THALES MELLO CARVALHO

MATEMÁTICA

PARA OS CURSOS

CLÁSSICO e

CIENTÍFICO

2.ª SÉRIE

Companhia Editora Nacional

São Paulo - Rio de Janeiro - Recife - Bahia - Pôrto Alegre

Fortunato Antônio

MATEMÁTICA

SEGUNDA SÉRIE

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

DO MESMO AUTOR

1. *Curiosidades Matemáticas* (Distribuidores: Livraria Civilização Brasileira).
2. *Elementos de Matemática Comercial e Financeira* (Cia. Editora Nacional).
3. *Matemática,* para a Primeira Série dos Cursos Clássico e Científico (Cia. Editora Nacional).
4. *Matemática,* para a Terceira Série dos Cursos Clássico e Científico (Cia. Editora Nacional).
5. *Lições de Trigonometria Retilínea* (Edição do autor).
6. *Lições de Matemática* 1.° e 2.° fascículos (edições do autor), esgotados.
7. *Sôbre um sistema de amortização por anuidades variáveis* (Separata da Revista Brasileira de Atuária, Julho de 1942).

NOTA

As referências ao nosso volume *Matemática* para a Primeira Série dos Cursos Clássico e Científico serão feitas simplesmente com a indicação: *Vol. I.*

THALES MELLO CARVALHO

Do Ensino Secundário da Prefeitura do Distrito Federal, dos Colégios Andrews, La-Fayette e Sto. Ignácio.

MATEMÁTICA

De acôrdo com os programas dos Cursos

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

SEGUNDA SÉRIE

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO - RIO DE JANEIRO - RECIFE - BAHIA - PÔRTO ALEGRE
1944

Exemplar 1168 *

PREFÁCIO

Apresentando o segundo volume da MATEMÁTICA, destinado aos alunos da segunda série dos Cursos Clássico e Científico, nada temos a acrescentar ao que dissemos no prefácio do primeiro volume. Nossa finalidade é proporcionar ao estudante brasileiro um livro, onde possa encontrar os assuntos, que necessite conhecer, explanados numa linguagem tão clara quanto possível.

De nossos prezados colegas receberemos com satisfação todo juizo crítico sôbre êste despretencioso trabalho.

Rio de Janeiro, Janeiro de 1944.

O AUTOR

PROGRAMA DE MATEMÁTICA
CURSO CLÁSSICO

Segunda série

ÁLGEBRA

Unidade I. Progressões e logaritmos: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. O binômio de Newton: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

GEOMETRIA

Unidade III. Os corpos redondos: 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade IV. Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noções de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslisantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade V. Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VI. Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos de 30°, 45° e 60°.

Unidade VII. Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Uso das tábuas trigonométricas. 3. Resolução de triângulos retângulos.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA
CURSO CIENTÍFICO

Segunda série

ÁLGEBRA

Unidade I. A função exponencial: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. O binômio de Newton: 1. Noções sôbre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III. Determinantes: 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Crammer; teorema de Rouché.

Unidade IV. Frações contínuas: Noções sôbre frações contínuas.

GEOMETRIA

Unidade V. Os corpos redondos: 1. Noções sôbre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade VI. Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslisantes sôbre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade VII. Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sôbre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VIII. Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$.

Unidade IX. Transformações trigonométricas: 1. Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3. Uso das tábuas trigonométricas.

Unidade X. Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.

Unidade XI. Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos retângulos 3. Resolução de triângulos obliquângulos. 4. Aplicações imediatas à topografia.

CAPÍTULO I

Álgebra

UNIDADE

Progressões e logaritmos

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas.

CURSO CIENTÍFICO

2. Noção de função exponencial e de sua função inversa.

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações.
4. Resolução de algumas equações exponenciais.

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

1. Preliminares. — Chama-se *progressão aritmética* ou *por diferença* uma sucessão de números (denominados *têrmos*) tais que a diferença entre um têrmo qualquer a partir do segundo, e o têrmo precedente seja constante. Essa diferença constante chama-se *razão* da progressão.

Representa-se uma progressão aritmética fazendo-se preceder ao primeiro têrmo um dos sinais $\div$ ou : e separando-se cada dois têrmos consecutivos por um ponto.

Sendo, então,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_{n-1},\ a_n,\ \ldots$$

números tais que

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \ldots = r \quad (1)$$

a progressão aritmética (de razão r), cujos têrmos são êsses números, pode ser assim representada

$$:\ a_1\ .\ a_2\ .\ a_3\ \ldots\ a_{n-1}\ .\ a_n\ \ldots \quad (2)$$

Conforme tenha ou não um número limitado de têrmos, a progressão diz-se *limitada* ou *ilimitada*.

Por exemplo

$$: 7\ .\ 10\ .\ 13\ .\ 16\ .\ 19\ .\ 22\ .\ 25$$
$$: 8\ .\ 3\ .\ -2\ .\ -7\ .\ \ldots$$

são progressões aritméticas de razões 3 e -5 respectivamente, sendo a primeira limitada e a segunda ilimitada.

2. Observações.

I. *Cada têrmo de uma progressão aritmética, a partir do segundo, é igual ao têrmo precedente mais a razão.*

Realmente, das igualdades (1) a que satisfazem os têrmos da progressão (2), resulta

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (3)$$

II. As igualdades (3) mostram que cada têrmo de uma progressão aritmética é maior ou menor do que o precedente, conforme a razão r seja positiva ou negativa. No primeiro caso diz-se que a progressão é *crescente* e, no segundo, que é *decrescente*. Concluimos, pois:

Uma progressão aritmética é crescente ou decrescente conforme sua razão seja positiva ou negativa.

