

THALES MELLO CARVALHO

MATEMÁTICA

PARA OS CURSOS
CLÁSSICO e
CIENTÍFICO

2.^a SÉRIE

Companhia Editora Nacional
São Paulo - Rio de Janeiro - Recife - Bahia - Pôrto Alegre

Fortunato Antonio

anglo
Osasco

14
8
6

15

MATEMÁTICA

SEGUNDA SÉRIE

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

M-40

DO MESMO AUTOR

1. *Curiosidades Matemáticas* (Distribuidores: Livraria Civilização Brasileira).
2. *Elementos de Matemática Comercial e Financeira* (Cia. Editora Nacional).
3. *Matemática*, para a Primeira Série dos Cursos Clássico e Científico (Cia. Editora Nacional).
4. *Matemática*, para a Terceira Série dos Cursos Clássico e Científico (Cia. Editora Nacional).
5. *Lições de Trigonometria Retilínea* (Edição do autor).
6. *Lições de Matemática* 1.º e 2.º fascículos (edições do autor), esgotados.
7. *Sobre um sistema de amortização por anuidades variáveis* (Separata da Revista Brasileira de Atuária, Julho de 1942).

NOTA

As referências ao nosso volume *Matemática* para a Primeira Série dos Cursos Clássico e Científico serão feitas simplesmente com a indicação: *Vol. I.*

THALES MELLO CARVALHO

De Ensino Secundário da Prefeitura do Distrito Federal, dos Colégios Andrews, La-Fayette e Sto. Ignácio.

+

MATEMÁTICA

De acôrdo com os programas
dos Cursos

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

+

SEGUNDA SÉRIE

leonardo da vinci

BIBLIOTECA

n.º 339 data: 08/08/84

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

SÃO PAULO - RIO DE JANEIRO - RECIFE - BAHIA - PORTO ALEGRE

1944

510
C331m

PREFÁCIO

Apresentando o segundo volume da MATEMÁTICA, destinado aos alunos da segunda série dos Cursos Clássico e Científico, nada temos a acrescentar ao que dissemos no prefácio do primeiro volume. Nossa finalidade é proporcionar ao estudante brasileiro um livro, onde possa encontrar os assuntos, que necessite conhecer, explanados numa linguagem tão clara quanto possível.

De nossos prezados colegas receberemos com satisfação todo juízo crítico sôbre este despretencioso trabalho.

Rio de Janeiro, Janeiro de 1944.

O AUTOR

Exemplar 1168 *

PROGRAMA DE MATEMÁTICA
CURSO CLÁSSICO

Segunda série

ÁLGEBRA

Unidade I. Progressões e logaritmos: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. O binômio de Newton: 1. Noções sobre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

GEOMETRIA

Unidade III. Os corpos redondos: 1. Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade IV. Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noções de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores desliscantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade V. Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VI. Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos de 30° , 45° e 60° .

Unidade VII. Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Uso das tábuas trigonométricas. 3. Resolução de triângulos retângulos.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA
CURSO CIENTÍFICO

Segunda série

ÁLGEBRA

Unidade I. A função exponencial: 1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2. Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4. Resolução de algumas equações exponenciais.

Unidade II. O binômio de Newton: 1. Noções sobre análise combinatória. 2. Binômio de Newton.

Unidade III. Determinantes: 1. Teoria dos determinantes. 2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regras de Cramer; teorema de Rouché.

Unidade IV. Frações contínuas: Noções sobre frações contínuas.

GEOMETRIA

Unidade V. Os corpos redondos: 1. Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2. Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3. Estudo da esfera, área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

TRIGONOMETRIA

Unidade VI. Vetor: 1. Grandezas escalares e vetoriais. 2. Noção de vetor; equipolência. 3. Resultante ou soma geométrica de vetores. 4. Vetores deslizando sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles.

Unidade VII. Projeções: 1. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2. Teorema de Carnot. 3. Valor da projeção de um vetor.

Unidade VIII. Funções circulares: 1. Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2. Funções circulares ou trigonométricas: definições, variação, redução ao primeiro quadrante. 3. Relações entre as funções circulares de um mesmo arco. 4. Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$.

Unidade IX. Transformações trigonométricas: 1. Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2. Transformação de somas em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3. Uso das tábuas trigonométricas.

Unidade X. Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples.

Unidade XI. Resolução de triângulos: 1. Relações entre os elementos de um triângulo. 2. Resolução de triângulos retângulos. 3. Resolução de triângulos oblíquângulos. 4. Aplicações imediatas à topografia.

CAPÍTULO I

Álgebra

UNIDADE

Progressões e logaritmos

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

1. Estudo das progressões aritméticas e geométricas.

CURSO CIENTÍFICO

2. Noção de função exponencial e de sua função inversa.

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

3. Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações.
4. Resolução de algumas equações exponenciais.

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

20 **1. Preliminares.** — Chama-se *progressão aritmética* ou *por diferença* uma sucessão de números (denominados *têrmos*) tais que a diferença entre um termo qualquer a partir do segundo, e o termo precedente seja constante. Essa diferença constante chama-se *razão* da progressão.

Representa-se uma progressão aritmética fazendo-se preceder ao primeiro termo um dos sinais + ou : e separando-se cada dois termos consecutivos por um ponto.

Sendo, então,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

números tais que

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots = r \quad (1)$$

a progressão aritmética (de razão r), cujos termos são êsses números, pode ser assim representada

$$: a_1 . a_2 . a_3 \dots a_{n-1} . a_n \dots \quad (2)$$

Conforme tenha ou não um número limitado de termos, a progressão diz-se *limitada* ou *ilimitada*.

Por exemplo

$$: 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25$$

$$: 8 . 3 . -2 . -7 . \dots$$

são progressões aritméticas de razões 3 e - 5 respectivamente, sendo a primeira limitada e a segunda ilimitada.

2. Observações.

I. Cada termo de uma progressão aritmética, a partir do segundo, é igual ao termo precedente mais a razão.

Realmente, das igualdades (1) a que satisfazem os termos da progressão (2), resulta

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ \dots\dots\dots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned} \quad (3)$$

II. As igualdades (3) mostram que cada termo de uma progressão aritmética é maior ou menor do que o precedente, conforme a razão r seja positiva ou negativa. No primeiro caso diz-se que a progressão é *crecente* e, no segundo, que é *decrecente*. Concluimos, pois:

Uma progressão aritmética é *crecente* ou *decrecente* conforme sua razão seja positiva ou negativa.

3. Propriedade. — Cada termo de uma progressão aritmética, a partir do segundo, é a média aritmética entre o termo precedente e o seguinte.

Realmente, sendo a_{n-1} , a_n e a_{n+1} tres termos consecutivos de uma progressão aritmética, podemos, de acôrdo com a definição, escrever

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

onde tiramos sucessivamente

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

4. Fórmula do termo geral. — Seja a progressão aritmética de razão r

$$: a_1 . a_2 . a_3 \dots a_{n-1} . a_n \dots$$

cujos n primeiros termos, como já vimos (n.º 2), verificam as relações

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Somando, mêmbo a mêmbo, estas $n-1$ igualdades e simplificando os termos comuns a ambos os membros, obtemos a fórmula do termo de ordem n

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (4)$$

que traduz o seguinte teorema:

Cada termo de uma progressão aritmética é igual ao primeiro termo, aumentado do produto da razão pelo número de termos que o precedem.

