

THALES MELLO CARVALHO

MATEMÁTICA

PARA OS CURSOS
CLÁSSICO *e*
CIENTÍFICO

1.^a SÉRIE

Companhia Editora Nacional
São Paulo - Rio de Janeiro - Baía - Recife - Porto Alegre

formas lineares de eqs algébricas

teremos uma eq algébrica de grau n.

$$(1) f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

transformamos sobre ela a transformação linear

$$(2) z = \frac{au+b}{cu+d}$$

onde a que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (3)

se $b \neq 0$, os 2 membros $\frac{a}{c} = \frac{e}{d}$, isto é, $ad = bc$

MATEMÁTICA

Substituímos em (2) a forma $k = \text{constante}$
PRIMEIRA SÉRIE

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

$$\frac{au+b}{cu+d} = k = \text{constante}$$

$$au+b = k(cu+d)$$

$$(a-kc)u + (b-kd) = 0$$

para que seja a raiz que se atribua a u , logo
 $a = kc$
 $b = kd$ } Embe $ad - bc = 0$.

Substituindo (2) em (1) e multiplicando em seguida os 2 membros $(cu+d)^n$, obtemos a seguinte eq algébrica

$$(4) F(u) = (cu+d)^n \left(\frac{au+b}{cu+d} \right) = 0$$

grau \leq menor ou igual a n . Esta eq. chama-se transformação de Möbiuste (5). Para que $F(u) = 0$ seja de grau $\leq n$ é necessário que resulte

$$a^n + a_1 a^{n-1} c + a_2 a^{n-2} c^2 + \dots + a_n c^n = 0$$

isto é, que $\frac{a}{c}$ seja raiz de $f(z) = 0$.
Lendo isto, a cada raiz ξ de (1) corresponde uma raiz η da transformada (4) dada por

$$\eta = \frac{-d\xi + b}{c\xi - a}$$

Este valor (2) em relação a u e por $z = \frac{au+b}{cu+d}$. Na inversa a cada raiz η da transformada (4) corresponde uma raiz ξ de (1)

1000

m... na

g.
vau.

c $z = \frac{au+b}{cu+d}$
+ satisf.
!

as raiz

Caso pela fórmula $\xi = \frac{ap+b}{cp+d}$

porque $-\frac{d}{c}$ não é raiz de (4).

Obtemos transformações simples ou elementares as transformações do tipo:

$$z = u + h, \quad z = ku, \quad z = \frac{1}{u}$$

as quais se obtêm respectivamente a partir de translação, homotecia e inversão. É fácil ver que qq outra transformação linear se pode obter aplicando sucessivamente transformações deste tipo ou emo se usa dizer é um produto de transformações simples.

Um efeito, se $c \neq 0$, posto z

$$z = u_1 + \frac{a}{c}$$

$$u_1 = \frac{bc - ad}{c^2}$$

$$u_2 = \frac{1}{u_3}$$

$$u_3 = u + \frac{d}{c}$$

resulta (2) - se $c = 0$ basta ser $d \neq 0$ para que o set^o de (2) não seja nulo. Basta então por

$$z = u_1 + \frac{b}{d}$$

$$u_1 = \frac{a}{d} u$$

para ter (2) em $c = 0$

Efetuada a uma oportuna transformação pode acontecer que a equação transformada seja de forma mais simples que a primitiva.

Por ex. procuramos que com uma oportuna translação se possa obter uma transformação privada de termos do grau $n-1$.

Um efeito, posto em $f(z)$

$$z = u + h$$

tem-se desenvolvendo a pela fórmula de Taylor

$$F(u) = f(u+h) = f(h) + u f'(h) + \frac{u^2}{2!} f''(h) + \dots + \frac{u^n}{n!} f^{(n)}(h)$$

Para que o coeficiente de u^{n-1} na eq transformada

$$F(u) = 0$$

seja nulo, é nec determinar h de modo a satisfazer a eq do 1^o grau em h:

$$f^{(n-1)}(h) = 0, \text{ isto é, a equação}$$

$$n! a_0 h + (n-1)! a_1 = 0$$

Basta então, tomar

$$h = -\frac{a_1}{n a_0}$$

para ter a eq $F(u) = 0$ sem o termo de grau $n-1$.

