THALES MELLO CARVALHO

MATEMÁTICA

PARA OS CURSOS CLÁSSICO e CIENTÍFICO

3.ª SÉRIE

Companhia Editora Nacional

São Paulo - Rio de Janeiro - Recife - Bahia - Pará - Pôrto Alegre

MATEMÁTICA

CURSOS

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

TERCEIRA SÉRIE

NOTA

As referências aos nossos livros *Matemática* para a 1.ª Série dos Cursos Clássico e Científico e *Matemática* para a 2.ª Série dos mesmos cursos serão feitas respectivamente com as indicações *Vol. I* e *Vol. II*.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CLÁSSICO

Terceira Série

ÁLGEBRA

Unidade I. — Funções: 1. Noção de função de variavel real. 2. Representação cartesiana. 3. Noção de limite e de continuidade.

Unidade II. — Derivadas: 1. Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

GEOMETRIA

Unidade III. — Curvas usuais: 1. Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As secções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

GEOMETRIA ANALÍTICA

Unidade IV. — Noções fundamentais: 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abcissa sôbre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade V. — Lugares geométricos: 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CIENTIFICO

Terceira Série

ÁLGEBRA

Unidade I. — Séries: 1. Sucessões. 2. Cálculo aritmético dos limites. 3. Séries numéricas. 4. Principais caracteres de convergência.

Unidade II. — Funções: 1. Função de uma variavel real. 2. Representação cartesiana. 3. Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidade de uma função racional.

Unidade III. — Derivadas: 1. Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2. Cálculo das derivadas. 3. Derivação das funções elementares. 4. Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Unidade IV. — Números complexos: 1. Definição; operações fundamentais. 2. Representação trigonométrica e exponencial. 3. Aplicação à resolução das equações binômias.

Unidade V. — Equações algébricas: 1. Propriedades gerais dos polinômios. 2. Relações entre os coeficientes e as raizes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações. 3. Noções sôbre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raizes iguais.

GEOMETRIA

Unidade VI. — Relações métricas: 1. Teorema de Stewart e suas aplicações ao cálculo das linhas notáveis no triângulo. 2. Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco. 3. Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais.

Unidade VII. — Transformação de figuras: 1. Deslocamentos, translação, rotação, simetria. 2. Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de tres dimensões. 3. Inversão pelos raios vetores recíprocos.

Unidade VIII. — Curvas usuais: 1. Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2. As secções cônicas. 3. Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

GEOMETRIA ANALÍTICA

Unidade IX. — Noções fundamentais: 1. Concepção de Descartes. 2. Coordenadas; abcissa sôbre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3. Distância entre dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4. Determinação de uma direção; ângulo de duas direções.

Unidade X. — Lugares geométricos: 1. Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2. Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3. Equação da reta. 4. Equação do círculo. 5. Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.

CAPÍTULO I

Álgebra

UNIDADE:

Séries

CURSO CIENTÍFICO

1. Sucessões.
2. Cálculo aritmético dos limites.
3. Séries numéricas.
4. Principais critérios de convergência.

NOÇÕES FUNDAMENTAIS SÔBRE LIMITES

1. Preliminares. — Quando uma variável x assume sucessivamente valores

$$x_1, \; x_2, \; \ldots\ldots \; x_n, \; \ldots\ldots \tag{1}$$

que se aproximam de um valor finito A, de tal modo que, para n suficientemente grande, a diferença $|A - x_n|$ (*) seja menor do que uma quantidade positiva arbitràriamente prefixada, diz-se que a variável x *tem para limite* A ou *tende para* A, escrevendo-se

$$\lim x = A$$

Diz-se anàlogamente que A é o limite da sucessão indefinida (1) que, por esta razão, se denomina *convergente*. (**)

Diz-se com mais precisão: a sucessão (1) tem para limite A, quando, dada uma quantidade positiva arbitrária ε, existe um número inteiro e positivo p, tal que, para qualquer valor de n maior do que p, se tem

$$|A - x_n| < \varepsilon$$

Por exemplo, a sucessão

$$\frac{1}{2}, \; \frac{2}{3}, \; \frac{3}{4}, \; \ldots\ldots \; \frac{n}{n+1}, \; \ldots\ldots \tag{2}$$

tem para limite 1, porque a diferença

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

para n suficientemente grande, se pode tornar menor do que qualquer quantidade positiva, arbitràriamente escolhida. Para que esta diferença, por exemplo, seja inferior a 0,000 001 basta tomar $n = 1\,000\,000$.

(*) $|A - x_n|$ significa *valor absoluto da diferença* $A - x_n$.

(**) De agora em diante, usaremos o vocábulo *sucessão* no sentido de *sucessão indefinida*.

Se os têrmos da sucessão (1) se aproximam de zero, de modo que, para n suficientemente grande, $|x_n|$ seja menor do que uma quantidade positiva arbitràriamente prefixada, diz-se que a sucessão (1) (ou a variável x) *tem para limite zero* ou *tende para zero*. Uma quantidade variável que tem para limite zero denomina-se um *infinitamente pequeno* (*).