5. Exercício. — Achar o trigésimo termo da progressão : 5 . 7 . 9 . 11

RESOLUÇÃO: — Temos, usando as notações anteriores,

$$a_1 = 5$$

$$n = 30$$

$$r = 7 - 5 = 2$$

O trigésimo termo a_{30} será, então, de acôrdo com o princípio anterior

$$a_{30} = a_1 + 29r = 5 + 29 \times 2 = 63$$

6. Fórmulas derivadas. — A fórmula (4) estabelece uma relação entre os quatro elementos de uma progressão aritmética: primeiro termo (a_1), termo de ordem n (a_n), razão (r) e número de termos (n). Conhecidos, então, tres dêstes elementos, podemos determinar o quarto. Para isso utilizamos as seguintes fórmulas, deduzidas facilmente de (4)

$$a_1 = a_n - (n-1)r \quad (5)$$

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad (6)$$

$$n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r} \quad (7)$$

7. Exercício. — Determinar o primeiro termo de uma progressão aritmética de 10 termos cuja razão é 4 e cujo último termo é 43.

RESOLUÇÃO: — São dados

$$r = 4 \quad n = 10 \quad a_{10} = 43$$

Aplicando a fórmula (5), obtemos

$$a_1 = a_{10} - 9r = 43 - 9 \times 4 = 7$$

8. Exercício. — Qual a razão de uma progressão aritmética de 20 termos, começada por 7 e cujo último termo é 197?

RESOLUÇÃO: — São dados

$$a_1 = 7 \quad a_{20} = 197 \quad n = 20$$

Aplicando a fórmula (6) obtemos

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{197 - 7}{20 - 1} = 10$$

9. Exercício. — Quantos números ímpares há de 17 a 193 inclusive?

RESOLUÇÃO: — Os números considerados formam a progressão aritmética

$$: 17 . 19 . 21 \dots 193$$

de razão 2 e cujos termos extremos são 17 e 193. Assim, são dados

$$a_1 = 17 \quad a_n = 193 \quad r = 2$$

Aplicando a fórmula (7), obtemos

$$n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r} = 1 + \frac{193 - 17}{2} = 89$$

10. Inserção de meios aritméticos. — Inserir n meios aritméticos entre dois números A e B é formar uma progressão aritmética de $n + 2$ termos, cujos termos extremos sejam A e B .

O problema consiste, inicialmente, em determinar a razão da progressão, o que se obtém pela aplicação da fórmula (6). Calculada esta, escrevem-se os n termos (entre A e B) de acôrdo com a observação I do n.º 2.

11. Exercício. — Inserir 4 meios aritméticos entre os números 11 e 31.

RESOLUÇÃO: — De acôrdo com o que foi dito no número anterior, precisamos calcular a razão de uma progressão aritmética de 6 termos, cujos termos extremos são 11 e 31. São dados, portanto,

$$a_1 = 11 \quad a_6 = 31 \quad n = 6$$

Aplicando a fórmula (6), obtemos

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{31 - 11}{6 - 1} = 4$$

A progressão pedida será

$$: 11 . 15 . 19 . 23 . 27 . 31$$

12. Observação. — Notemos que, no problema anterior, n representa o número de termos inseridos mais 2. Chamando, então, p o número de termos inseridos, podemos escrever

$$n = p + 2$$

A expressão de r ficará, então,

$$r = \frac{B - A}{n - 1} = \frac{B - A}{p + 2 - 1} = \frac{B - A}{p + 1}$$

sendo A e B os números na ordem dada.

Este resultado mostra que a razão da progressão formada pela inserção de p meios aritméticos entre dois números A e B se obtém dividindo a diferença $B - A$ por $p + 1$.

13. Generalização. —

I. Consideremos a progressão

$$: a_1 . a_2 \dots a_n$$

Inserindo p meios aritméticos entre cada dois termos consecutivos, de acôrdo com a observação anterior, as razões das progressões, assim formadas, serão respectivamente os quocientes das diferenças

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}$$

por $p + 1$. Como essas diferenças são todas iguais, as razões das progressões são também iguais, de modo que o conjunto das $n - 1$ progressões, assim formadas, constitue uma progressão única, contendo $n + p(n - 1)$ termos e cujos termos extremos são a_1 e a_n .

Por exemplo, se inserirmos tres meios aritméticos entre cada dois termos consecutivos da progressão

$$: 5 . 13 . 21 . 29$$

obteremos a progressão

$$: 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . 19 . 21 . 23 . 25 . 27 . 29$$

II. Consideremos dois termos consecutivos a_{k-1} e a_k de uma progressão aritmética de razão r . Se inserirmos $p-1$ meios aritméticos entre esses dois termos, obteremos, como já vimos, uma progressão aritmética cuja razão é $\frac{r}{p}$. Inserindo, a seguir, $p'-1$ meios aritméticos entre cada dois termos consecutivos dessa nova progressão, obteremos uma outra cuja razão é

$$\frac{r}{p} \div p' \text{ ou } \frac{r}{pp'}$$

Como essa razão é exatamente aquela que se obtém, inserindo $pp'-1$ termos entre a_{k-1} e a_k , concluímos:

Inserir $p-1$ meios aritméticos entre dois números dados e, em seguida, $p'-1$ meios aritméticos entre cada dois termos consecutivos da progressão formada, equivale a inserir $pp'-1$ meios aritméticos entre os números dados.

Este resultado pode ser facilmente generalizado, chegando-se a concluir que, inserir $p-1$ meios aritméticos entre dois números dados, e, a seguir, sucessivamente $p'-1$, $p''-1$, meios aritméticos entre cada dois termos consecutivos da progressão anteriormente formada, equivale a inserir $p \cdot p' \cdot p'' \cdot \dots - 1$ meios aritméticos entre os números dados.

14. Teorema. — Dada uma progressão aritmética crescente e um número A arbitrário, existe um número n tal que o termo de ordem n da progressão seja superior a A .

Realmente, sendo (n.º 4)

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

o termo de ordem n da progressão, se n crescer indefinidamente, a_n crescerá ultrapassando qualquer limite. Para determinar o menor valor (inteiro) de n verificando a desigualdade

$$a_1 + (n-1)r > A$$

bastará resolvê-la em relação a n o que dá (*)

$$n > 1 + \frac{A - a_1}{r}$$

(*) Como r é positivo podemos dividir ambos os membros da desigualdade por r sem mudar o seu sentido.

e atribuir a n o primeiro valor inteiro superior ou igual ao da expressão $1 + \frac{A - a_1}{r}$.

Este teorema poderia, também, ser assim enunciado:

Em toda progressão aritmética crescente, o termo geral a_n cresce com n , de modo a ultrapassar qualquer valor arbitrariamente escolhido.

EXEMPLO: — Determinar o primeiro termo da progressão

$$: - 20 . - 17 . - 14 \dots$$

que seja superior ao número 104.

RESOLUÇÃO: — Sendo $r = 3$ a razão desta progressão, será

$$1 + \frac{A - a_1}{r} = 1 + \frac{104 + 20}{3} = 42\frac{1}{3}$$

e, de acôrdo com o que foi dito, será $n = 43$, isto é, o termo pedido será o quadragésimo terceiro.

15. Termos equidistantes dos extremos. — Diz-se que dois termos de uma progressão aritmética limitada são equidistantes dos extremos, quando o número de termos da progressão que precedem o primeiro é igual ao número de termos da progressão que seguem o segundo. Por exemplo, na progressão

$$: 2 . 7 . 12 . 17 . 22 . 27 . 32 . 37 . 42$$

os termos 17 e 27 são equidistantes dos extremos, porque há tres termos precedendo 17 e tres em seguida a 27.