Tomem por ex. $f(z) = z^2 + pz + q = 0$

Esta em a transformada: $z = u + \frac{p}{2}$ transformada na equação

THALES MELLO CARVALHO

Do Ensino Secundário da Prefeitura do Distrito Federal e dos Colégios Andrews, La-Fayette e Santo Ignácio

$$u^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0 +$$

a qual tem para raiz: $\pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Segue-se que a raiz da primitiva são: $z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

MATEMÁTICA

$$f(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

Tomos De acôrdo com os programas dos Cursos

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

$$f'(z) = 3z^2 + 2a_1 z + a_2$$

$$f''(z) = 6z + 2a_1$$

$$f'''(z) = 6$$

PRIMEIRA SÉRIE

Para que a transformada $F(u) = 0$ mediante a translação $z = u + h$ não tenha o termo de 2^o grau, devemos tomar h de modo a satisfazer a eq. $f''(h) = 0$, isto é, a equação $6h + 2a_1 = 0$.

$$h = -\frac{a_1}{3}$$

Resulta, então,

$$f(h) = -\frac{1}{27} a_1^3 + \frac{a_1^3}{9} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3 = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3$$

$$f'(h) = \frac{1}{3} a_1 - \frac{2}{3} a_1 + a_2 = a_2 - \frac{1}{3} a_1^2$$

$$f''(h) = 0$$

$$f'''(h) = 6$$

$$\text{Posto } z \text{ então: } p = a_2 - \frac{1}{3} a_1^2, \quad q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3$$

a equação COMPANHIA EDITORA NACIONAL S. Paulo - Rio de Janeiro - Recife - Belo Horizonte - Pôrto Alegre

$$u^3 + pu + q = 0 \quad 43$$

Será a transformada de $f(z) = 0$ mediante $z = u - \frac{a_1}{3}$ e as raízes dadas serão iguais a dadas última diminuídas de $\frac{a_1}{3}$.

Equações recíprocas

Seja a eq (6) $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$, onde suponho $a_0 \neq 0$, isto é, que a eq. não tenha raiz nula.

A sua transform. mediante o recíproco de

$$z = \frac{1}{u}$$

$$(6) F = u^n f\left(\frac{1}{u}\right) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 = 0$$

que se chama a equação das raízes recíprocas da dada porque as raízes de uma são as recíprocas das da outra.

Então, para reduzir de eq. dada a de raízes recíprocas basta inverter esta no orden. dos coeficientes.

- DO MESMO AUTOR
1. Elementos de Matemática Comercial e Financeira, (Cia. Editora Nacional).
 2. Lições de Matemática, 1.º e 2.º fascículos (edições do autor), esgotadas.
 3. Lições de Trigonometria Retilínea, (edição do autor).
 4. Curiosidades Matemáticas (Distribuidores: Civilização Brasileira S. A.).

Em preparação:

5. Matemática, para o 2.º ano dos Cursos Clássico e Científico (Cia. Editora Nacional).
6. Matemática, para o 3.º ano dos Cursos Clássico e Científico (Cia. Editora Nacional).

Queremos determinar as cúbicas que devem satisfazer o coeficiente de (5) para que esta e (6) tenham as mesmas raízes, isto é, para que sendo α uma raiz de (5), o seja a sua $\frac{1}{\alpha}$ com a mesma ordem de multiplicidade.

Uma eq. sus. tip. chama-se recíproca. Se a eq. (5) é recíproca, as equações $f(z) = 0$ e $z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$

tenham a mesma raiz. O mesmo se pode dizer da equação

$$(7) a_n f(z) - a_0 z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

e qual ind. do grau menor que n , e' então uma identidade. \odot

Exemplar N.º 4803 \otimes termos independentes de z em (7) e $a_n - a_0 = 0$ devendo ser nula segue-se que

$$a_n = \epsilon a_0 \text{ com } \epsilon = \pm 1$$

Segue-se que deve ser identicamente

$$(8) f(z) - \epsilon z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

onde:

$$(9) a_0 = \epsilon a_n, a_1 = \epsilon a_{n-1}, a_2 = \epsilon a_{n-2}, \dots, a_n = \epsilon a_0$$

isto é, na eq. recíproca os coef. extremos são iguais, no mesmo sentido e 2 coef. eq. equidistantes dos extremos são iguais no 1.º caso iguais e opostos no 2.º.

