots .$$

são superiores ao limite 1 da mesma e os têrmos da sucessão

$$1, \ \frac{5}{2}, \ \frac{5}{3}, \ \frac{9}{4}, \ \ldots . \ 2+\frac{(-1)^n}{n}, \ \ldots .$$

são alternadamente inferiores e superiores ao limite 2 desta.

Os têrmos de uma sucessão limitada podem não convergir para um determinado limite. Nêsse caso, a sucessão denomina-se *oscilante* ou *indeterminada*. Por exemplo, a sucessão ($\cos n\pi$), ou seja, para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots .$

$$-1, \ 1, \ -1, \ 1, \ \ldots .$$

é oscilante. Igualmente, uma sucessão a_1, b_1, a_2, b_2, ... cujos têrmos são alternadamente os têrmos das sucessões convergentes a_1, a_2, ... e b_1, b_2, ... cujos limites são distintos, é oscilante.

II. Consideremos uma sucessão não limitada (u_n). Podemos distinguir três casos, que passaremos a analisar.

1) A partir de uma certa ordem n ($n \geqq 1$), os têrmos u_n são positivos e dado um número positivo N, arbitràriamente grande, existe um inteiro n' tal que, para $n > n'$ se tenha $u_n > N$. Diz-se, então, que o limite dessa sucessão é *mais infinito* e escreve-se $\lim u_n = +\infty$.

Tal acontece, por exemplo, com a sucessão

$$1!, \ 2!, \ 3!, \ \ldots . \ n!, \ \ldots .$$

2) A partir de uma certa ordem n ($n \geqq 1$), os têrmos u_n são negativos e dado um número positivo N, arbitràriamente grande, existe um inteiro n' tal que, para $n > n'$ se tenha $u_n < -N$. Diz-se, então, que o limite dessa sucessão é *menos infinito* e escreve-se $\lim u_n = -\infty$. Um exemplo dêsse tipo é a sucessão $-1, -4, -9, \ldots . -n^2, \ldots .$

As sucessões dos tipos 1 e 2, acima descritos, denominam-se *divergentes.*

3) Qualquer que seja uma ordem n', arbitràriamente escolhida, os têrmos u_n para $n > n'$ não são do mesmo sinal, mas, dado um número positivo N, arbitràriamente grande, existe um inteiro n'' tal que, para $n > n''$, se tenha $|u_n| > N$. Diz-se, então, que as sucessões dêsse tipo são *imprópriamente divergentes* ou *oscilantes-divergentes.* Tal acontece, por exemplo, com a sucessão

$$-1, \ +4, \ -9, \ +16, \ \ldots . \ (-1)^n n^2$$

13. Unicidade do limite. Seja (u_n) uma sucessão cujo limite é U. Demonstremos que êsse limite é único. De fato, admitamos que (u_n) tivesse outro limite U' diferente de U. Então, dado $\varepsilon = \dfrac{|U-U'|}{2}$, existiria um inteiro n' tal que, para $n > n'$ se tivesse simultâneamente

$$|U_n - U| < \frac{|U-U'|}{2} \text{ e } |u_n - U'| < \frac{|U-U'|}{2}$$

Como, todavia,

$$|U-U'| = |(u_n-U') - (u_n-U)| \leqq |u_n-U'| + |u_n-U|$$

em virtude das desigualdades anteriores, chegariamos ao resultado absurdo $|U-U'| < |U-U'|$.

14. Sucessões monótonas. Diz-se que uma sucessão (u_n) é *monótona não decrescente* se, qualquer que seja n, se tem $u_n \leqq u_{n+1}$. Um exemplo dêsse tipo é a sucessão

$$\frac{1}{2}, \ \frac{5}{2}, \ \frac{5}{2}, \ \frac{9}{2}, \ \frac{9}{2}, \ \ldots . \ n+\frac{(-1)^n}{2}, \ \ldots .$$

Diz-se que uma sucessão é *monótona não crescente* se, qualquer que seja n, se tem $u_n \geqq u_{n+1}$.

Dessas definições se conclui que entre as primeiras estão incluidas as sucessões *crescentes*, isto é, aquelas para as quais, quaisquer que seja n, se tem $u_n < u_{n+1}$ e entre as segundas estão incluidas as sucessões *decrescentes*, isto é, aquelas para as quais se tem $u_n > u_{n+1}$ qualquer que seja n.