16. Propriedade. — Consideremos a progressão

$$: a_1 . a_2 \dots a_{k+1} \dots a_{n-k} \dots a_n$$

na qual os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, visto que há k termos antes de a_{k+1} e k termos depois de a_{n-k} .

De acôrdo com a fórmula do termo geral (n.º 4), temos, designando por r a razão da progressão

$$a_{k+1} = a_1 + kr$$

Para a progressão de $k+1$ termos, cujo primeiro termo é a_{n-k} e cujo último termo é a_n , podemos escrever (n.º 6)

$$a_{n-k} = a_n - kr$$

5. Resolver a equação
 $2,634x^{-1} = 3,41$

Resp.: 2,266

6. Resolver a equação
 $(a^x+2)x = a^{3x}$

Resp.: $x' = 0, x'' = 1$

× 7. Resolver a equação
 $(5^x-1)x^{-4} = 625$

Resp.: $x' = 5, x'' = 0$

< 8. Resolver a equação
 $2(x-1)(x+3) = 1$

Resp.: $x' = 1, x'' = -3$

× 9. Resolver a equação
 $\sqrt[x]{a} = a^{4x}$

Resp.: $x = \pm \frac{1}{2}$

10. Resolver a equação
 $2x+3 + 4x = 128$

Resp.: $x = 3$

21-6- { 11. Resolver a equação
 $4x+2 - 2x+3 = 48$

Resp.: $x = 1$

12. Resolver a equação
 $3x + 9x = 90$

Resp.: $x = 2$

13. Resolver a equação
 $4\sqrt{x} = 256$

Resp.: $x = 16$

× 14. Resolver a equação
 $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 30$

Resp.: $x = 4$

15. Resolver a equação
 $2^x + 2^{x+1} + \frac{8}{2^{x-1}} = 49$

Resp.: $x = 4$

$$4^{2+2} - 2^{2+3} = 48$$

$$4^4 - 2^5 = 48$$

$$256 - 32 = 224.$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$4^{1+2} - 2^{1+3} = 48$$

$$64 - 16 = 48.$$

$$\frac{16}{4} = 4$$

$$\frac{30}{15} = 2$$

CAPÍTULO II

Álgebra

UNIDADE

O binômio de Newton

CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO

1. Noções sobre Análise Combinatória.
2. Binômio de Newton.

$$2^x + \frac{2^x}{2} + \frac{2^x}{2^2} + \frac{2^x}{2^3} = 30.$$

$$2^x(2^3 + 2^2 + 2 + 1) = 30 \times 2^3$$

$$2^x = \frac{30 \times 8}{8+4+2+1}$$

$$2^x = \frac{30 \times 8}{15}$$

$$2^x = 2 \cdot 2^3$$

$$2^x = 2^4$$

$$x = 4.$$

$$\frac{1}{x} = a^{4x}$$

$$a = a$$

$$\frac{1}{x} = 4x$$

$$1 = 4x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

a

NOÇÕES SÔBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. Preliminares. — Dados m elementos distintos

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

tomando-se p dêesses elementos (sendo $p \leq m$) e dispondo-os *linearmente*, forma-se um agrupamento de *módulo*, *classe* ou *ordem* p . Nos casos particulares de p igual a 2, 3 e 4, os agrupamentos podem denominar-se *binários*, *ternários* e *quaternários* respectivamente.

Um agrupamento pode ser *simplex* ou *com repetição*. No primeiro caso nenhum elemento figura mais de uma vez no agrupamento; no segundo caso, pelo menos um elemento aparece duas ou mais vezes no agrupamento.

Com os m elementos anteriores podem ser formados diferentes tipos de agrupamentos, como veremos a seguir. A determinação do número dêestes agrupamentos, de grande importância em diversos ramos da Matemática (como, por exemplo, no Cálculo das Probabilidades), constitui o objetivo da *Análise Combinatória* ou *Cálculo Combinatório*.

Um agrupamento de p dos m elementos dados (sendo $p \leq m$) pode ser considerado, prescindindo-se ou não da *ordem* dêestes p elementos. No primeiro caso, dois agrupamentos são *idênticos* quando *contêm os mesmos elementos, qualquer que seja sua ordem*, considerando-se *distintos* dois agrupamentos que *difiram de, pelo menos, um elemento*. No segundo caso, dois agrupamentos são *idênticos* quando são *constituídos dos mesmos elementos, dispostos numa mesma ordem*, considerando-se *distintos* dois agrupamentos que *difiram de, pelo menos, um elemento ou dois agrupamentos de mesmos elementos em que, pelo menos, dois elementos iguais não ocupem a mesma posição*.

Um agrupamento de p elementos distintos, tirados dos m elementos dados, abstração feita de sua ordem (tal como foi definido no primeiro caso) denomina-se *combinação simplex de classe* p dêesses m elementos.

Um agrupamento ordenado de p elementos distintos tirados dos m elementos dados (tal como foi definido no segundo caso) chama-se *arranjo simples* ou *disposição simples de classe p desses m elementos* (*).

No caso particular de $p = m$ tem-se evidentemente *uma única combinação* dos m elementos e tantos arranjos quantos são os diferentes modos de ordena-los. Esses *arranjos simples de classe m dos m elementos* recebem a denominação especial de *permutações simples* desses m elementos.

Resumindo as considerações feitas, podemos, em conclusão, dar as seguintes definições:

1) *Arranjos simples de classe p de m elementos* ou *arranjos simples de m elementos p a p* são todos os agrupamentos de p elementos tirados dentre os m elementos dados, de modo que cada agrupamento se diferencie de outro, seja pela *natureza*, seja pela *ordem* de seus elementos;

2) *permutações simples* de m elementos são todos os agrupamentos de m elementos sem repetição que se podem formar com os m elementos dados, de modo que cada agrupamento se diferencie de outro pela ordem de seus elementos;

3) *combinações simples de classe p de m elementos* ou *combinações simples de m elementos p a p* são todos os agrupamentos de p elementos distintos tirados dentre os m elementos dados de modo que cada agrupamento se diferencie de outro pela *natureza* de seus elementos.

2. Formação dos arranjos simples. — Consideremos, para fixar as idéias, quatro elementos: a, b, c, d .

Conforme será demonstrado mais adiante, obtém-se os *arranjos binários* desses quatro elementos, juntando-se a cada elemento sucessivamente os outros *tres*. Então, os arranjos binários dos quatro elementos são

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

(*) A denominação *disposição* é usada por muitos autores italianos como PINCHERLE, SEVERI, SIBIRANI, TRICOMI, VITALI, etc.. REY-PASTOR usa a denominação *variação*.

Juntando-se, a seguir, a cada um destes agrupamentos binários sucessivamente os *dois* elementos que nêle não figuram, obtém-se os *arranjos ternários*, ou sejam

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

Demonstremos que este processo de formação é geral, isto é, que dados m elementos distintos, se obtém os *arranjos binários simples* dêles, juntando-se a cada um dêles sucessivamente os $m - 1$ elementos restantes; que se obtém os *arranjos ternários simples* dos m elementos, juntando-se a cada agrupamento binário sucessivamente os $m - 2$ elementos que nêle não figuram, e, assim, por diante.

Para isto admitamos que estejam formados todos os arranjos $p - 1$ a $p - 1$ dos m elementos dados, e demonstremos que, acrescentando-se a cada um destes agrupamentos de classe $p - 1$, *numa certa posição*, sucessivamente todos os $m - (p - 1)$ elementos que nêle faltam, obtemos os arranjos de m elementos p a p . Para facilidade de exposição suponhamos que cada elemento seja acrescentado depois do último elemento.