Por exemplo, a sucessão

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots \qquad (3)$$

tem para limite zero, pois $\frac{1}{2^n}$, para n suficientemente grande, pode tornar-se menor do que qualquer quantidade positiva arbitrária. Assim $\frac{1}{2^n}$ será inferior a 0,0001 para $n \geqq 14$, pois

$$\frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16\,384} < \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$$

Se os valores absolutos dos têrmos da sucessão (1) (supostos do mesmo sinal) crescem indefinidamente, ultrapassando qualquer limite, diz-se que a sucessão (1) é *divergente*. Com mais precisão se diz: a sucessão (1) é *divergente* quando, dado um número positivo arbitrário A, existe um número inteiro e positivo p tal que, para qualquer valor de n maior do que p, se tem

$$|x_n| > A$$

Uma sucessão diz-se *oscilante* ou *indeterminada* se não é nem convergente nem divergente. Por exemplo, sendo

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots\ldots b_n, \ldots\ldots$$

sucessões convergentes de limites A e B respectivamente $(A \neq B)$, a sucessão

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots\ldots a_n, b_n, \ldots\ldots$$

é oscilante ou indeterminada.

(*) *"Un infiniment petit n'est pas une quantité déterminée, c'est une quantité essentiellement variable tendant vers zéro"*. CHARLES DE COMBEROUSSE, *Cours d'Algèbre Superieure*, 1.ª parte, Paris, (Gauhtier-Villars, 1904, 3.ª ed.).

2. Sucessões monótonas. — Diz-se que a sucessão (1) é *monótona* se

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots\ldots \leqq x_n \leqq \ldots\ldots$$

ou

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots\ldots \geqq x_n \geqq \ldots\ldots$$

No primeiro caso a sucessão monótona diz-se *não decrescente* e no segundo caso *não crescente*.

3. Teoremas relativos às sucessões. — Demonstram-se os seguintes teoremas : (*)

I. *Toda sucessão monótona não decrescente, cujos têrmos são inferiores a um número finito A, converge para um limite A' igual ou inferior a A.*

II. *Toda sucessão monótona não crescente, cujos têrmos são superiores a um número finito A, converge para um limite A', igual ou superior a A.*

III. *Se duas sucessões*

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$$
$$b_1, b_2, \ldots\ldots b_n, \ldots\ldots$$

convergem para um mesmo limite L, e uma terceira sucessão

$$c_1, c_2, \ldots\ldots c_n, \ldots\ldots$$

é tal que, a partir de uma certa ordem, c_n está compreendido entre a_n e b_n, esta sucessão converge também para o limite L.

IV. *Dada uma sucessão convergente de limite A, sendo A' e A'' dois números quaisquer tais que*

$$A' < A < A''$$

os elementos desta sucessão, a partir de uma certa ordem, estão compreendidos entre A' e A''.

(*) Para não alongar êste capítulo omitimos essas demonstrações. O leitor que desejar estender seus conhecimentos sôbre o assunto encontrará no livro *Elements of the Theory of Infinite Processes* de LLOYD L. SMAIL (MacGraw-Hill Book Co.) uma exposição didática sôbre sucessões e limites.

V. (Corolário do anterior) *Dada uma sucessão convergente de limite A não nulo, os elementos desta sucessão, a partir de uma certa ordem, têm o mesmo sinal de A.*

VI. *Multiplicando-se os têrmos de uma sucessão, tendo para limite zero, respectivamente por fatores inferiores em valor absoluto a um número finito A, obtém-se outra sucessão, tendo também para limite zero.*

VII. *A sucessão formada pela soma dos têrmos de mesma ordem de duas sucessões, tendo ambas para limite zero, tem igualmente para limite zero.*

VIII. *Dada uma sucessão convergente, toda sucessão nela contida, é também convergente, tendo o mesmo limite da primeira.*

4. Operações sôbre limites. — Sejam as sucessões

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_n,\ \ldots\ldots \tag{4}$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots\ b_n,\ \ldots\ldots \tag{5}$$

que têm respectivamente os limites finitos A e B.

I. Consideremos a sucessão

$$a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots\ldots\ a_n + b_n,\ \ldots\ldots \tag{6}$$

cujos têrmos são as somas dos têrmos de mesma ordem das sucessões dadas. Queremos demonstrar que o limite desta sucessão é $A + B$.

Realmente temos (*)

$$|\,(A + B) - (a_n + b_n)\,| = |\,(A - a_n) + (B - b_n)\,| \leqq$$
$$\leqq |\,A - a_n\,| + |\,B - b_n\,| \tag{7}$$

Como A e B são os limites das sucessões (4) e (5) respectivamente, dado um ε positivo arbitrário, existe um número inteiro n' tal que, para $n > n'$, se tem

$$|\,A - a_n\,| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |\,B - b_n\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(*) Observe o leitor que
$$|\,M + N\,| = |\,M\,| + |\,N\,|$$
se M e N são do mesmo sinal, e
$$|\,M + N\,| < |\,M\,| + |\,N\,|$$
se M e N são de sinais contrários.