15. Princípios fundamentais sôbre sucessões.

I. *Toda sucessão monótona não decrescente, cujos têrmos são inferiores a um número finito A, converge para um limite A' igual ou inferior a A.*

Seja (u_n) uma sucessão nas condições do enunciado. Como, por hipótese, seus elementos constituem um conjunto limitado superiormente, êsse conjunto admite um extremo superior A' (n.° 9) que é um ponto de acumulação. Então, dado um número positivo e arbitrário ε, existe um inteiro n' tal que $A' - \varepsilon < u_n < A'$. Como a sucessão é monótona não decrescente, daí decorre que, qualquer que seja $n > n'$, se tem $A' - \varepsilon < u_n < A'$. Logo A' é limite da sucessão (u_n).

Por outro lado, A' não pode ser superior a A, pois, se assim fôsse, para todo número ε inferior a $A' - A$, não seria verificada a condição anterior.

II. *Toda sucessão monótona não crescente, cujos têrmos são superiores a um número finito A, converge para um limite A', igual ou superior a A.*

A demonstração é idêntica à do princípio anterior.

Observemos que êsse dois princípios permitem a seguinte conclusão geral:

Toda sucessão monótona limitada é convergente.

III. *Toda sucessão monótona não limitada é divergente.*

Realmente se (u_n) é uma sucessão nessas condições, qualquer que seja um número positivo e arbitrário N, existe um inteiro n' tal que para $n > n'$ se tenha $|u_n| > N$, o que define a divergência da sucessão (n.° 12, II).

Dêsses princípios se conclui que *uma sucessão monótona não pode ser oscilante.*

IV. *Se $\lim u_n = L$ será $\lim (u_n - L) = 0$ e recìprocamente.* Com efeito, a condição (para $n > n'$)

$$|u_n - L| < \varepsilon$$

que caracteriza o primeiro limite, se pode representar por

$$|(u_n - L) - 0| < \varepsilon$$

o que define o segundo limite.

A demonstração da recíproca é evidente.

V. *Dada uma sucessão de limite L, se L' e L'' são dois números tais que $L' < L < L''$, os têrmos dessa sucessão, a partir de uma certa ordem, estão compreendidos entre A e A'.*

De fato, basta escolher ε de modo que o intervalo $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ esteja contido no intervalo $[L', L'']$.

VI. (Corolário do anterior) *Dada uma sucessão convergente de limite não nulo, a partir de uma certa ordem, todos seus elementos têm o sinal do limite.*

Soma dos valores absolutos é sempre ≥ soma dos val. alg.

VII. *Se duas sucessões (u_n) e (v_n) têm o mesmo limite L e se uma sucessão (a_n) é tal que, a partir de uma certa ordem, se tem $u_n \leq a_n \leq v_n$, a sucessão (a_n) terá, também, para limite L.* Realmente da desigualdade acima resulta

$$u_n - L \leq a_n - L \leq v_n - L$$

Como $\lim u_n = \lim v_n = L$, em virtude da definição de limite, se conclui da condição acima que a diferença $|a_n - L|$ se pode tornar arbitràriamente pequena para n suficientemente grande, ou, em outras palavras, que $\lim a_n = L$.

VIII. *Se $\lim u_n = 0$ e $|k| < N$, sendo N um número finito positivo, tem-se $\lim (ku_n) = 0$.* De fato, a condição $u_n < \dfrac{\varepsilon}{k}$ que caracteriza o primeiro limite, acarreta a condição $ku_n < \varepsilon$ que define o segundo.

CÁLCULO ARITMÉTICO DOS LIMITES

16. Princípios fundamentais. O cálculo aritmético dos limites baseia-se nos seguintes princípios fundamentais que passaremos a estudar.

17. Limite de uma soma. *Se $\lim u_n = U$ e $\lim v_n = V$, tem-se $\lim (u_n + v_n) = U + V$.* De fato, temos

$$|(u_n + v_n) - (U + V)| = |(u_n - U) + (v_n - V)| \leq |u_n - U| + |v_n - V|$$

Em virtude da hipótese, dado um ε positivo e arbitrário, existe um inteiro n' tal que, para $n > n'$, se tenha simultâneamente

$$|u_n - U| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|v_n - V| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Somando, membro a membro, essas desigualdades, obtemos

$$|u_n - U| + |v_n - V| < \varepsilon$$

Comparando esta desigualdade com a primeira, podemos concluir que, para $n > n'$, se tem

$$|(u_n + v_n) - (U + V)| < \varepsilon$$

o que demonstra o teorema.