Demonstremos, então, que:

- 1) *os arranjos de classe p , assim obtidos, são simples*;
- 2) *não há falta nem repetição de arranjos de classe p .*

De fato, como os arranjos de classe $p - 1$ são simples, juntando-se a êles sucessivamente elementos que nêles não figuram, os arranjos de classe p , assim obtidos, são, também, *simples*. Por outro lado, não poderá faltar um arranjo de classe p , pois, neste caso, em contradição com a hipótese, faltaria o arranjo de classe $p - 1$, que se obtém daquele suprimindo-se o seu último elemento. Igualmente, nenhum arranjo de classe p , formado pelo processo anterior, poderá ser obtido duas vezes, porque dois arranjos quaisquer de classe p , assim obtidos, diferem, seja pelo último elemento, quando provêm do mesmo arranjo de classe $p - 1$, seja pela ordem ou pela

natureza dos $p-1$ primeiros elementos, quando se originam de dois arranjos distintos de classe $p-1$.

3. Número de arranjos simples de classe p de m elementos. — Representa-se por um dos símbolos A_m^p ou $A_{m,p}$ o número de arranjos simples de m elementos p a p (*).

Da demonstração anterior se conclui que o número de arranjos de classe p de m elementos é igual ao produto de $m - (p-1)$ pelo número de arranjos de classe $p-1$ desses elementos.

Adotando, então, a primeira das notações acima referidas, podemos escrever

$$A_{m,p} = [m - (p-1)] A_{m,p-1}$$

Sendo geral esta relação, podemos estabelecê-la para diferentes valores de p . Observando que, evidentemente $A_m^1 = m$ resultam as p relações

$$A_{m,1} = m$$

$$A_{m,2} = (m-1) A_{m,1}$$

$$A_{m,3} = (m-2) A_{m,2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_{m,p} = [m - (p-1)] A_{m,p-1}$$

Multiplicando-as, membro a membro, e suprimindo os fatores comuns a ambos os membros, obtemos a fórmula do número de arranjos simples de m elementos p a p

$$A_{m,p} = m(m-1)(m-2) \dots (m-p+1) \quad (1)$$

CONCLUSÃO: O número de arranjos simples de m elementos p a p é dado pelo produto de p números inteiros, consecutivos e decrescentes a partir de m .

Por exemplo o número de arranjos de 10 elementos 3 a 3 é dado pelo produto dos tres números 10, 9 e 8, ou

$$A_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

(*) Os autores que adotam a denominação *disposições* representam o seu número por $D_{m,p}$ ou D_m^p ; os que empregam a denominação *variações* representam-no por $V_{m,p}$ ou V_m^p .

4. Formação das permutações simples. — Sendo as *permutações simples de m elementos*, por definição, os *arranjos simples de classe m* dos mesmos, sua formação, de acôrdo com esta definição, exigiria a formação sucessiva de todos os arranjos simples de ordens 1, 2, ... $p-1$. Pode-se, entretanto, seguindo-se rumo diferente, evitar êsse longo processo.

Consideremos as duas permutações simples

$$ab \quad ba$$

de dois elementos a e b .

Como será demonstrado mais adiante, obtêm-se as permutações simples de tres elementos a, b, c acrescentando-se o elemento c a cada grupo anterior em cada uma das tres posições possíveis: depois do segundo elemento, entre o primeiro e o segundo, e antes do primeiro. Obtêm-se, então,

$$abc \quad bac$$

$$acb \quad bca$$

$$cab \quad cba$$

Formam-se, análogamente, as permutações de quatro elementos a, b, c, d , acrescentando-se o quarto elemento d a todas as permutações anteriores, em cada uma das quatro posições possíveis. Obtêm-se, então (*),

$$abcd \quad bacd$$

$$abdc \quad badc$$

$$adbc \quad bdac$$

$$dabc \quad dbac$$

$$acbd \quad bcad$$

$$acdb \quad bcda$$

$$adcb \quad bdca$$

$$dacb \quad dbca$$

(*) Êste processo de formação, apesar de ser o mais simples, entretanto, não dá as permutações numa sucessão ordenada. Assim, o grupo $dabc$ precede o grupo $acbd$, o que significa, substituindo as letras a, b, c, d respectivamente pelos números 1, 2, 3, 4, que o número 4123 precede o número 1324. Para conhecer um processo de formação ordenada, o leitor interessado poderá consultar J. REY-PASTOR, *Elementos de Análisis Algebraico*, Madrid, 1939, 5.ª ed., pág. 138.

52. Exercícios para resolver. —

1. Calcular o desenvolvimento de
- $(x + 2)^4$
- .

$$\text{Resp.: } x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

2. Calcular o desenvolvimento de
- $\left(2x + \frac{a}{2}\right)^5$
- .

$$\text{Resp.: } 35x^5 + 40ax^4 + 20a^2x^3 + 5a^3x^2 + \frac{5}{8}a^4x + \frac{a^5}{32}$$

3. Calcular o desenvolvimento de
- $(x - 2a)^3$
- .

$$\text{Resp.: } x^3 - 6a^2x + 12ax^2 - 8a^3$$

4. Calcular o desenvolvimento de
- $(1 - 2x)^6$
- .

$$\text{Resp.: } 1 - 12x + 60x^2 - 160x^3 + 240x^4 - 192x^5 + 64x^6$$

5. Calcular o quarto termo do desenvolvimento de
- $(3 + x)^6$
- .

$$\text{Resp.: } 540x^3$$

6. Calcular o termo central do desenvolvimento de
- $(x + 1)^{12}$
- .

$$\text{Resp.: } 924x^6$$

7. Calcular o desenvolvimento de

$$(x + 1)^m + (x - 1)^m$$

$$\text{Resp.: } 2 \left[x^m + \binom{m}{2} x^{m-2} + \binom{m}{4} x^{m-4} + \dots \right]$$

8. Calcular a soma dos cubos dos vinte primeiros números naturais, aplicando a fórmula da potência
- m
- do binômio.

$$\text{Resp.: } 36\,100$$

9. Calcular o desenvolvimento de
- $(2x^2 - 8x + 3)^2$

$$\text{Resp.: } 4x^4 - 32x^3 + 76x^2 - 48x + 9$$

10. Calcular o desenvolvimento de

$$(1 + 2a + 3a^2 + 4a^3)^2$$

$$\text{Resp.: } 1 + 4a + 10a^2 + 20a^3 + 25a^4 + 24a^5 + 16a^6$$

11. Calcular o desenvolvimento de

$$(1 + x + x^2 + \dots)^2$$

$$\text{Resp.: } 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n + 1)x^n + \dots$$

12. Determinar pela fórmula de Leibniz o desenvolvimento de

$$(a + b + c + \dots + l)^m$$

$$\text{Resp.: } \sum a^4 + 4 \sum a^3b + 6 \sum a^2b^2 + 12 \sum a^2bc + 24 \sum abcd$$

CAPÍTULO III

Algebra

UNIDADE

Determinantes

CURSO CIENTÍFICO

1. Teoria dos determinantes.
2. Aplicação aos sistemas de equações lineares; regra de Cramer; teorema de Rouché.

TEORIA DOS DETERMINANTES

1. Preliminares. — A teoria dos determinantes tem sua origem nas pesquisas iniciadas por Leibniz, em 1678, no sentido de simplificar as trabalhosas eliminações necessárias à resolução de um sistema de m equações lineares com m incógnitas.