Em virtude da igualdade (7) resulta, então, para $n > n'$

$$|\,(A + B) - (a_n + b_n)\,| < \varepsilon$$

o que demonstra ser $A + B$ o limite da sucessão (6).

CONCLUSÃO: *Dadas duas sucessões convergentes, a sucessão cujos têrmos são obtidos pela soma dos têrmos de mesma ordem das sucessões dadas, tem para limite a soma dos limites dessas sucessões.*

Êste teorema também se pode assim enunciar:

O limite da soma de duas variáveis, que têm limites finitos, é a soma dos limites dessas variáveis.

O teorema extende-se ao caso geral da soma de um número qualquer (finito) de variaveis.

II. Anàlogamente se demonstra que o limite da sucessão

$$a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ \ldots\ldots\ a_n - b_n,\ \ldots\ldots \tag{8}$$

é $A - B$, ou, em outras palavras:

O limite da diferença de duas variáveis que têm limites finitos, é a diferença dos limites dessas variáveis.

III. Consideremos a sucessão

$$a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ \ldots\ldots\ a_n b_n,\ \ldots\ldots \tag{9}$$

Queremos demonstrar que seu limite é AB.

Realmente temos

$$AB - a_n b_n = A\,(B - b_n) + b_n\,(A - a_n)$$

e, portanto,

$$|\,AB - a_n b_n\,| \leqq |\,A\,| \,.\, |\,B - b_n\,| + |\,b_n\,| \,.\, |\,A - a_n\,|$$

Como a sucessão (5) é convergente, $|\,b_n\,|$ será inferior a um número positivo B'. Sendo, então, M o maior dos números $|\,A\,|$ e B', podemos escrever *a fortiori*

$$|\,AB - a_n b_n\,| \leqq M\,(|B - b_n\,| + |\,A - a_n\,|)$$

Como A e B são os limites das sucessões (4) e (5) respectivamente, dado um ε positivo arbitrário, existe um número inteiro n' tal que, para $n > n'$, se tem

$$| B - b_n | < \frac{\varepsilon}{2\,M}$$

$$| A - a_n | < \frac{\varepsilon}{2\,M}$$

Em virtude da última relação resulta, pois, para $n > n'$

$$| AB - a_n\, b_n | < \varepsilon$$

o que demonstra ser AB o limite da sucessão (9).

Conclusão: *O limite do produto de duas variáveis que têm limites finitos é o produto dos limites dessas variáveis.*

Êste teorema extende-se ao caso do produto de um número qualquer (finito) de variáveis.

IV. Consideremos a sucessão

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \ldots\ldots\ \frac{a_n}{b_n},\ \ldots\ldots \qquad (10)$$

Queremos demonstrar que, se $B \neq 0$, esta sucessão tem para limite $\frac{A}{B}$.

Para isso demonstremos primeiramente que a sucessão

$$\frac{1}{b_1},\ \frac{1}{b_2},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{b_n},\ \ldots\ldots \qquad (11)$$

tem para limite $\frac{1}{B}$.

Realmente, temos

$$\left| \frac{1}{B} - \frac{1}{b_n} \right| = \frac{| b_n - B |}{| B | . | b_n |} \qquad (12)$$

Como a sucessão (5) converge para B, podemos escolher um número $B' > 0$ tal que, a partir de uma certa ordem, se tenha

$$| b_n | > B' \qquad (13)$$

Além disso, dado um ε arbitrário, a partir de uma certa ordem se tem

$$| b_n - B | < B' \,| B |\, \varepsilon \qquad (14)$$

Então, a partir de uma determinada ordem, verificam-se simultâneamente as condições (13) e (14). Em virtude de (12), temos, também, a partir de uma certa ordem

$$\left| \frac{1}{B} - \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon$$

o que demonstra ser $\frac{1}{B}$ o limite da sucessão (11).

Observando, agora, que os têrmos da sucessão (10) são os produtos dos têrmos de mesma ordem das sucessões (4) e (11) cujos limites são respectivamente A e $\frac{1}{B}$, em virtude do teorema anterior, concluimos que o limite de (10) é o produto $A \times \frac{1}{B}$ ou $\frac{A}{B}$.