3. Propriedade. — *Cada têrmo de uma progressão aritmética, a partir do segundo, é a média aritmética entre o têrmo precedente e o seguinte.*

Realmente, sendo a_{n-1}, a_n e a_{n+1} tres têrmos consecutivos de uma progressão aritmética, podemos, de acôrdo com a definição, escrever

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

donde tiramos sucessivamente

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

4. Fórmula do têrmo geral. — Seja a progressão aritmética de razão r

$$: a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, \ldots \,.\, a_{n-1} \,.\, a_n \,.\, \ldots$$

cujos n primeiros têrmos, como já vimos (n.º 2), verificam as relações

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando, mêmbro a mêmbro, estas $n-1$ igualdades e simplificando os têrmos comuns a ambos os membros, obtemos a fórmula do têrmo de ordem n

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \qquad (4)$$

que traduz o seguinte teorema:

Cada têrmo de uma progressão aritmética é igual ao primeiro têrmo, aumentado do produto da razão pelo número de têrmos que o precedem.

5. Exercício. — *Achar o trigésimo têrmo da progressão*

$$: 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, \ldots$$

RESOLUÇÃO: — Temos, usando as notações anteriores,

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ n &= 30 \\ r &= 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

O trigésimo têrmo a_{30} será, então, de acôrdo com o princípio anterior

$$a_{30} = a_1 + 29r = 5 + 29 \times 2 = 63$$

6. Fórmulas derivadas. — A fórmula (4) estabelece uma relação entre os quatro elementos de uma progressão aritmética: *primeiro têrmo* (a_1), *têrmo de ordem n* (a_n), *razão* (r) e *número de têrmos* (n). Conhecidos, então, tres dêstes elementos, podemos determinar o quarto. Para isso utilizamos as seguintes fórmulas, deduzidas facilmente de (4)

$$\boxed{a_1 = a_n - (n-1)r} \qquad (5)$$

$$\boxed{r = \frac{a_n - a_1}{n-1}} \qquad (6)$$

$$\boxed{n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r}} \qquad (7)$$

7. Exercício. — *Determinar o primeiro têrmo de uma progressão aritmética de 10 têrmos cuja razão é 4 e cujo último têrmo é 43.*

RESOLUÇÃO: — São dados

$$r = 4 \qquad n = 10 \qquad a_{10} = 43$$

Aplicando a fórmula (5), obtemos

$$a_1 = a_{10} - 9r = 43 - 9 \times 4 = 7$$

8. Exercício. — *Qual a razão de uma progressão aritmética de 20 têrmos, começada por 7 e cujo último têrmo é 197?*

RESOLUÇÃO: — São dados

$$a_1 = 7 \qquad a_{20} = 197 \qquad n = 20$$

Aplicando a fórmula (6) obtemos

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{197-7}{20-1} = 10$$

9. Exercício. — *Quantos números ímpares há de 17 a 193 inclusive?*

RESOLUÇÃO: — Os números considerados formam a progressão aritmética

$$: 17 \,.\, 19 \,.\, 21 \,\ldots\, 193$$

de razão 2 e cujos têrmos extremos são 17 e 193. Assim, são dados

$$a_1 = 17 \qquad a_n = 193 \qquad r = 2$$

Aplicando a fórmula (7), obtemos

$$n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r} = 1 + \frac{193-17}{2} = 89$$

10. Inserção de meios aritméticos. —Inserir n meios aritméticos entre dois números A e B é formar uma progressão aritmética de $n+2$ têrmos, cujos têrmos extremos sejam A e B.

O problema consiste, inicialmente, em determinar a razão da progressão, o que se obtém pela aplicação da fórmula (6). Calculada esta, escrevem-se os n têrmos (entre A e B) de acôrdo com a observação I do **n.º 2.**

11. Exercício. — *Inserir 4 meios aritméticos entre os números 11 e 31.*

RESOLUÇÃO: — De acôrdo com o que foi dito no número anterior, precisamos calcular a razão de uma progressão aritmética de 6 têrmos, cujos têrmos extremos são 11 e 31. São dados, portanto,

$$a_1 = 11 \qquad a_6 = 31 \qquad n = 6$$

Aplicando a fórmula (6), obtemos

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{31-11}{6-1} = 4$$

A progressão pedida será

$$: 11 \,.\, 15 \,.\, 19 \,.\, 23 \,.\, 27 \,.\, 31$$

12. Observação. — Notemos que, no problema anterior, n representa o número de têrmos inseridos mais 2. Chamando, então, p o número de têrmos inseridos, podemos escrever

$$n = p + 2$$

A expressão de r ficará, então,

$$r = \frac{B-A}{n-1} = \frac{B-A}{p+2-1} = \frac{B-A}{p+1}$$

sendo A e B os números na ordem dada.

Êste resultado mostra que *a razão da progressão formada pela inserção de p meios aritméticos entre dois números A e B se obtém dividindo a diferença $B - A$ por $p + 1$.*

N **13. Generalização.** —

I. Consideremos a progressão

$$: a_1 \,.\, a_2 \,\ldots\, a_n$$

Inserindo p meios aritméticos entre cada dois têrmos consecutivos, de acôrdo com a observação anterior, as razões das progressões, assim formadas, serão respectivamente os quocientes das diferenças

$$a_2 - a_1, \; a_3 - a_2, \; \ldots\ldots \; a_n - a_{n-1}$$

por $p+1$. Como essas diferenças são todas iguais, as razões das progressões são também iguais, de modo que o conjunto das $n-1$ progressões, assim formadas, constitue uma progressão única, contendo $n + p\,(n-1)$ têrmos e cujos têrmos extremos são a_1 e a_n.

Por exemplo, se inserirmos tres meios aritméticos entre cada dois têrmos consecutivos da progressão

$$:5\,.\,13\,.\,21\,.\,29$$

obteremos a progressão

$$:5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13\,.\,15\,.\,17\,.\,19\,.\,21\,.\,23\,.\,25\,.\,27\,.\,29$$

II. Consideremos dois têrmos consecutivos a_{k-1} e a_k de uma progressão aritmética de razão r. Se inserirmos $p-1$ meios aritméticos entre êsses dois têrmos, obteremos, como já vimos, uma progressão aritmética cuja razão é $\frac{r}{p}$. Inserindo, a seguir, $p'-1$ meios aritméticos entre cada dois têrmos consecutivos dessa nova progressão, obteremos uma outra cuja razão é

$$\frac{r}{p} \div p' \quad \text{ou} \quad \frac{r}{pp'}$$

Como essa razão é exatamente aquela que se obtém, inserindo $pp'-1$ têrmos entre a_{k-1} e a_k, concluimos:

Inserir $p-1$ meios aritméticos entre dois números dados e, em seguida, $p'-1$ meios aritméticos entre cada dois têrmos consecutivos da progressão formada, equivale a inserir $pp'-1$ meios aritméticos entre os números dados.