Seguem-se, na ordem cronológica, os trabalhos de CRAMER (1750), BEZOUT (1764), LAPLACE (1772), VANDERMONDE (1772), LAGRANGE (1773), CAUCHY (1815) a quem se deve uma sistematização completa dos trabalhos de todos os seus antecessores além de suas notáveis contribuições e JACOBI (1841) cujos estudos sobre os determinantes funcionais grande auxílio deram à Análise. O primeiro tratado sistemático e completo sobre o assunto é de BRIOSCHI (1854), seguindo-se-lhe, então, outros entre os quais se destaca o de GÜNTHER (1877) que fornece detalhada indicação bibliográfica para cada parte da teoria e um resumo histórico de seu desenvolvimento (*).

Tendo sua origem num problema de Álgebra Elementar, a teoria dos determinantes desenvolveu-se a tal ponto, que hoje constitui um algoritmo de suma importância tanto na Análise como na Geometria (**).

2. Classe de uma permutação. — Dados m elementos a, b, \dots, l , tomemos uma de suas $m!$ permutações, por exemplo

$ab \dots l$

que designaremos *fundamental*, *principal* ou *direta*.

(*) Cfr. ERNESTO PASCAL, *I Determinanti*, Milano, Ulrico Hoepli, 2.^a ed., 1923, pág. 4.

(**) "Conviene però avvertir subito que l'importanza dei determinanti trascendi di gran lunga quella del problema da cui essi hanno preso origine. I determinanti sono uno strumento conciso e potente, di uso continuo nella matematica pura e applicata". (FRANCESCO SEVERI, *Lezioni di Analisi*, Bologna, N. Zanichelli Editore, 1938, 1.^o vol., 2.^a ed., pág. 23).

Diremos, então, que dois elementos em uma qualquer outra permutação desses m elementos formam uma *inversão*, quando estão em ordem inversa àquela em que se acham na permutação principal.

Consideremos, por exemplo, os cinco elementos a, b, c, d, e e tomemos para permutação principal aquela em que se acham na ordem alfabética $abcde$. Assim sendo, uma permutação $daceb$ apresentará cinco inversões, a saber, as inversões $da, d \dots c, d \dots b, c \dots b, eb$.

Diz-se que uma permutação é de *classe par* ou de *classe ímpar* segundo apresenta um número par ou ímpar de inversões. Por exemplo, a permutação acima $daceb$ é de classe ímpar, porque, como vimos, apresenta 5 inversões.

3. Teorema. —

I. Consideremos uma permutação

$$a \dots cebf \dots l \quad (1)$$

de m elementos dados e permutemos dois elementos *consecutivos* quaisquer, como por exemplo e e b ,

$$a \dots cbef \dots l \quad (2)$$

Evidentemente não foi alterada a posição de cada um destes dois elementos em relação aos demais $m-2$, havendo, apenas, alteração na sua posição recíproca. Logo o número de inversões da permutação *diminuiu ou aumentou de uma unidade*, conforme os dois elementos formavam ou não uma inversão em (1). Resulta daí que a permutação (2) não é da mesma classe da permutação (1).

II. Consideremos, ainda, uma permutação

$$a \dots ecd \dots fb \dots l \quad (3)$$

dos mesmos m elementos, e permutemos dois elementos *não consecutivos* e e b , entre os quais existem r ($r \geq 1$) elementos. Poderemos realizar esta permutação, fazendo, em primeiro lugar, o elemento à esquerda e avançar r posições (para a direita), e, em seguida, o elemento à direita b retroceder $r+1$ posições (para a esquerda). Isto equivale a realizar sucessivamente um número ímpar $2r+1$ de permutações de dois elementos consecutivos, do que decorre, em virtude do resultado anterior, haver uma mudança de classe na permutação.

Os resultados acima permitem-nos enunciar o seguinte teorema:

Trocando-se dois elementos quaisquer de uma permutação, esta muda de classe.

4. Observações. —

I. Se considerarmos

$$abc \dots kl$$

como *permutação principal* dos m elementos a, b, c, \dots, k, l , o número máximo de inversões aparece, quando, dois a dois, todos os elementos formam inversão, ou seja na permutação

$$lk \dots cba$$

Este número máximo de inversões é portanto, o número de combinações de m elementos dois a dois, isto é, $\binom{m}{2}$

II. Consideremos, entre as $m!$ permutações dos m elementos a, b, \dots, l , as de classe par. Permutando dois elementos previamente prefixados, em cada uma destas permutações de classe par, obteremos o mesmo número de permutações de classe ímpar. Recíprocamente, a permutação de dois elementos, previamente escolhidos, em cada uma das permutações de classe ímpar dos m elementos, forma permutações de classe par dos mesmos.

Concluimos, pois:

O número de permutações de classe par de m elementos é igual ao número de permutações de classe ímpar desses elementos.

5. **Matriz quadrada.** — Um conjunto de n^2 elementos, dispostos num quadro, como o que se segue,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \quad (4)$$

denomina-se *matriz quadrada de ordem n* . O n conjunto de elementos situados numa mesma *horizontal* denomina-se *linha* da matriz e o conjunto de n elementos que figuram numa mesma *vertical* chama-se *coluna*. Chama-se *fila* da matriz indiferentemente uma *linha* ou uma *coluna*. Dêste modo, por *filas para-*

lelas entendem-se *linhas* ou *colunas*, e por *filas perpendiculares* uma linha e uma coluna (*).

Cada um dos n^2 elementos da matriz (4) está afetado de dois índices: um *superior*, indicando sua *coluna*, isto é, sua posição sobre a horizontal, e outro *inferior* indicando sua linha, ou seja, sua posição sobre a vertical. Dêste modo, a_j^i indica *elemento da coluna i e da linha j*.

Chama-se *diagonal principal* da matriz (4) à sucessão, ordenada em relação aos índices,

$$a_1^1 \ a_2^2 \ \dots \ a_n^n$$

dos elementos afetados de dois índices iguais, e *diagonal secundária* à sucessão ordenada em relação aos índices das linhas e das colunas

$$a_n^1 \ a_{n-1}^2 \ \dots \ a_1^n$$

dos elementos cuja soma dos índices é $n + 1$.

Dois elementos a_r^s e a_s^r dizem-se *simétricos* em relação à diagonal principal. Se, quaisquer que sejam r e s , se tem

$$a_r^s = a_s^r$$

diz-se que a *matriz* (4) é *simétrica*.

Consideremos uma permutação

$$a_{\alpha}^{\alpha'} \ a_{\beta}^{\beta'} \ \dots \ a_{\lambda}^{\lambda'} \quad (5)$$

formada de n elementos tirados de (4), sendo um, e somente um, de cada linha e de cada coluna. Nestas condições a sucessão $\alpha' \beta' \dots \lambda'$ dos índices superiores de (5) é uma permutação dos números $1, 2, \dots, n$; o mesmo diremos para a sucessão $\alpha \beta \dots \lambda$ dos índices inferiores.

Atribuamos à permutação (5) o sinal $+$ ou o sinal $-$ segundo as permutações

$$\alpha' \beta' \dots \lambda' \quad (6)$$

e

$$\alpha \beta \dots \lambda \quad (7)$$

sejam ou não de *mesma classe* (n.º 2).

(*) O estabelecimento de uma denominação comum para linha ou coluna, muito difundido entre os autores italianos, simplifica, como veremos, os enunciados dos teoremas sobre determinantes.