Conclusão: *O limite do quociente de duas variáveis que têm limites finitos, sendo o segundo diferente de zero, é o quociente dos limites dessas variáveis.*

Demonstram-se, ainda, os seguintes teoremas que nos limitaremos a enunciar:

V. *O limite da potência inteira m de uma variável que tem um limite finito, é a potência m dêsse limite.*

VI. *O limite da raiz de grau m (m inteiro) de uma variável que tem um limite finito, é a raiz m dêsse limite.*

5. Limite de uma função. — Seja

$$y = f\,(x) \qquad (15)$$

uma função definida num intervalo $[a, b]$ (*) e seja A um ponto dêsse intervalo. Diz-se que a função y tem um limite finito B quando x tem para limite A, se dado um número positivo arbitrário ε, existe um número positivo δ tal que, para qualquer valor de x verificando a condição

$$| x - A | < \delta$$

(*) As noções elementares sôbre funções, tais como definição de *variavel* e *função*, *domínio* de variavel, *campo de definição* de função, etc., foram dadas no Vol. I, Cap. V, n.º 18 e serão repetidas no Cap. II, n.º 13 e seguintes.

se tem

$$|y - B| < \varepsilon$$

Em têrmos menos precisos poderemos dizer: a função y tem para limite B se, quando os valores de x se aproximam indefinidamente de A, os valores correspondentes da função se aproximam indefinidamente de B.

A definição anterior extende-se ao caso geral das funções cujo campo de definição não é necessàriamente um intervalo e sim um conjunto qualquer de pontos do qual a seja um ponto de acumulação.

Se os limites A e B não são finitos, convém estabelecer nova definição. Temos, então, os casos seguintes:

I. Diz-se que a função y tem um limite finito B, quando x tende para $+\infty$, se, dado um número positivo arbitrário ε, existe um número positivo M tal que, para qualquer valor de x, verificando a condição

$$x > M$$

se tenha

$$|y - B| < \varepsilon$$

Anàlogamente se define o limite

$$\lim_{x \to -\infty} y = B$$

II. Diz-se que a função y tende para $+\infty$ quando x tem para limite A, se, dado um número positivo arbitrário M, existe um número positivo ε, tal que, para qualquer valor de x verificando a condição

$$|x - A| < \varepsilon$$

se tenha

$$y > M$$

Anàlogamente definiríamos o limite

$$\lim_{x \to A} y = -\infty$$

III. Diz-se que a função y tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$, se, dado um número positivo arbitrário M,

existe um número positivo N tal que, para qualquer valor de x verificando a condição

$$x > N$$

se tenha

$$y > M$$

Anàlogamente definiríamos os limites

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} y = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} y = -\infty$$

6. Limite à esquerda e limite à direita. — Pode acontecer que uma função $f(x)$ definida num intervalo, não admita num ponto a dêste intervalo um limite tal como foi definido no **n.º 5**, mas que, dado um número ε positivo e arbitrário, se possa determinar um certo *entôrno* (*) à direita (ou à esquerda) de a, de modo que para qualquer valor de x dêste entôrno se tenha

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Diz-se, então, que L é o *limite à direita* (ou *à esquerda*) da função $f(x)$ no ponto a. Por exemplo, a função

$$y = x + \frac{x}{|x|}$$

que para qualquer valor positivo de x é igual a $x + 1$ e para qualquer valor negativo de x é igual a $x - 1$ tem, no ponto $x = 0$ o *limite à direita* $+1$ e o *limite à esquerda* -1.

Os limites à esquerda e à direita de uma função $f(x)$ num ponto a, representam-se respectivamente por

$$\lim_{x \to a-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a+} f(z)$$

Quando num determinado ponto o *limite à esquerda* coincide com o *limite à direita* recai-se no caso do limite ordinário já definido.

(*) Por *entôrno à direita* (ou *à esquerda*) do ponto a entende-se o conjunto de todos os pontos x do intervalo tais que

$$a \leq x \leq a + \lambda \quad (\text{ou } a - \lambda \leq x \leq a)$$

sendo λ um número positivo.

7. Propriedades. — As propriedades relativas ao limite de uma soma, de uma diferença, de um produto, etc., que vimos no estudo dos limites das sucessões (**n.° 4**) extendem-se ao caso dos limites das funções.

Sejam $f(x)$ e $\varphi(x)$ duas funções definidas num mesmo intervalo e seja A um ponto dêste. Admitamos que $f(x)$ e $\varphi(x)$ tenham respectivamente os limites finitos L e L' quando x tende para A, ou

$$\lim_{x \to A} f(x) = L, \quad \lim_{x \to A} \varphi(x) = L'$$

Demonstram-se, então, as seguintes propriedades:

I. $$\lim_{x \to A} \left[f(x) \pm \varphi(x) \right] = \lim_{x \to A} f(x) \pm \lim_{x \to A} \varphi(x) = L \pm L'$$

II. $$\lim_{x \to A} \left[f(x) \cdot \varphi(x) \right] = \lim_{x \to A} f(x) \cdot \lim_{x \to A} \varphi(x) = L \cdot L'$$

III. $$\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to A} f(x)}{\lim\limits_{x \to A} \varphi(x)} = \frac{L}{L'} \quad (\text{se } L' \neq 0)$$

IV. $$\lim_{x \to A} \left[f(x) \right]^m = \left[\lim_{x \to A} f(x) \right]^m = L^m$$

V. $$\lim_{x \to A} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x \to A} f(x)} = \sqrt[m]{L}$$

(supondo m inteiro e $L < 0$ se m for par).