Êste resultado pode ser facilmente generalizado, chegando-se a concluir que, inserir $p-1$ meios aritméticos entre dois números dados, e, a seguir, sucessivamente $p'-1$, $p''-1$, ... meios aritméticos entre cada dois têrmos consecutivos da progressão anteriormente formada, equivale a inserir $p\,.\,p'\,.\,p''\,......-1$ meios aritméticos entre os números dados.

14. Teorema. — *Dada uma progressão aritmética crescente e um número A arbitrário, existe um número n tal que o têrmo de ordem n da progressão seja superior a A.*

Realmente, sendo (**n.°** 4)

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

o têrmo de ordem n da progressão, se n crescer indefinidamente, a_n crescerá ultrapassando qualquer limite. Para determinar o menor valor (inteiro) de n verificando a desigualdade

$$a_1 + (n-1)r > A$$

bastará resolve-la em relação a n o que dá (*)

$$n > 1 + \frac{A - a_1}{r}$$

(*) Como r é positivo podemos dividir ambos os membros da desigualdade por r sem mudar o seu sentido.

e atribuir a n o primeiro valor inteiro superior ou igual ao da expressão $1 + \frac{A - a_1}{r}$.

Êste teorema poderia, também, ser assim enunciado:

Em toda progressão aritmética crescente, o têrmo geral a_n cresce com n, de modo a ultrapassar qualquer valor arbitràriamente escolhido.

EXEMPLO: — Determinar o primeiro têrmo da progressão

$$:-20\,.\,-17\,.\,-14\,....$$

que seja superior ao número 104.

RESOLUÇÃO: — Sendo $r = 3$ a razão desta progressão, será

$$1 + \frac{A - a_1}{r} = 1 + \frac{104 + 20}{3} = 42\frac{1}{3}$$

e, de acôrdo com o que foi dito, será $n = 43$, isto é, o têrmo pedido será o quadragésimo terceiro.

15. Têrmos equidistantes dos extremos. — Diz-se que dois têrmos de uma progressão aritmética limitada são *equidistantes dos extremos*, quando o número de têrmos da progressão que precedem o primeiro é igual ao número de têrmos da progressão que seguem o segundo. Por exemplo, na progressão

$$:2\,.\,7\,.\,12\,.\,17\,.\,22\,.\,27\,.\,32\,.\,37\,.\,42$$

os têrmos 17 e 27 são equidistantes dos extremos, porque há tres têrmos precedendo 17 e tres em seguida a 27.

16. Propriedade. — Consideremos a progressão

$$:a_1\,.\,a_2\,....\,a_{k+1}\,....\,a_{n-k}\,....\,a_n$$

na qual os têrmos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, visto que há k têrmos antes de a_{k+1} e k têrmos depois de a_{n-k}.

De acôrdo com a fórmula do têrmo geral (**n.°** 4), temos, designando por r a razão da progressão

$$a_{k+1} = a_1 + kr$$

Para a progressão de $k+1$ têrmos, cujo primeiro têrmo é a_{n-k} e cujo último têrmo é a_n, podemos escrever (**n.°** 6)

$$a_{n-k} = a_n - kr$$

5. Resolver a equação

$$2{,}634^{x-1} = 3{,}41$$

Resp.: 2,266

6. Resolver a equação

$$(a^{x+2})^x = a^{3x}$$

Resp.: $x' = 0,\ x'' = 1$

7. Resolver a equação

$$(5^{x-1})^{x-4} = 625$$

Resp.: $x' = 5,\ x'' = 0$

8. Resolver a equação

$$2^{(x-1)(x+3)} = 1$$

Resp.: $x' = 1,\ x'' = -3$

9. Resolver a equação

$$\sqrt[x]{a} = a^{4x}$$

Resp.: $x = \pm \frac{1}{2}$

10. Resolver a equação

$$2^{x+3} + 4^x = 128$$

Resp.: $x = 3$

21-6- 11. Resolver a equação

$$4^{x+2} - 2^{x+3} = 48$$

Resp.: $x = 2$ 1

12. Resolver a equação

$$3^x + 9^x = 90$$

Resp.: $x = 2$

13. Resolver a equação

$$\boxed{4^{\sqrt{x}} = 256}$$

Resp.: $\boxed{x = 16}$

14. Resolver a equação

$$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 30$$

Resp.: $x = 4$

15. Resolver a equação

$$2^x + 2^{x+1} + \frac{8}{2^{x-1}} = 49$$

Resp.: $x = 4$

$4^{2+2} - 2^{2+3} = 48$

$4^4 - 2^5 = 48$

$256 - 32 = 224.$

$16 \times 16 = 256$

$4^{1+2} - 2^{1+3}$

$4^3 - 2^4 = 48$

$64 - 16 = 48.$

CAPÍTULO II

Álgebra

UNIDADE

O binômio de *Newton*

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

1. Noções sôbre Análise Combinatória.
2. Binômio de Newton.

$a^{\frac{1}{x}} = a^{4x}$

$\frac{1}{x} = 4x$

$1 = 4x^2$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \sqrt{\frac{1}{4}}$

$x = \pm\frac{1}{2}$

$2^x + \frac{2^x}{2} + \frac{2^x}{2^2} + \frac{2^x}{2^3} = 30.$

$2^3 \cdot 2^x + 2^2 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x + 2^x = 30.$

$2^x(2^3 + 2^2 + 2 + 1) = 30 \times 2^3$

$2^x = \frac{30 \times 8}{8+4+2+1}$

$2^x = \frac{30 \times 8}{15}$

$2^x = 2 \cdot 2^3$

$2^x = 2^4$

$x = 4.$

NOÇÕES SÔBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. Preliminares. — Dados m elementos distintos

$$a_1, a_2, \dots a_m$$

tomando-se p dêsses elementos (sendo $p \leqq m$) e dispondo-os *linearmente*, forma-se um agrupamento de *módulo, classe* ou *ordem p*. Nos casos particulares de p igual a 2, 3 e 4, os agrupamentos podem denominar-se *binários, ternários* e *quaternários* respectivamente.