É evidente, então, que uma troca de dois elementos quaisquer de (5) não altera o seu sinal, porque acarreta simultaneamente a mudança de paridade de cada uma das permutações (6) e (7) (n.º 3).

Ora, da regra dada acima para o sinal de (5), concluímos que esta permutação é *positiva* ou *negativa*, conforme a soma $I + I'$ dos números de inversões de (7) e (6) respectivamente seja *par* ou *ímpar*. Podemos, então, ordenar os elementos de (5) segundo os seus índices superiores (ou inferiores) o que equivale a anular I' (ou I) e atribuir-lhe o sinal $+$ ou o sinal $-$ conforme o número de inversões I (ou I') de seus índices inferiores (ou superiores) seja *par* ou *ímpar*.

6. Determinante. — Consideremos, então, a permutação (5) supondo seus elementos ordenados em relação a seus índices superiores e, sendo $\alpha' \beta' \dots \lambda'$ a sucessão de seus índices inferiores, formemos o produto P de seus n elementos

$$P = a_{\alpha''}^1 \cdot a_{\beta''}^2 \cdot \dots \cdot a_{\lambda''}^n \quad (8)$$

Podemos, então, atribuir ao produto P o sinal da permutação

$$a_{\alpha''}^1 \ a_{\beta''}^2 \ \dots \ a_{\lambda''}^n$$

de seus fatores, porque, como foi visto acima, este sinal é independente da ordem dos mesmos, o que o torna compatível com a propriedade comutativa da multiplicação. Ora há tantos produtos P quantas são as permutações dos n números $1, 2, \dots, n$, ou sejam, $n!$

Analogamente formamos os produtos P' , cujos elementos estão ordenados segundo os índices das linhas

$$P' = a_1^{\alpha'''} \ a_2^{\beta'''} \ \dots \ a_n^{\lambda'''} \quad (9)$$

aos quais se aplicam, *mutatis mutandis*, as considerações feitas sobre P .

Chama-se, então, *determinante da matriz quadrada* (4) à soma algébrica de todos os produtos P ou P' , obtidos de acordo com a regra indicada. Sendo p'' e p''' respectivamente os números de inversões das permutações $\alpha' \beta' \dots \lambda'$ e $\alpha'' \beta'' \dots \lambda''$

... λ''' , podemos escrever as seguintes expressões simbólicas do determinante

$$\Delta = \Sigma (-1)^{p''} a_{\alpha''}^1 a_{\beta''}^2 \dots a_{\lambda''}^n \quad (10)$$

$$\Delta = \Sigma (-1)^{p'''} a_1^{\alpha'''} a_2^{\beta'''} \dots a_n^{\lambda'''} \quad (11)$$

O número n indica a ordem do determinante.

7. Determinante de segunda ordem. — Consideremos o determinante de 2.^a ordem

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

Segundo a regra anterior, obtemos seu desenvolvimento, considerando o produto

$$a_1^1 a_2^2$$

e permutando de todos os modos possíveis seus índices superiores ou inferiores. Permutemos, por exemplo, os primeiros. Como só há duas permutações 12 e 21 dos índices, o desenvolvimento terá apenas dois termos $a_1^1 a_2^2$ e $a_2^1 a_1^2$, respectivamente positivo e negativo, de acordo com a regra dada dos sinais. Então,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

CONCLUSÃO: O desenvolvimento de um determinante de 2.^a ordem é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

8. Exercício. — Calcular o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

RESOLUÇÃO: De acordo com a regra anterior, temos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3(-5) = 8 + 15 = 23$$

9. Determinante de terceira ordem. — Tomemos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

e formemos o produto

$$a_1^1 a_2^2 a_3^3 \quad (11 a)$$

dos elementos de sua diagonal principal. De acordo com a regra dada, efetuando, por exemplo, todas as permutações dos índices superiores de (11 a), obteremos os termos do desenvolvimento de Δ , cujos sinais são dados de acordo com a classe destas permutações. Teremos, então, como é fácil verificar

$$\begin{aligned} \Delta = & a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 + a_1^3 a_2^1 a_2^2 - \\ & - a_2^1 a_1^2 a_3^3 + a_2^2 a_3^2 a_1^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3 \end{aligned}$$

Na prática, obtém-se rapidamente este desenvolvimento pela seguinte *regra de Sarrus*: forma-se o quadro

$$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^1 & a_3^2 \end{array}$$

repetindo-se à direita da terceira coluna as duas primeiras na ordem em que se acham no determinante. Os termos positivos do determinante são os produtos dos elementos da diagonal principal e dos elementos situados em linhas paralelas; os termos negativos são os produtos dos elementos da diagonal secundária e os elementos situados em linhas paralelas.

Outra modalidade da *regra de Sarrus* consiste em repetir abaixo da última linha as duas primeiras, na sua ordem, e aplicar aos elementos do quadro obtido a mesma regra.

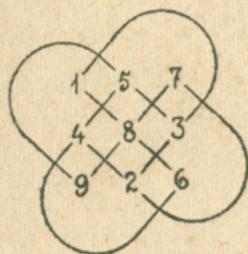
10. Exercício. — Calcular o valor do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 3 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

RESOLUÇÃO: Aplicando a regra de Sarrus, obtemos

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 7 & 1 & 5 & \\ & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\ & 4 & 8 & 3 & 4 & 8 \\ & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \\ 9 & 2 & 6 & 9 & 2 & \end{array}$$

$$\Delta = 1 \times 8 \times 6 + 5 \times 3 \times 9 + 7 \times 4 \times 2 - 9 \times 8 \times 7 - 2 \times 3 \times 1 - 6 \times 4 \times 5 = -391$$



11. Observação. — Com um pouco de prática, entretanto, pode-se obter facilmente o desenvolvimento de um determinante de 3.^a ordem, sem necessidade de repetir linhas ou colunas, bastando adotar o esquema ao lado (que pode até ser realizado mentalmente).

12. Determinantes de ordem superior à terceira. — Vimos que o desenvolvimento de um determinante de ordem n tem $n!$ termos. Assim o determinante de 4.^a ordem tem 24 termos, o de 5.^a ordem 120 termos etc. Para estes não há uma regra prática (como a regra de Sarrus) que permita formar rapidamente o seu desenvolvimento. Veremos, entretanto, mais adiante, no estudo de *determinantes menores*, os recursos que podem ser utilizados para o seu cálculo.

13. Propriedades dos determinantes. — Veremos, adiante, que o cálculo dos determinantes pode ser grandemente simplificado com o auxílio das propriedades dos mesmos, que passaremos a estudar.

14. Teorema. — Consideremos o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \quad (12)$$

e formemos o determinante Δ'

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

cujos elementos de cada coluna são os elementos da linha de mesma ordem de Δ .

Seja $T = a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \dots a_n^\lambda$

um termo qualquer de Δ , cujo sinal é dado pela permutação $\alpha\beta \dots \lambda$ dos índices das linhas. Ora, a este termo corresponde um termo

$$T' = a_1^\alpha \cdot a_2^\beta \dots a_n^\lambda$$

de Δ' , constituído dos mesmos elementos de T , e cujo sinal é o mesmo de T .

Assim, os desenvolvimentos de Δ e Δ' são iguais, o que nos permite concluir a propriedade:

Um determinante não se altera quando se trocam suas linhas por suas colunas, respeitada sua ordem.

15. Observação. — Do teorema anterior decorre que qualquer propriedade relativa às *linhas* (ou às *colunas*) de um determinante se aplica igualmente às *colunas* (ou às *linhas*). Podemos, então, de agora em diante, adotar a denominação *fila*, para designar indiferentemente uma linha ou uma coluna (n.^o 5).