É óbvio que o teorema se estende ao caso geral do limite de um número finito qualquer de parcelas.

18. Limite de uma diferença. *Se* $\lim u_n = U$ *e* $\lim v_n = V$, *tem-se* $\lim (u_n - v_n) = U - V$. A demonstração é análoga à anterior.

19. Limite de um produto. *Se* $\lim u_n = U$ *e* $\lim v_n = V$, *tem-se* $\lim (u_n . v_n) = UV$. Realmente, temos, suposto $U \neq O$,

$$u_n v_n - UV = u_n v_n - UV + Uv_n - Uv_n = v_n(u_n - U) + U(v_n - V)$$

e, portanto,

$$| u_n v_n - UV | \leq | v_n | . | u_n - U | + | U | . | v_n - V |$$

Como a sucessão (v_n) é convergente, $| v_n |$ é inferior a um número positivo A. Sendo, então, M o maior dos números A e $| U |$, podemos escrever *a fortiori*

$$|u_n v_n - UV| \leq M (|u_n - U| + |v_n - V|) \qquad (1)$$

Como as sucessões (u_n) e (v_n) convergem respectivamente para os limites U e V, dado um ε positivo e arbitrário, existe um inteiro n' tal que, para $n > n'$, se tenha simultâneamente

$$| u_n - U | < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$| v_n - V | < \frac{\varepsilon}{2M}$$

e, portanto,

$$| u_n - U | + | v_n - V | < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (2)$$

Das desigualdades (1) e (2) se conclui que, para $n > n'$, se tem

$$| u_n v_n - UV | < \varepsilon$$

o que demonstra o teorema.

É óbvio que o teorema se estende ao caso geral de um número finito de fatores.

20. Limite de um quociente.

I. *Se* $\lim u_n = U$, *sendo* $U \neq O$, *tem-se* $\lim \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{U}$.

Realmente, temos

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{U} \right| = \frac{| U - u_n |}{| u_n | . | U |}$$

Como a sucessão (u_n) converge para U, podemos escolher um número A tal que, a partir de uma certa ordem se tenha

$$| u_n | > A$$

Além disso, dado um ε positivo e arbitrário, a partir de uma certa ordem se tem

$$| u_n - U | < A \, | U | \, \varepsilon$$

Êstes resultados permitem-nos concluir que, a partir de uma certa ordem, se tem

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{U} \right| < \varepsilon$$

o que demonstra o teorema.

II. *Sendo* $\lim u_n = U$, $\lim v_n = V$ e $V \neq O$, *tem-se* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{U}{V}$. Realmente, sendo $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$, temos (n.º 19)

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim u_n \times \lim \frac{1}{v_n}$$

ou, em virtude do resultado anterior

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{U}{V}$$

21. Extensões dos princípios anteriores.

I. Da definição de limite infinito (n.º 12) resultam imediatamente as seguintes extensões dos princípios estudados nos n.os 17 e 18.

a) Se as sucessões (u_n) *e* (v_n) *têm limites respectivamente* U *e* V *e se um apenas dêsses limites é infinito (positivo ou negativo), as sucessões* $(u_n + v_n)$ *e* $(u_n - v_n)$ *têm, também, limite infinito (positivo ou negativo).*

b) Se ambas as sucessões (u_n) *e* (v_n) *têm o mesmo limite infinito (positivo ou negativo), a sucessão* $(u_n + v_n)$ *têm o mesmo limite infinito (positivo ou negativo), nada se podendo afirmar sôbre o limite da sucessão* $(u_n - v_n)$ *que se apresenta sob uma forma indeterminada do tipo* $\infty - \infty$.