Um agrupamento pode ser *simples* ou *com repetição*. No primeiro caso nenhum elemento figura mais de uma vez no agrupamento; no segundo caso, pelo menos um elemento aparece duas ou mais vezes no agrupamento.

Com os m elementos anteriores podem ser formados diferentes tipos de agrupamentos, como veremos a seguir. A determinação do número dêstes agrupamentos, de grande importância em diversos ramos da Matemática (como, por exemplo, no Cálculo das Probabilidades), constitui o objetivo da *Análise Combinatória* ou *Cálculo Combinatório*.

Um agrupamento de p dos m elementos dados (sendo $p \leqq m$) pode ser considerado, prescindindo-se ou não da *ordem* dêstes p elementos. No primeiro caso, dois agrupamentos são *idênticos* quando *contêm os mesmos elementos, qualquer que seja sua ordem*, considerando-se *distintos* dois agrupamentos *que difiram de, pelo menos, um elemento*. No segundo caso, dois agrupamentos são *idênticos* quando são *constituídos dos mesmos elementos, dispostos numa mesma ordem*, considerando-se *distintos* dois agrupamentos que difiram de, pelo menos, um elemento ou dois agrupamentos de mesmos elementos em que, *pelo menos, dois elementos iguais não ocupem a mesma posição*.

Um agrupamento de p elementos distintos, tirados dos m elementos dados, abstração feita de sua ordem (tal como foi definido no primeiro caso) denomina-se *combinação simples de classe p* dêsses m elementos.

Um agrupamento ordenado de p elementos distintos tirados dos m elementos dados (tal como foi definido no segundo caso) chama-se *arranjo simples* ou *disposição simples de classe p* dêsses m elementos (*).

No caso particular de $p = m$ tem-se evidentemente *uma única combinação* dos m elementos e tantos arranjos quantos são os diferentes modos de ordena-los. Êsses *arranjos simples de classe m dos m elementos* recebem a denominação especial de *permutações simples* dêsses m elementos.

Resumindo as considerações feitas, podemos, em conclusão, dar as seguintes definições:

1) *Arranjos simples de classe p de m elementos* ou *arranjos simples de m elementos p a p* são todos os agrupamentos de p elementos tirados dentre os m elementos dados, de modo que cada agrupamento se diferencie de outro, seja pela *natureza*, seja pela *ordem* de seus elementos;

2) *permutações simples* de m elementos são todos os agrupamentos de m elementos sem repetição que se podem formar com os m elementos dados, de modo que cada agrupamento se diferencie de outro pela ordem de seus elementos;

3) *combinações simples de classe p de m elementos* ou *combinações simples de m elementos p a p* são todos os agrupamentos de p elementos distintos tirados dentre os m elementos dados de modo que cada agrupamento se diferencie de outro pela *natureza* de seus elementos.

2. Formação dos arranjos simples. — Consideremos, para fixar as idéias, quatro elementos: a, b, c, d.

Conforme será demonstrado mais adiante, obtém-se os *arranjos binários* dêsses quatro elementos, juntando-se a cada elemento sucessivamente os outros *tres*. Então, os arranjos binários dos quatro elementos são

$$\begin{matrix} ab & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc \end{matrix}$$

(*) A denominação *disposição* é usada por muitos autores italianos como PINCHERLE, SEVERI, SIBIRANI, TRICOMI, VITALI, etc.. REY-PASTOR usa a denominação *variação*.

Juntando-se, a seguir, a cada um dêstes agrupamentos binários sucessivamente os *dois* elementos que nêle não figuram, obtém-se os *arranjos ternários*, ou sejam

$$\begin{matrix} abc & bac & cab & dab \\ abd & bad & cad & dac \\ acb & bca & cba & dba \\ acd & bcd & cbd & dbc \\ adb & bda & cda & dca \\ adc & bdc & cdb & dcb \end{matrix}$$

Demonstremos que êste processo de formação é geral, isto é, que dados m elementos distintos, se obtém os *arranjos binários simples* dêles, juntando-se a cada um dêles sucessivamente os $m-1$ elementos restantes; que se obtém os *arranjos ternários simples* dos m elementos, juntando-se a cada agrupamento binário sucessivamente os $m-2$ elementos que nêle não figuram, e, assim, por diante.

Para isto admitamos que estejam formados todos os arranjos $p-1$ a $p-1$ dos m elementos dados, e demonstremos que, acrescentando-se a cada um dêstes agrupamentos de classe $p-1$, *numa certa posição*, sucessivamente todos os $m-(p-1)$ elementos que nêle faltam, obtemos os arranjos de m elementos p a p. Para facilidade de exposição suponhamos que cada elemento seja acrescentado depois do último elemento.

Demonstremos, então, que:

1) *os arranjos de classe p, assim obtidos, são simples;*

2) *não há falta nem repetição de arranjos de classe p.*

De fato, como os arranjos de classe $p-1$ são simples, juntando-se a êles sucessivamente elementos que nêles não figuram, os arranjos de classe p, assim obtidos, são, também, *simples*. Por outro lado, não poderá faltar um arranjo de classe p, pois, neste caso, em contradição com a hipótese, faltaria o arranjo de classe $p-1$, que se obtém daquele suprimindo-se o seu último elemento. Igualmente, nenhum arranjo de classe p, formado pelo processo anterior, poderá ser obtido duas vezes, porque dois arranjos quaisquer de classe p, assim obtidos, diferem, seja pelo último elemento, quando provêm do mesmo arranjo de classe $p-1$, seja pela ordem ou pela natureza dos $p-1$ primeiros elementos, quando se originam de dois arranjos distintos de classe $p-1$.