16. Teorema. — Troquemos no determinante (12) duas filas paralelas, como, por exemplo, as colunas de ordens r e s . Isto acarretará, em cada um dos termos do desenvolvimento de Δ , supostos ordenados em relação aos índices das linhas,

ÍNDICE

	Pág.
Prefácio	7
Programa do Curso Clássico	9
Programa do Curso científico	10

CAPÍTULO I: Progressões e logaritmos

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

	Pág.		Pág.
Preliminares	13	Corolário	20
Observações	13	Soma dos termos	20
Propriedade	14	Soma dos n primeiros números naturais	21
Fórmula do termo geral	14	Soma dos n primeiros números ímpares	22
Fórmulas derivadas	15	Exercícios para resolver	23
Inserção de meios aritméticos	16		
Generalização	17		
Têrmos equidistantes dos ex- tremos	19		

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

	Pág.		Pág.
Preliminares	25	Limite da soma dos termos ..	34
Observações	26	Têrmos equidistantes dos ex- tremos ..	35
Propriedade	26	Propriedade	36
Fórmula do termo geral ..	26	Corolário	36
Fórmulas derivadas	27	Produto dos termos	36
Inserção de meios geométricos	29	Exercícios para resolver	39
Generalização	30		
Soma dos termos	32		

NOÇÕES SÔBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL

	Pág.		Pág.
Potências de expoente inteiro e negativo	42	Potências de expoente racio- nal e negativo	43
Potências de expoente racio- nal e positivo	43	Propriedades das potências de expoente racional	44

	PÁG.		PÁG.
Comparação de potências...	46	Noção de função inversa....	52
Potências de expoente real..	47	Função logarítmica.....	53
Função exponencial.....	48	Propriedades da curva loga-	
Propriedades da curva expo-		rítmica.....	54
nencial.....	51		

LOGARITMOS

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	55	Logaritmo negativo e logarit-	
Variação dos logaritmos....	55	mo preparado.....	63
Propriedades dos logaritmos	56	Determinação do cologaritmo	
Logaritmo de um produto...	56	de um número, dado o seu	
Logaritmo de um quociente..	56	logaritmo.....	64
Cologaritmo de um número..	57	Determinação do logaritmo de	
Logaritmo de uma potência	58	um número.....	65
Logaritmo de uma raiz.....	58	Determinação do número cor-	
Introdução dos logaritmos ao		respondente a um logarit-	
cálculo.....	59	mo dado.....	68
Sistemas de logaritmos.....	59	Operações sobre logaritmos..	69
Conversão de logaritmos....	60	Exercícios.....	71
Logaritmos decimais.....	61	Exercícios para resolver....	73

RESOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	75	Exercícios para resolver....	77

CAPÍTULO II: O binômio de Newton

NOÇÕES SÔBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	81	Arranjos com repetição....	91
Formação dos arranjos simples	82	Formação dos arranjos com	
Número de arranjos simples		repetição.....	92
de classe p de m elementos	84	Número de arranjos, com re-	
Formação das permutações		petição de classe p de m	
simples.....	85	elementos.....	93
Número de permutações sim-		Permutações de elementos	
ples de m elementos....	86	nem todos distintos.....	94
Formação das combinações		Combinações com repetição..	96
simples.....	88	Número de combinações, com	
Número de combinações sim-		repetição, de classe p de	
ples de classe p de m ele-		m elementos.....	97
mentos.....	90		

	PÁG.		PÁG.
Números combinatórios....	99	Propriedades do triângulo dos	
Propriedades dos números		números combinatórios..	104
combinatórios.....	100	Construção do triângulo dos	
Triângulo dos números com-		números combinatórios..	106
binatórios.....	103	Exercícios.....	107
		Exercícios para resolver....	110

BINÔMIO DE NEWTON

	PÁG.		PÁG.
Produto de binômios.....	112	Térmo de máximo coeficiente	117
Potência de um binômio....	113	Soma dos coeficientes do des-	
Térmo geral do desenvolvi-		envolvimento de $(x+a)^m$	117
mento da potência m do		Soma de potências de mesmo	
binômio.....	115	grau dos termos de uma	
Formação sucessiva dos tēr-		progressão aritmética....	118
mos.....	115	Soma das potências de mesmo	
Desenvolvimento de $(x-a)^m$	116	grau dos números naturais	120
Aplicação do triângulo dos		Potência de um polinômio...	120
números combinatórios..	116	Exercícios para resolver....	124

CAPÍTULO III: Determinantes

TEORIA DOS DETERMINANTES

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	127	Determinante menor.....	141
Classe de uma permutação..	127	Menor complementar.....	142
Teorema.....	128	Complemento algébrico....	142
Matriz quadrada.....	129	Desenvolvimento de um de-	
Determinante.....	131	terminante.....	142
Determinante de 2. ^a ordem..	132	Teorema de Laplace.....	147
Determinante de 3. ^a ordem..	133	Produto de dois determinantes	150
Determinantes de ordem su-		Exercícios resolvidos.....	150
perior à terceira.....	134	Exercícios para resolver....	154
Propriedades dos determinan-			
tes.....	134		

EQUAÇÕES LINEARES

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	157	m equações lineares com n	
Regra de Cramer.....	158	incógnitas.....	167
Discussão de um sistema de n		Sistemas de m equações line-	
equações lineares com n		ares homogêneas com n	
incógnitas.....	162	incógnitas.....	169
Discussão de um sistema de		Exercícios para resolver....	170

CAPÍTULO IV: Frações contínuas

Pág.		Pág.
Frações contínuas limitadas	175	em relação a suas reduzi-
Lei de formação das reduzidas	178	das.....
Frações contínuas ilimitadas	181	Erro cometido quando se to-
Frações contínuas periódicas	182	ma uma reduzida para
Diferença entre duas reduzi-		valor da fração contínua
das consecutivas.....	184	Reduzidas como valores apro-
Diferença entre R_n e R_{n-2} ...	186	ximados da fração conti-
Valor de uma fração contínua		nua.....
ilimitada.....	187	Propriedade.....
Valor de uma fração contínua		Exercícios para resolver.....

CAPÍTULO V: Os corpos redondos

NOÇÕES SOBRE SUPERFÍCIES

Pág.		Pág.
Preliminares.....	201	terior a uma superfície
Superfícies de revolução....	201	cônica de revolução.....
Superfícies cilíndricas.....	202	Classificação das superfícies.
Superfície cilíndrica de revo-		Superfícies regradas.....
lução.....	203	Superfícies desenvolvíveis...
Planos secante, tangente e		Superfícies reversas.....
exterior a uma superfície		Superfícies propriamente cur-
cilíndrica de revolução...	204	vas.....
Superfícies cônicas.....	205	Resumo da classificação de
Superfície cônica de revolução		Monge.....
Planos secante, tangente e ex-		Crítica à classificação de
		Monge.....