Por exemplo, se $u_n = v_n = \frac{1}{n^2}$, ambas as sucessões (u_n) e (v_n) têm para limite $+\infty$ e a sucessão $(u_n - v_n)$, cujos têrmos são nulos, tem para limite zero. Se $u_n = \frac{1}{n^2}$ e $v_n = \frac{1}{2n^2}$, ambas as sucessões (u_n) e (v_n) têm para limite $+\infty$ e a sucessão $(u_n - v_n)$ tem, também, para limite $+\infty$. Se, finalmente, $u_n = (-1)^n + n^2$ e $v_n = n^2$, ambas as sucessões (u_n) e (v_n) têm para limite $+\infty$ e, no entanto, a sucessão $(u_n - v_n)$, cujo têrmo geral é $(-1)^n$ é oscilante, isto é, não tende para limite algum.

II. O princípio relativo ao limite de um produto (**n.° 19**) pode ter as seguintes extensões:

a) Se uma das sucessões (u_n) e (v_n) tem limite infinito (positivo ou negativo) e os têrmos da outra, a partir de uma certa ordem são superiores a uma certa quantidade positiva, a sucessão $(u_n . v_n)$ tem para limite infinito (positivo ou negativo).

De fato, se $\lim | u_n | = \infty$ e, a partir de uma certa ordem se tem $v_n > A$, sendo A positivo, dado um número N, positivo e arbitràriamente grande, a partir de uma certa ordem, tem-se $| u_n | > \frac{N}{A}$ e, portanto, $| u_n . v_n | > N$. É óbvia a correspondência dos sinais, indicada no enunciado.

Em particular, podemos enunciar:

Se $\lim | u_n | = \infty$ *e* $\lim v_n = V$, *sendo* $V \neq 0$, *tem-se* $\lim | u_n . v_n | = \infty$.

b) Se uma das sucessões (u_n) e (v_n) tem limite zero e os têrmos da outra, a partir de uma certa ordem, são limitados, a sucessão $(u_n . v_n)$ tem para limite zero. Esta proposição é uma consequência do princípio VIII do **n.° 15.**

Em particular, *se* $\lim u_n = 0$ e $\lim v_n = V$, *sendo* V *finito, tem-se* $\lim (u_n . v_n) = 0$.

Observemos, finalmente, que se $\lim | u_n | = \infty$ e $\lim v_n = 0$, nada se pode afirmar, por enquanto, sôbre o limite da sucessão $(u_n . v_n)$.

III. Os princípios, enunciados no (**n.° 20**) podem ter a seguinte extensão:

Se $\lim u_n = 0$ *e* u_n *não é idênticamente nulo no êntorno de zero, tem-se* $\lim \frac{1}{| u_n |} = \infty$.

Realmente, a condição $| u_n | < \varepsilon$ que caracteriza o primeiro limite, acarreta $\frac{1}{| u_n |} > \frac{1}{\varepsilon}$ que define o segundo. Torna-se evidente a demonstração da recíproca:

Se $\lim | u_n | = \infty$, *tem-se* $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.

Como consequência dêsse princípio e do teorema do **n.° 19,** resulta:

Se $\lim u_n = U$, *sendo* $U \neq 0$, *e* $\lim v_n = 0$, *tem-se* $\lim \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \infty$.

Observemos, finalmente, que se os limites das sucessões (u_n) e (v_n) são simultâneamente nulos ou infinitos, nada se pode afirmar, por emquanto, sôbre o limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, que se apresenta sob uma das formas indeterminadas $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

22. Limite de uma potência. *Sendo* $\lim u_n = U$, *tem-se* $\lim (u_n)^p = U^p$, *sendo* p *um inteiro qualquer.*

Se p é um inteiro positivo, a proposição é uma consequência do teorema do **n.° 19.** O mesmo sucede se p é um inteiro negativo, pois $u^p = \frac{1}{u^{-p}}$. Se $p = 0$, qualquer que seja u_n (diferente de zero), tem-se $(u_n)^p = 1$ e, portanto, $\lim (u_n)^p = 1 = U^0$ (suposto $U \neq 0$).

Se $u_n > 0$ a propriedade anterior é válida no caso de ser p um número real qualquer, o que aceitaremos sem demonstração.

23. Limite de uma raiz. *Sendo* $\lim u_n = U$ *e* U *um número real positivo, tem-se* $\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{U}$, *qualquer que seja o inteiro não nulo* p. Realmente, sendo

$$\left[\sqrt[p]{u_n}\right]^p = u_n$$

resulta

$$\lim \left[\sqrt[p]{u_n}\right]^p = \lim u_n = U$$