3. Número de arranjos simples de classe p de m elementos. — Representa-se por um dos símbolos A_m^p ou $A_{m,p}$ o *número de arranjos simples de m elementos p a p* (*).

Da demonstração anterior se conclui que *o número de arranjos de classe p de m elementos é igual ao produto de $m-(p-1)$ pelo número de arranjos de classe $p-1$ dêsses elementos.*

Adotando, então, a primeira das notações acima referidas, podemos escrever

$$A_{m,p} = \left[m-(p-1)\right] A_{m,p-1}$$

Sendo geral esta relação, podemos estabelece-la para diferentes valores de p. Observando que, evidentemente $A_m^1 = m$ resultam as p relações

$$\begin{aligned} A_{m,1} &= m \\ A_{m,2} &= (m-1)\,A_{m,1} \\ A_{m,3} &= (m-2)\,A_{m,2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m,p} &= \left[m-(p-1)\right] A_{m,p-1} \end{aligned}$$

Multiplicando-as, membro a membro, e suprimindo os fatores comuns a ambos os membros, obtemos a fórmula do número de arranjos simples de m elementos p a p

$$\boxed{A_{m,p} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)} \qquad (1)$$

CONCLUSÃO: *O número de arranjos simples de m elementos p a p é dado pelo produto de p números inteiros, consecutivos e decrescentes a partir de m.*

Por exemplo o número de arranjos de 10 elementos 3 a 3 é dado pelo produto dos tres números 10, 9 e 8, ou

$$A_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

(*) Os autores que adotam a denominação *disposições* representam o seu número por $D_{m,p}$ ou D_m^p; os que empregam a denominação *variações* representam-no por $V_{m,p}$ ou V_m^p.

4. Formação das permutações simples. — Sendo as *permutações simples de m elementos*, por definição, os *arranjos simples de classe m* dos mesmos, sua formação, de acôrdo com esta definição, exigiria a formação sucessiva de todos os arranjos simples de ordens 1, 2, ... $p-1$. Pode-se, entretanto, seguindo-se rumo diferente, evitar êsse longo processo.

Consideremos as duas permutações simples

ab *ba*

de *dois* elementos a e b.

Como será demonstrado mais adiante, obtém-se as permutações simples de *tres* elementos a, b, c acrescentando-se o elemento c a cada grupo anterior em cada uma das tres posições possiveis: depois do segundo elemento, entre o primeiro e o segundo, e antes do primeiro. Obtém-se, então,

abc	*bac*
acb	*bca*
cab	*cba*

Formam-se, anàlogamente, as permutações de *quatro* elementos a, b, c, d, acrescentando-se o quarto elemento d a todas as permutações anteriores, em cada uma das quatro posições possiveis. Obtém-se, então (*),

abcd	*bacd*
abdc	*badc*
adbc	*bdac*
dabc	*dbac*
acbd	*bcad*
acdb	*bcda*
adcb	*bdca*
dacb	*dbca*

(*) Êste processo de formação, apesar de ser o mais simples, entretanto, não dá as permutações numa sucessão ordenada. Assim, o grupo *dabc* precede o grupo *acbd*, o que significa, substituindo as letras a, b, c, d respectivamente pelos números 1, 2, 3, 4, que o número 4123 precede o número 1324. Para conhecer um processo de formação ordenada, o leitor interessado poderá consultar J. REY-PASTOR, *Elementos de Análisis Algebraico*, Madrid, 1939, 5.ª ed., pág. 138.

52. Exercícios para resolver. —

1. Calcular o desenvolvimento de $(x+2)^4$.
   Resp.: $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$
2. Calcular o desenvolvimento de $\left(2x + \dfrac{a}{2}\right)^5$.
   Resp.: $35x^5 + 40ax^4 + 20a^2x^3 + 5a^3x^2 + \dfrac{5}{8}a^4x + \dfrac{a^5}{32}$
3. Calcular o desenvolvimento de $(x-2a)^3$.
   Resp.: $x^3 - 6a^2x + 12ax^2 - 8a^3$
4. Calcular o desenvolvimento de $(1-2x)^6$.
   Resp.: $1 - 12x + 60x^2 - 160x^3 + 240x^4 - 192x^5 + 64x^6$.
5. Calcular o quarto têrmo do desenvolvimento de $(3+x)^6$.
   Resp.: $540x^3$
6. Calcular o têrmo central do desenvolvimento de $(x+1)^{12}$.
   Resp.: $924x^6$
7. Calcular o desenvolvimento de
   $$(x+1)^m + (x-1)^m$$
   Resp: $2\left[x^m + \binom{m}{2}x^{m-2} + \binom{m}{4}x^{m-4} + \dots\right]$
8. Calcular a soma dos cubos dos vinte primeiros números naturais, aplicando a fórmula da potência m do binômio.
   Resp.: 36 100
9. Calcular o desenvolvimento de $(2x^2 - 8x + 3)^2$
   Resp.: $4x^4 - 32x^3 + 76x^2 - 48x + 9$
10. Calcular o desenvolvimento de
    $$(1 + 2a + 3a^2 + 4a^3)^2$$
    Resp.: $1 + 4a + 10a^2 + 20a^3 + 25a^4 + 24a^5 + 16a^6$
11. Calcular o desenvolvimento de
    $$(1 + x + x^2 + \dots)^2$$
    Resp.: $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$
12. Determinar pela fórmula de Leibniz o desenvolvimento de
    $$(a + b + c + \dots + l)^m$$
    Resp.: $\Sigma\, a^4 + 4\,\Sigma\, a^3b + 6\,\Sigma\, a^2b^2 + 12\,\Sigma\, a^2bc + 24\,\Sigma\, abcd$

CAPÍTULO III

Algebra

UNIDADE

Determinantes

CURSO CIENTÍFICO

1. Teoria dos determinantes.
2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regra de Cramer; teorema de Rouché.

TEORIA DOS DETERMINANTES

1. Preliminares. — A teoria dos determinantes tem sua origem nas pesquisas iniciadas por Leibniz, em 1678, no sentido de simplificar as trabalhosas eliminações necessárias à resolução de um sistema de m equações lineares com m incógnitas.