CILINDRO DE REVOLUÇÃO

Pág.		Pág.
Preliminares.....	211	Desenvolvimento da super-
Secção meridiana do cilindro		fície lateral do cilindro de
de revolução.....	212	revolução.....
Área lateral do cilindro de		Cilindro equilátero.....
revolução.....	212	Semi-cilindro de revolução..
Área total do cilindro de re-		Exercícios resolvidos.....
volução.....	213	Exercícios para resolver.....
Volume do cilindro de revo-		
lução.....	213	

CONE E TRONCO DE CONE DE REVOLUÇÃO

Pág.		Pág.
Preliminares.....	226	Tronco de cone de revolução
Cone de revolução.....	226	Secção meridiana de um tron-
Relação métrica no cone de		co de cone de revolução..
revolução.....	227	Relação métrica no tronco de
Secção meridiana do cone de		cone de revolução.....
revolução.....	227	Área lateral do tronco de cone
Área lateral do cone de revo-		de revolução.....
lução.....	228	Área total do tronco de cone
Área total do cone de revo-		de revolução.....
lução.....	230	Volume do tronco de cone de
Volume do cone de revolução		revolução.....
Desenvolvimento da super-		Desenvolvimento da super-
fície lateral do cone de		fície lateral do tronco de
revolução.....	230	cone de revolução.....
Cone equilátero.....	231	Exercícios resolvidos.....
Tronco de cone.....	232	Exercícios para resolver....

ESFERA

Pág.		Pág.
Preliminares.....	247	Área da superfície gerada pela
Geração da esfera e da super-		rotação de um segmento
fície esférica.....	247	de reta.....
Plano diametral.....	248	Área da superfície gerada pela
Posições relativas de uma es-		rotação de uma linha poli-
fera e um plano.....	249	gonal.....
Posições relativas de uma		Expressão da área da esfera
esfera e uma reta.....	251	Área da zona e da calote es-
Superfície cônica circunscrita		féricas.....
a uma esfera.....	252	Área do fuso esférico.....
Cone circunscrito a uma esfera		Volume da esfera.....
Superfície cilíndrica circuns-		Volume do sólido gerado pela
crita a uma esfera.....	254	rotação de um triângulo..
Cilindro circunscrito a uma		Volume do sólido gerado pela
esfera.....	254	rotação de um setor poli-
Posições relativas de duas		gonal regular.....
esferas.....	255	Expressão do volume da es-
Intersecção de duas esferas...	256	fera.....
Principais secções da esfera e		Volume da cunha esférica...
da superfície esférica....	256	Exercícios resolvidos.....
Área da esfera.....	257	Exercícios para resolver....

EXERCÍCIOS SOBRE POLIEDROS E CORPOS REDONDOS

Pág.		Pág.
Exercícios resolvidos.....	276	Exercícios para resolver....

CAPÍTULO VI: Vetores

NOÇÕES SOBRE VETORES

	Pág.		Pág.
Grandezas escalares e vetoriais	289	Resultante de dois vetores opostos	293
Eixo	289	Resultante de mais de dois vetores	294
Segmento de reta orientado	289	Propriedades da adição de vetores	295
Translação	290	Medida algébrica da resultante de vetores colineares	296
Vetores livres	291	Teorema de Chasles	298
Vetores localizados	291		
Vetor unitário	292		
Resultante de dois vetores	292		
Resultante de dois vetores colineares	293		

CAPÍTULO VII: Projeções

	Pág.		Pág.
Projeção de um ponto sobre um eixo	301	Projeção da resultante de vetores (Teorema de Carnot)	304
Projeção de um vetor sobre um eixo	301	Medida algébrica da projeção de um segmento	305
Projeções de vetores equi-		polentes	302

CAPÍTULO VIII: Funções circulares

NOÇÕES SOBRE ARCOS E ÂNGULOS

	Pág.		Pág.
Preliminares	309	Arcos côngruos	315
Medida dos arcos e dos ângulos	309	Generalização da noção de ângulo	315
Relação fundamental	310	Arcos simétricos	316
Generalização da noção de arco	313	Arcos suplementares	316
Medida algébrica de um arco orientado	313	Arcos que diferem de uma semicircunferência	317
		Exercícios para resolver	317

FUNÇÕES CIRCULARES

	Pág.		Pág.
Círculo trigonométrico	319	Representação gráfica	322
Cosseno	320	Seno	323
Variação do cosseno	320	Variação do seno	323

	Pág.		Pág.
Representação gráfica	324	Representação gráfica	332
Tangente	324	Resumo da variação das funções circulares	333
Variação da tangente	325	Sinais das funções circulares	333
Representação gráfica	326	Inversão do cosseno e da secante	335
Cotangente	327	Inversão do seno e da cossecante	336
Variação da cotangente	327	Inversão da tangente e da cotangente	337
Representação gráfica	328	Exercícios para resolver	339
Secante	329		
Variação da secante	329		
Representação gráfica	330		
Cossecante	331		
Variação da cossecante	331		

REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

	Pág.		Pág.
Relações entre as funções circulares de certos arcos	340	Arcos complementares	343
Arcos simétricos	340	Redução ao primeiro quadrante	344
Arcos suplementares	341	Exercícios resolvidos	345
Arcos que diferem de uma semicircunferência	342	Exercícios para resolver	346

RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES CIRCULARES DE UM MESMO ARCO

	Pág.		Pág.
Relações fundamentais	350	Funções circulares dos arcos de 30°, 60° e 45°	357 e 358
Relações derivadas	353	Exercícios para resolver	359
Exercícios resolvidos	354		

CÁLCULO DAS FUNÇÕES CIRCULARES DOS ARCOS $\frac{p\pi}{n}$

	Pág.		Pág.
Teorema	362	Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{p\pi}{n}$	363
Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{\pi}{n}$	362	Aplicação	364
Aplicação	363	Exercícios para resolver	365

CAPÍTULO IX: Transformações trigonométricas

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

	Pág.		Pág.
Preliminares	369	Adição de mais de dois arcos	372
Projeção de um vetor sobre um eixo	369	Subtração de arcos	373
Adição de dois arcos	370	Exercícios resolvidos	374
		Exercícios para resolver	376

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE ARCOS

Pág.		Pág.
Preliminares.....	379	
Multiplicação de arcos.....	379	a em função de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$
Divisão de arcos.....	381	Exercícios resolvidos.....
Funções circulares de um arco		Exercícios para resolver.....

TRANSFORMAÇÃO DE SOMAS EM PRODUTOS

Pág.		Pág.
Transformação de somas e diferenças de senos e cossenos.....	393	Exercícios resolvidos.....
		Exercícios para resolver.....

USO DAS TÁBUAS TRIGONOMÉTRICAS

Pág.		Pág.
Preliminares.....	398	conhecido o log. de seu seno ou de sua tangente..
Uso das tábuas.....	400	Determinação de um ângulo conhecido o log. de seu cosseno ou de sua cotangente.....
Cálculo do log. do seno ou da tangente de um ângulo..	400	Caso dos ângulos inferiores a 3°
Cálculo do log. do cosseno ou da cotangente de um ângulo.....	401	
Determinação de um ângulo		

CAPÍTULO X: Equações trigonométricas

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Pág.		Pág.
Preliminares.....	409	Exercícios para resolver.....
Exercícios resolvidos.....	410	

CAPÍTULO XI: Resolução de triângulos

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Pág.		Pág.
Preliminares.....	425	Resolução de triângulos retângulos.....
Relações entre os elementos de um triângulo retângulo	425	Exercícios para resolver.....

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS OBLIQUÂNGULOS

Pág.		Pág.
Relações entre os elementos de um triângulo obliquângulo	436	Resolução de triângulos obliquângulos.....
Área de um triângulo obliquângulo.....	439	Exercícios para resolver.....

APLICAÇÕES À TOPOGRAFIA

Pág.		Pág.
Determinação da distância de um ponto acessível a um inacessível.....	458	de dois pontos inacessíveis.....
Dete		Triangulação.....

339



leonardo da vinci
ESCOLA DE 2º GRAU

Form

Pág.
463
7

339