A primeira e a segunda propriedade extendem-se ao caso de um número finito de parcelas e fatores respectivamente.

8. Limite de polinômio inteiro. —

I. As propriedades sôbre limites de variáveis (**n.° 4**) permitem estabelecer o seguinte princípio:

O limite de um polinômio inteiro, contendo um número finito de variáveis $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, *que têm limites finitos* $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ *respectivamente, é o valor numérico do polinômio para* $x_1 = A_1$, $x_2 = A_2$, $\ldots\ldots x_n = A_n$. (*)

(*) V. a noção de *valor numérico* de um polinômio no Vol. I, Cap. IV, n.° 3.

Em particular, tem-se:

O limite de um polinômio inteiro em x, quando x tende para um limite finito a, é o valor numérico do polinômio para x = a.

Assim, por exemplo,

$$\lim_{x \to 2} (4x^3 - 6x^2 + 1) = 4 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + 1 = 9$$

II. Consideremos o polinômio inteiro

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m$$

e calculemos seu limite quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. Podemos escrever

$$\lim (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m) =$$
$$= \lim \left[a_0 x^m \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{a_0} \cdot \frac{1}{x^m} \right) \right] =$$
$$= \lim (a_0 x^m)$$

visto que a expressão entre parênteses tem para limite 1, porque as sucessões $\frac{1}{x}, \ldots\ldots \frac{1}{x^m}$ têm para limite zero.

Temos, então, os seguintes casos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} (a_0 x^m) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_0 < 0 \end{cases} \\[2ex] \lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} (a_0 x^m) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \begin{cases} m \text{ par e } a_0 > 0 \\ m \text{ ímpar e } a_0 < 0 \end{cases} \\ -\infty & \text{se } \begin{cases} m \text{ par e } a_0 < 0 \\ m \text{ ímpar e } a_0 > 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

9. Limite de uma função racional quando a variavel tem um limite finito. — Seja

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \tag{16}$$

uma função racional, na qual $f(x)$ e $\varphi(x)$ são polinômios inteiros em x. Suponhamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = A$$
$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a) = B$$

onde A e B são números finitos, sendo $B \neq 0$. O teorema do **n.° 7, III** permite-nos, então, escrever

$$\lim_{x \to a} y = \frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{A}{B}$$

CONCLUSÃO. — *O limite de uma função racional* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *quando* x *tende para* a, *é o quociente* $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ *dos valores numéricos dos polinômios* $f(x)$ *e* $\varphi(x)$, *supostos êsses valores numéricos finitos e o segundo diferente de zero.*

Por exemplo,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 6x - 2}{2x^2 + 3x + 2} = \frac{(-2)^3 - 6(-2) - 2}{2(-2)^2 + 3(-2) + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

10. Observação. — Se $f(a) = 0$ e $\varphi(a) = 0$, pode-se determinar o limite da função (16), calculando-se o limite de outra função racional equivalente a ela, à qual possa ser aplicada a regra anterior (isto é, o valor numérico do denominador desta fração para $x = a$ não deve ser nulo).

Para isto, dividem-se ambos os têrmos de (16) por $x - a$. Sejam, então $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$ respectivamente os quocientes das divisões de $f(x)$ e $\varphi(x)$ por $x - a$ (*). Se $\varphi_1(a)$ não é nulo, será

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{f_1(a)}{\varphi_1(a)}$$

Se $f_1(a) = 0$ e $\varphi_1(a) = 0$, procede-se anàlogamente em relação à função $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ e assim por diante.

Seja, por exemplo, calcular o limite.

$$\lim_{x \to 1} \frac{7x^2 - 14x + 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

Substituindo-se x por 1, ambos os têrmos da fração se anulam, o que equivale a dizer que o valor numérico da fração

(*) Como $f(a) = 0$ e $\varphi(a) = 0$, $f(x)$ e $\varphi(x)$ são divisíveis por $x - a$ (Vol. I, Cap. IV, n.° 45).

assume a forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Dividindo-se, então, ambos os têrmos dessa fração por $x - 1$, obtém-se a fração

$$\frac{7x - 7}{x^2 - 3x + 2}$$

cujo valor numérico para $x = 1$ assume, ainda, a forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Dividindo-se ambos os têrmos desta fração por $x - 1$, obtém-se a fração

$$\frac{7}{x - 2}$$

que, para $x = 1$, assume o valor -7. Resulta, pois,

$$\lim_{x \to 1} \frac{7x^2 - 14x + 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{7}{x - 2} = -7$$

11. Limite de uma função racional quando a variavel tende para infinito. — Consideremos a função racional

$$y = \frac{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m}{B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \ldots\ldots + B_p} \qquad (17)$$

e determinemos seu limite quando x tende para $+\infty$.