Seguem-se, na ordem cronológica, os trabalhos de Cramer (1750), Bezout (1764), Laplace (1772), Vandermonde (1772), Lagrange (1773), Cauchy (1815) a quem se deve uma sistematização completa dos trabalhos de todos os seus antecessores além de suas notaveis contribuições e Jacobi (1841) cujos estudos sôbre os determinantes funcionais grande auxilio deram à Análise. O primeiro tratado sistemático e completo sôbre o assunto é de Brioschi (1854), seguindo-se-lhe, então, outros entre os quais se destaca o de Günther (1877) que fornece detalhada indicação bibliográfica para cada parte da teoria e um resumo histórico de seu desenvolvimento (*).

Tendo sua origem num problema de Álgebra Elementar, a teoria dos determinantes desenvolveu-se a tal ponto, que hoje constitui um algoritmo de suma importância tanto na Análise como na Geometria (**).

2. Classe de uma permutação. — Dados m elementos $a, b, \ldots l$, tomemos uma de suas $m\,!$ permutações, por exemplo

$$ab \ldots l$$

que designaremos *fundamental*, *principal* ou *direta*.

(*) Cfr. Ernesto Pascal, *I Determinanti*, Milano, Ulrico Hoepli, 2.ª ed., 1923, pág. 4.

(**) *"Conviene però avvertir subito que l'importanza dei determinanti trascedi di gran lunga quella del problema da cui essi hanno preso origine. I determinanti sono uno strumento conciso e potente, di uso continuo nella matematica pura e aplicata"*. (Francesco Severi, *Lezioni di Analisi*, Bologna, N. Zanichelli Editore, 1938, 1.º vol., 2.ª ed., pág. 23).

Diremos, então, que dois elementos em uma qualquer outra permutação dêsses m elementos formam uma *inversão*, quando estão em ordem inversa àquela em que se acham na permutação principal.

Consideremos, por exemplo, os cinco elementos a, b, c, d, e e tomemos para permutação principal aquela em que se acham na ordem alfabética *abcde*. Assim sendo, uma permutação *daceb* apresentará cinco inversões, a saber, as inversões da, $d \ldots c$, $d \ldots b$, $c \ldots b$, eb.

Diz-se que uma permutação é de *classe par* ou de *classe ímpar* segundo apresenta um número par ou ímpar de inversões. Por exemplo, a permutação acima *daceb* é de classe ímpar, porque, como vimos, apresenta 5 inversões.

3. Teorema. —

I. Consideremos uma permutação

$$a \ldots c\,e\,b\,f \ldots l \qquad (1)$$

de m elementos dados e permutemos dois elementos *consecutivos* quaisquer, como por exemplo e e b,

$$a \ldots c\,b\,e\,f \ldots l \qquad (2)$$

Evidentemente não foi alterada a posição de cada um dêstes dois elementos em relação aos demais $m-2$, havendo, apenas, alteração na sua posição recíproca. Logo o número de inversões da permutação *diminuiu ou aumentou de uma unidade*, conforme os dois elementos formavam ou não uma inversão em (1). Resulta daí que a permutação (2) não é da mesma classe da permutação (1).

II. Consideremos, ainda, uma permutação

$$a \ldots e\,c\,d \ldots f\,b \ldots l \qquad (3)$$

dos mesmos m elementos, e permutemos dois *elementos não consecutivos* e e b, entre os quais existem r ($r \geqq 1$) elementos. Poderemos realizar esta permuta, fazendo, em primeiro logar, o elemento à esquerda e avançar r posições (para a direita), e, em seguida, o elemento à direita b retroceder $r+1$ posições (para a esquerda). Isto equivale a realizar sucessivamente um número ímpar $2r+1$ de permutações de dois elementos consecutivos, do que decorre, em virtude do resultado anterior, haver uma mudança de classe na permutação.

Os resultados acima permitem-nos enunciar o seguinte teorema:

Trocando-se dois elementos quaisquer de uma permutação, esta muda de classe.

4. Observações. —

I. Se considerarmos

$$a\,b\,c \ldots k\,l$$

como *permutação principal* dos m elementos $a, b, c, \ldots k, l$, o *número máximo* de inversões aparece, quando, dois a dois, todos os elementos formam inversão, ou seja na permutação

$$l\,k \ldots c\,b\,a$$

Êste número máximo de inversões é portanto, o número de combinações de m elementos dois a dois, isto é, $\binom{m}{2}$

II. Consideremos, entre as $m!$ permutações dos m elementos $a, b, \ldots l$, as de classe par. Permutando dois elementos prèviamente prefixados, em cada uma destas permutações de classe par, obteremos o mesmo número de permutações de classe ímpar. Recìprocamente, a permutação de dois elementos, prèviamente escolhidos, em cada uma das permutações de classe ímpar dos m elementos, forma permutações de classe par dos mesmos.

Concluimos, pois:

O número de permutações de classe par de m elementos é igual ao número de permutações de classe ímpar dêsses elementos.

5. Matriz quadrada. — Um conjunto de n^2 elementos, dispostos num quadro, como o que se segue,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad (4)$$

denomina-se *matriz quadrada de ordem n*. O n conjunto de elementos situados numa mesma *horizontal* denomina-se *linha* da matriz e o conjunto de n elementos que figuram numa mesma *vertical* chama-se *coluna*. Chama-se *fila* da matriz indiferentemente uma *linha* ou uma *coluna*. Dêste modo, por *filas para-*

lelas entendem-se *linhas* ou *colunas*, e por *filas perpendiculares* uma linha e uma coluna (*).

Cada um dos n^2 elementos da matriz (4) está afetado de dois índices: um *superior*, indicando sua *coluna*, isto é, sua posição sôbre a horizontal, e outro *inferior* indicando sua linha, ou seja, sua posição sôbre a vertical. Dêste modo, a^i_j indica *elemento da coluna i e da linha j*.

Chama-se *diagonal principal* da matriz (4) à sucessão, ordenada em relação aos índices,

$$a^1_1\ a^2_2\ \dots\ a^n_n$$

dos elementos afetados de dois índices iguais, e *diagonal secundária* à sucessão ordenada em relação aos índices das linhas e das colunas

$$a^1_n\, a^2_{n-1}\ \dots\ a^n_1$$

dos elementos cuja soma dos índices é $n + 1$.

Dois elementos a^r_s e a^s_r dizem-se *simétricos* em relação à diagonal principal. Se, quaisquer que sejam r e s, se tem

$$a^r_s = a^s_r$$

diz-se que a *matriz* (4) *é simétrica*.

Consideremos uma permutação

$$a^{\alpha'}_{\alpha}\ a^{\beta'}_{\beta}\ \dots\ a^{\lambda'}_{\lambda} \qquad (5)$$

formada de n elementos tirados de (4), sendo um, e somente um, de cada linha e de cada coluna. Nestas condições a sucessão $\alpha'\beta'\dots\lambda'$ dos índices superiores de (5) é uma permutação dos números 1, 2, ... n; o mesmo diremos para a sucessão $\alpha\beta\dots\lambda$ dos índices inferiores.

Atribuamos à permutação (5) o sinal + ou o sinal — segundo as permutações

$$\alpha'\beta'\dots\lambda' \qquad (6)$$

e

$$\alpha\beta\dots\lambda \qquad (7)$$

sejam ou não *de mesma classe* (n.° 2).

(*) O estabelecimento de uma denominação comum para linha ou coluna, muito difundido entre os autores italianos, simplifica, como veremos, os enunciados dos teoremas sôbre determinantes.

E' evidente, então, que uma troca de dois elementos quaisquer de (5) não altera o seu sinal, porque acarreta simultâneamente a mudança de paridade de cada uma das permutações (6) e (7) (n.° 3).

Ora, da regra dada acima para o sinal de (5), concluimos que esta permutação é *positiva* ou *negativa*, conforme a soma $I + I'$ dos números de inversões de (7) e (6) respectivamente seja *par* ou *ímpar*. Podemos, então, ordenar os elementos de (5) segundo os seus índices superiores (ou inferiores) o que equivale a anular I' (ou I) e atribuir-lhe o sinal + ou o sinal — conforme o número de inversões I (ou I') de seus índices inferiores (ou superiores) seja par ou ímpar.

6. Determinante. — Consideremos, então, a permutação (5) supondo seus elementos ordenados em relação a seus índices superiores e, sendo $\alpha''\beta''\dots\lambda''$ a sucessão de seus índices inferiores, formemos o produto P de seus n elementos

$$P = a^1_{\alpha''}\cdot a^2_{\beta''}\ \dots\ a^n_{\lambda''} \qquad (8)$$

Podemos, então, atribuir ao produto P o sinal da permutação

$$a^1_{\alpha''}\ a^2_{\beta''}\ \dots\ a^n_{\lambda''}$$

de seus fatores, porque, como foi visto acima, êste sinal é independente da ordem dos mesmos, o que o torna compatível com a propriedade comutativa da multiplicação. Ora há tantos produtos P quantas são as permutações dos n números 1, 2, ... n, ou sejam, $n!$

Anàlogamente formamos os produtos P', cujos elementos estão ordenados segundo os índices das linhas

$$P' = a^{\alpha'''}_1\ a^{\beta'''}_2\ \dots\ a^{\lambda'''}_3 \qquad (9)$$

aos quais se aplicam, *mutatis mutandis*, as considerações feitas sôbre P.

Chama-se, então, *determinante da matriz quadrada* (4) à soma algébrica de todos os produtos P ou P', obtidos de acôrdo com a regra indicada. Sendo p'' e p''' respectivamente os números de inversões das permutações $\alpha''\beta''\dots\lambda''$ e $\alpha'''\beta'''$

... λ''', podemos escrever as seguintes expressões simbólicas do determinante

$$\Delta = \Sigma\,(-1)^{p''}\, a^1_{\alpha''}\, a^2_{\beta''} \dots a^n_{\lambda''} \tag{10}$$

$$\Delta = \Sigma\,(-1)^{p'''}\, a^{\alpha'''}_1\, a^{\beta'''}_2 \dots a^{\lambda'''}_n \tag{11}$$

O número n indica a ordem do determinante.

7. Determinante de segunda ordem. — Consideremos o determinante de 2.ª ordem

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 \\ a^1_2 & a^2_2 \end{vmatrix}$$

Segundo a regra anterior, obtemos seu desenvolvimento, considerando o produto

$$a^1_1\; a^2_2$$

e permutando de todos os modos possiveis seus índices superiores ou inferiores. Permutemos, por exemplo, os primeiros. Como só há duas permutações 12 e 21 dos índices, o desenvolvimento terá apenas dois têrmos $a^1_1\, a^2_2$ e $a^2_1\, a^1_2$, respectivamente positivo e negativo, de acôrdo com a regra dada dos sinais. Então,

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 \\ a^1_2 & a^2_2 \end{vmatrix} = a^1_1\, a^2_2 - a^2_1\, a^1_2$$

CONCLUSÃO: *O desenvolvimento de um determinante de 2.ª ordem é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.*

8. Exercício. — *Calcular o valor do determinante*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

RESOLUÇÃO: De acôrdo com a regra anterior, temos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4 - 3(-5) = 8+15 = 23$$