Escrevamos a função (17) do seguinte modo

$$y = \frac{A_0 x^m \left[1 + \frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{1}{x} + \ldots\ldots + \frac{A_m}{A_0} \cdot \frac{1}{x^m}\right]}{B_0 x^p \left[1 + \frac{B_1}{B_0} \cdot \frac{1}{x} + \ldots\ldots + \frac{B_p}{B_0} \cdot \frac{1}{x^p}\right]}$$

e consideremos a função

$$z = \frac{A_0 x^m}{B_0 x^p}$$

Podemos, então, escrever

$$\frac{y}{z} = \frac{1 + \frac{A_1}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots\ldots + \frac{A_m}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right)^m}{1 + \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{x}\right) + \ldots\ldots + \frac{B_p}{B_0}\left(\frac{1}{x}\right)^p} \qquad (18)$$

Quando x crescer indefinidamente, $\frac{1}{x}$ tenderá para zero, e, portanto, o limite da fração do segundo membro de (18) será 1. Como (**n.º 7, III**)

$$\lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{y}{z} = \frac{\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0} y}{\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0} z}$$

resulta que, quando $\frac{1}{x}$ tender para zero (ou x crescer indefinidamente) o limite de y será igual ao limite de z, ou

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} z = \lim_{x\to+\infty} \frac{A_0x^m}{B_0x^p}$$

Temos, então, tres casos a considerar:

I) $m = p$. Será

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{A_0x^p}{B_0x^p} = \frac{A_0}{B_0}$$

II) $m > p$. Será

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{A_0x^{m-p}}{B_0} = \pm\infty$$

O sinal dêste limite depende dos sinais de A_0 e B_0 (*).

III) $m < p$. Será

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{A_0}{B_0x^{p-m}} = 0$$

Exemplos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{5x^4 - 7x^3 + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4}{5x^4} = \frac{2}{5}$$

(*) No caso, que não estamos considerando, de x tender para $-\infty$, o sinal do limite dependerá, ainda, da paridade do expoente $m - p$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2 - 2x + 3}{5x^4 - 6x^2 + 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2}{5x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{5x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 + 1}{2x^3 - 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{2} = +\infty$$

12. Limite de $\frac{\text{sen x}}{\text{x}}$ quando x tende para zero. —

Como a razão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ não muda de sinal quando substituimos x por $-x$ (*), podemos, na demonstração seguinte, supor x sempre positivo.

Tomemos um arco $\overset{\frown}{AM}$ (**) sôbre um círculo trigonométrico (***) (fig. 1) e seja x sua medida em radianos.

Tiremos a perpendicular MM' ao eixo dos cossenos, a tangente TT' ao círculo na origem dos arcos e as semi-retas OT e OT' que passam respectivamente pelas extremidades M e M' dos arcos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AM'}$. Podemos escrever

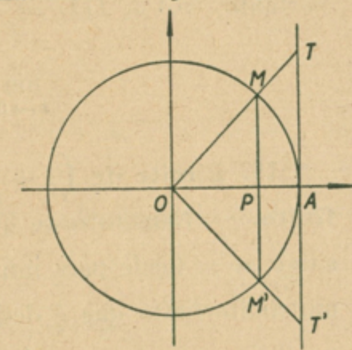

Fig. 1

Corda MM' < Arco MM' < Segmento TT'

Como as medidas dos segmentos MM' e TT' (tomado o raio para unidade) são respectivamente $2 \operatorname{sen} x$ e $2 \operatorname{tg} x$ (****)

(*) Já vimos que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (Vol. II, Cap. VIII, n.º 46), de modo que

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

(**) Como vamos calcular o limite quando $x \to o$ não há restrição em supor o arco $\overset{\frown}{AM}$ do primeiro quadrante.

(***) Vol. II, Cap. VIII, n.º 16.

(****) Vol. II, Cap. VIII, ns. 21 e 25.

2. *Círculo:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad \begin{cases} a,\, b: & \text{coordenadas do centro} \\ R: & \text{raio} \end{cases}$$

(eixos retangulares)

$x^2 + y^2 = R^2$ (caso particular do centro na origem)

(Cap. X, n.º 4)

3. *Elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{cases} a: & \text{comprimento do semi-eixo maior} \\ b: & \text{comprimento do semi-eixo menor} \end{cases}$$

(eixos retangulares)

(Cap. X, n.º 5)

4. *Hipérbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{cases} a: & \text{comprimento do semi-eixo transverso} \\ b: & \text{comprimento do semi-eixo não transverso} \end{cases}$$

(eixos retangulares)

(Cap. X, n.º 6)

5. *Parábola:*

$y^2 = 2\,px$ (p: parâmetro) (Cap. X, n.º 7)

(eixos retangulares)

BIBLIOGRAFIA

1. ANDRÉ, M. PH. – *Exercices d'Algèbre*, Paris, Livr. André-Guedon, 11.ª edição.
2. ANDRÉ, PH. – *Précis de Géométrie Élémentaire*, Paris, Liv. André-Guedon, 1906.
3. ARGAND, R. – *Essai sur une manière de representer les quantités imaginaires*, Paris, Gauthier-Villars, 1874, 2.ª edição.
4. AUBERT, P. E G. PAPELIER – *Exercices d'Algèbre d'Analyse et de Trigonometrie*, Paris, Liv. Vuibert, 1938.
5. BERTRAND, JOSEPH E HENRI GARCET – *Traité d'Algèbre*, Paris, Liv. Hachette, 1900.
6. BESSIÉRE, GUSTAVE – *Le Calcul Intégral facile et attrayant*, Paris, Dunod, 1939, 3.ª edição.
7. BOREL, EMILE E ROBERT DELTHEIL – *La Géomérie et les imaginaires*, Paris, Albin Michel.
8. BOREL, EMILE – *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, Paris, Gauthier-Villars, 3.ª edição, 1928.
9. BOREL, EMILE – *Principes d'Algèbre et d'Analyse*, Paris, Albin Michel.
10. BOULIGAND, GEORGES – *Cours de Géométrie Analytique*, Paris, Liv. Vuibert, 1928.
11. BRIOT, C. E J. C. BOUQUET – *Leçons de Géométrie Analytique*, Paris, Liv. Ch. Delagrave.
12. CARAÇA, BENTO DE JESUS – *Lições de Álgebra e Análise*, Lisboa, Liv. Sá Costa.
13. CARNOY, J. – *Cours de Géométrie Analytique*, Paris, Gauthier-Villars, 1880.
14. COMTE, A. – *La Géométrie Analytique*, Paris, Louis Bahl, 1894.
15. COSTA, M. AMOROSO – *As idéias fundamentais da Matemática*, Rio, Pimenta de Mello, 1929.
16. DE COMBEROUSSE, CHARLES – *Cours d'Algèbre Supérieure*, Paris, Gauthier-Villars, 1904, 3.ª edição.
17. DE COMBEROUSSE, CH. – *Cours de Mathématiques*, Tome II, Géométrie Elementaire, Paris, Gauthier-Villars, 5.ª edição, 1920.
18. F. G. M. – *Exercices d'Algèbre*, Paris, J. de Gigord, 10.ª edição.
19. F. I. C. – *Elementos de Geometria*, Rio de Janeiro, Liv. Garnier.
20. FARIAS, SINÉSIO DE – *Equações recíprocas*, Rio, 1923.
21. GAMA, LÉLIO I. – *Introdução à Teoria dos Conjuntos*, Separatas da "Revista Brasileira de Estatística".

22. GONÇALVES, J. VICENTE – *Curso de Álgebra Superior*, Coimbra, Liv. Atlântida, 1933.

23. HADAMARD, JACQUES – *Leçons de Géométrie Elémentaire*, Paris, Liv. Armand Colin.

24. INIGUEZ ALMECH, JOSÉ M. – *Matemáticas para Químicos*, Barcelona, Editorial Labor, 1936. 2.ª edição.

25. JABLONSKI, E. – *Théorie des équations*, Paris, Delalain Frères, 1891.

26. KAMKE, E. – *Mengenlehre*, Berlim, Walter de Gruyter e Co., 1928.

27. KLEIN, FELIX – *Elementary Mathematics from an advanced standpoint*, Trad. de E. R. Hedrick e C. A. Noble, New York, MacMillan, 1932.