9. Determinante de terceira ordem. — Tomemos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 \end{vmatrix}$$

e formemos o produto

$$a^1_1\quad a^2_2\quad a^3_3 \tag{11 a}$$

dos elementos de sua diagonal principal. De acôrdo com a regra dada, efetuando, por exemplo, todas as permutações dos índices superiores de (11 a), obteremos os têrmos do desenvolvimento de Δ, cujos sinais são dados de acôrdo com a classe destas permutações. Teremos, então, como é facil verificar

$$\Delta = a^1_1 a^2_2 a^3_3 - a^1_1 a^3_2 a^2_3 + a^3_1 a^1_2 a^2_3 - \\ - a^2_1 a^1_2 a^3_3 + a^2_1 a^3_2 a^1_3 - a^3_1 a^2_2 a^1_3$$

Na prática, obtém-se ràpidamente êste desenvolvimento pela seguinte *regra de Sarrus:* forma-se o quadro

$$\begin{array}{ccccc} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 & a^1_1 & a^2_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 & a^1_2 & a^2_2 \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 & a^1_3 & a^2_3 \end{array}$$

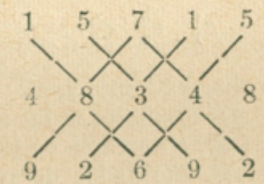
repetindo-se à direita da terceira coluna as duas primeiras na ordem em que se acham no determinante. Os têrmos positivos do determinante são os produtos dos elementos da diagonal principal e dos elementos situados em linhas paralelas; os têrmos negativos são os produtos dos elementos da diagonal secundária e os elementos situados em linhas paralelas.

Outra modalidade da *regra de Sarrus* consiste em repetir abaixo da última linha as duas primeiras, na sua ordem, e aplicar aos elementos do quadro obtido a mesma regra.

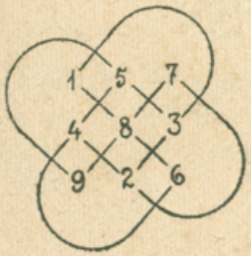
10. Exercício. — *Calcular o valor do determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

RESOLUÇÃO: Aplicando a regra de Sarrus, obtemos



$$\Delta = 1\times8\times6+5\times3\times9+7\times4\times2-9\times8\times7-2\times3\times1-$$
$$-6\times4\times5 = -391$$



11. Observação. — Com um pouco de prática, entretanto, pode-se obter facilmente o desenvolvimento de um determinante de 3.ª ordem, sem necessidade de repetir linhas ou colunas, bastando adotar o esquema ao lado (que pode até ser realizado mentalmente).

12. Determinantes de ordem superior à terceira. — Vimos que o desenvolvimento de um determinante de ordem n tem $n!$ têrmos. Assim o determinante de 4.ª ordem tem 24 têrmos, o de 5.ª ordem 120 têrmos etc. Para êstes não há uma regra prática (como a regra de Sarrus) que permita formar rapidamente o seu desenvolvimento. Veremos, entretanto, mais adiante, no estudo de *determinantes menores*, os recursos que podem ser utilizados para o seu cálculo.

13. Propriedades dos determinantes. — Veremos, adiante, que o cálculo dos determinantes pode ser grandemente simplificado com o auxilio das propriedades dos mesmos, que passaremos a estudar.

14. Teorema. — Consideremos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad (12)$$

e formemos o determinante Δ'

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots\ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots\ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots\ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

cujos elementos de cada coluna são os elementos da linha de mesma ordem de Δ.

Seja
$$T = a_\alpha^1 \cdot a_\beta^2 \cdots a_\lambda^n$$

um têrmo qualquer de Δ, cujo sinal é dado pela permutação $\alpha\beta \ldots \lambda$ dos índices das linhas. Ora, a êste têrmo corresponde um têrmo

$$T' = a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \cdots a_n^\lambda$$

de Δ', constituido dos mesmos elementos de T, e cujo sinal é o mesmo de T.

Assim, os desenvolvimentos de Δ e Δ' são iguais, o que nos permite concluir a propriedade:

Um determinante não se altera quando se trocam suas linhas por suas colunas, respeitada sua ordem.

15. Observação. — Do teorema anterior decorre que qualquer propriedade relativa às *linhas* (ou às *colunas*) de um determinante se aplica igualmente às *colunas* (ou às *linhas*). Podemos, então, de agora em diante, adotar a denominação *fila*, para designar indiferentemente uma linha ou uma coluna (n.º 5).

16. Teorema. — Troquemos no determinante (12) duas filas paralelas, como, por exemplo, as colunas de ordens r e s. Isto acarretará, em cada um dos têrmos do desenvolvimento de Δ, supostos ordenados em relação aos índices das linhas,

ÍNDICE

LOGARITMOS

RESOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

CAPÍTULO II : O binômio de Newton

NOÇÕES SÔBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

BINÔMIO DE NEWTON

CAPÍTULO III: Determinantes

TEORIA DOS DETERMINANTES

EQUAÇÕES LINEARES

CAPÍTULO IV: Frações contínuas

CAPÍTULO V: Os corpos redondos

NOÇÕES SÔBRE SUPERFÍCIES

CILINDRO DE REVOLUÇÃO

CONE E TRONCO DE CONE DE REVOLUÇÃO

ESFERA

EXERCÍCIOS SÔBRE POLIEDROS E CORPOS REDONDOS

CAPÍTULO VI : Vetores

NOÇÕES SÔBRE VETORES

CAPÍTULO VII : Projeções

CAPÍTULO VIII : Funções circulares

NOÇÕES SÔBRE ARCOS E ÂNGULOS

FUNÇÕES CIRCULARES

REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES CIRCULARES DE UM MESMO ARCO

CÁLCULO DAS FUNÇÕES CIRCULARES DOS ARCOS $\frac{p\pi}{n}$

CAPÍTULO IX : Transformações trigonométricas

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE ARCOS

TRANSFORMAÇÃO DE SOMAS EM PRODUTOS

USO DAS TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS

Capítulo X : Equações trigonométricas

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Capítulo XI : Resolução de triângulos

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS OBLIQUÂNGULOS

APLICAÇÕES À TOPOGRAFIA