28. KNOPP, KONRAD – *Teoria de Funciones*, Trad. de J. G. Alvarez Ude, Barcelona, Editorial Labor, 1926.

29. LABOUREUR, MAURICE – *Cours de Calcul Mathématique*, Paris, Liv. Ch. Béranger, 3.ª edição, 1927.

30. LABOURER, MAURICE – *Cours d'Exercices sur le Calcul Mathématique*, Paris, Liv. Ch. Béranger, 1932.

31. MANFREDI, LUIS – *Algebra Superior*, Buenos Aires, Augusto Galli, 1913.

32. NIEWENGLOWSKI, B. – *Cours d'Algèbre*, Paris, Liv. Armand Colin, 1920.

33. NIEWENGLOWSKI, B. E L. GÉRARD – *Cours de Géométrie Elémentaire* Paris, Gauthier-Villars, 1899.

34. OLIVEIRA, M. MACHADO DE – *Exercícios de Algebra Superior*, Rio de Janeiro, Livraria Nacional, 2.ª edição, 1912.

35. OSGOOD, WILLIAM FOGG – *Functions of real variables*, New York, G. E. Stechert & Co. 1938.

36. OSGOOD, WILLIAM FOGG – *Functions of a complex variable*, New York G. E. Stechert & Co., 1938.

37. OSGOOD, W. E. – *Séries Infinies*, Trad. de A. Sallin, Paris, Liv. Joseph Gilbert.

38. PASCAL, ERNESTO – *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, Milão, Ulrico Hoepli, 5.ª edição, 1924.

39. PETERSEN, JULIUS – *Théorie des équations algébriques*, Trad. de H. Laurent, Paris, Gauthier-Villars, 1897

40. PINCHERLE, SALVATORE – *Lezioni di Algebra Complementare*, Bologna, Zanichelli Editore, 3.ª edição.

41. REY PASTOR, J. – *Elementos de Análisis Algebraico*, Madrid, 5.ª edição, 1939.

42. ROSE, MAX – *Einleitung in die Funktionentheorie*. Die komplexen Zahlen und ihre elementaren Funktionen. Berlim, Coleção Goeschen.

43. ROUCHÉ, E. E CH. DE COMBEROUSSE – *Traité de Géométrie*, Paris, Gauthier-Villars, 4.ª edição, 1879.

44. SEVERI, FRANCESCO – *Elementos de Geometria*, Trad. de T. Martin Escobar, Editorial Labor, 1931.

45. SEVERI, FRANCESCO – *Lezioni di Analisi*, Bologna, Zanichelli Editore, 2.ª edição, 1938.

46. SMAIL, LLOYD L. – *Elements of the Theory of Infinite Processes*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1923.

47. SOKOLNIKOFF, IVAN S. – *Advanced Calculus*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1939.

48. SOKOLNIKOFF, IVAN E ELISABETH SOKOLNIKOFF – *Higher Mathematics for Engineers and Physicists*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1941.

49. SONNET, H. e G. FRONTERA – *Eléments de Géométrie Analytique*, Paris, Liv. Hachette, 1899.

50. TRESSE, A. E A. THYBAUT – *Cours de Géométrie Analytique*, Paris, Liv. Armand Colin, 1938.

51. TRICOMI, FRANCESCO – *Lezioni di Analisi Matematica*, Padua, CEDAM, 3.ª edição, 1935.

52. TURNBULL, H. W. – *Theory of equation*, Edinburgh, Oliver and Boyd, 1939.

53. VACQUANT, CH. E A. MACÉ DE LÉPINAY – *Eléments de Géométrie* Paris, Masson et Cie., 1907.

54. VITALI, GIUSEPPE – *Lezioni di Analisi Algebrica ed Infinitesimali*, Padua, Ed. A. Milani, 1928.

55. VOGT, H. – *Eléments de Mathématiques Supérieures*, Paris, Liv. Vuibert, 1930, 13.ª edição.

56. WOODS E BAILEY – *Mathématiques Générales*, Trad. de A. Sallin, Paris, Liv. Joseph Gilbert.

57. ZIWET, A. E L. A. HOPKINS – *Analytic Geometry*, N. York, MacMillan, 1918.

ÍNDICE

PÁG.

Prefácio 10
Programa do Curso Clássico 11
Programa do Curso Científico 12

CAPÍTULO I : **Séries**

Noções fundamentais sôbre limites 15
Séries numéricas 31

CAPÍTULO II : **Funções**

Noções Elementares sôbre conjuntos 65
Noções sôbre funções reais de uma variável real 72

CAPÍTULO III : **Derivadas**

Derivadas das funções reais de uma variavel real 87
Máximos e mínimos das funções reais de uma variavel real 121
Estudo da variação das funções reais de uma variavel real 136

CAPÍTULO IV : **Números complexos**

Números complexos 151

CAPÍTULO V : **Equações algébricas**

Propriedades gerais dos polinômios 185
Composição das equações algébricas 198
Noções sôbre transformações das equações 209
Equações recíprocas 223
Equações de raizes iguais 232

Capítulo VI : Relações métricas

PÁG.
Relações métricas nos triângulos e nos quadriláteros...... 249
Potência de um ponto. Eixo radical. Plano radical....... 265

Capítulo VII : Transformação de figuras

Deslocamentos. Simetria.......... 277
Homotetia e semelhança.......... 293
Inversão.......... 311

Capítulo VIII : Curvas usuais

Preliminares.......... 325
Elipse.......... 327
Hipérbole.......... 339
Parábola.......... 351
Secções cônicas.......... 358
Hélice cilíndrica.......... 366

Capítulo IX : Noções fundamentais sôbre Geometria analítica

Sistemas de coordenadas.......... 373
Distância entre dois pontos. Ponto que divide um segmento numa razão dada.......... 383
Determinação de uma direção. Ângulo de duas direções... 394

Capítulo X : Lugares geométricos

Lugares geométricos.......... 401

APÊNDICE

Formulário.......... 413
Bibliografia.......... 421

Preço Cr$ 35,00

São Paulo Editora S. A. imprimiu