Inversamente, se subsistem as (9), as (7) é uma identidade e logo a (5) é uma eq. recíproca. Se se supõe agora que a equação (5) admite raízes 1 e -1 , façam em (8) necessariamente $z=1$ e $z=-1$. Conclua-se

$$f(1)(1 - \epsilon) = 0$$

$$f(-1)(1 - \epsilon(-1)^n) = 0$$

Mas $f(1)$ e $f(-1)$ não são nulos, logo deve ser $1 = \epsilon$ e $1 = (-1)^n$, isto é, n é um número par e sendo $\epsilon = 1$, os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais. A equação dada é pto. do tipo seguinte:

$$(10) f(z) = a_0 z^{2m} + a_1 z^{2m-1} + \dots + a_{m-1} z^{m+1} + a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

com todo o carinho

paternal.

Se ao contrário, 1 e -1 são raízes múltiplas de ordem μ e -1 raiz múltipla de ordem ν , tem-se

$$f(z) = (z-1)^\mu (z+1)^\nu \psi(z)$$

será então, $\psi(z) = 0$ uma eq. recíproca (de grau $n - \mu - \nu$) a qual não admite uma raiz 1 e -1 . Logo $\psi(z)$ do grau par e tem iguais os coeficientes equidistantes dos extremos. Terá assim a forma (10). Podemos logo incluir: A resolução de uma eq. recíproca pode ser reduzida a resolução de uma equação recíproca de grau par $2m$ e da forma

$$(11) a_0 z^{2m} + a_1 z^{2m-1} + \dots + a_{m-1} z^{m+1} + a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Demonstrem agora, o seguinte teorema importante:

A resolução da equação (11) pode ser reduzida a resolução de uma equação de grau m e a resolução de m equações de 2.º grau.

Dividimos a eq. (11) por z^m tem

$$a_0 \left(z + \frac{1}{z}\right)^m + a_1 \left(z + \frac{1}{z}\right)^{m-1} + \dots + a_{m-1} \left(z + \frac{1}{z}\right) + a_m = 0$$

pondo

$$V_i = z + \frac{1}{z}$$

tem

$$(12) a_0 V_m + a_1 V_{m-1} + \dots + a_{m-1} V_1 + a_m = 0$$

Porém agora

$$u = V_1 = z + \frac{1}{z}$$

onde

$$z^2 - uz + 1 = 0 \therefore z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2} \quad (13)$$

Do 1.º sent. babc

$$\left(z^{i+1} + \frac{1}{z^{i+1}}\right) = \left(z^i + \frac{1}{z^i}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^{i-1} + \frac{1}{z^{i-1}}\right)$$

fornece para V_i a relação recorrente

$$V_{i+1} = V_i \cdot u - V_{i-1}$$

que permite calcular sucessivamente $V_1, V_2, V_3, V_4, \dots$

$$(19) \quad V_1 = u \quad V_2 = u^2 u, \quad V_3 = u^3 - 3u, \quad V_4 = u^4 - 4u^2 + 2, \dots$$

Em geral, obtém-se para V_m uma eq. de grau m em u com coeficientes inteiros. Substituindo u em (12) no lugar de V_i e suas expressões (14) em u , obtém-se uma eq. em z (eq. resolvente de grau m). Resolvida esta eq. e suas raízes z_1, z_2, \dots, z_m mediante (13) encontramos imediatamente as $2m$ raízes, as pares reciprocas, de eq. própria. O termo i é com demonstração.

Ex: a eq. $z^5 - 1 = 0$ admite a raíz $z=1$, logo é dividível por $z-1$ e reduz-se a form. (11)

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Dividind. por z^2 , vem

$$\left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

A eq. resolvente em u é então

$$u^2 + u - 1 = 0$$

cuja raíz são: $u_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ e $u_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. substituímos em (12)

$$z = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{5} \pm i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right\}$$

$$z = \frac{1}{4} \left\{ -\frac{1}{2} - \sqrt{5} \pm i \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right\}$$

as quais juntas com o valor $z=1$ dão as 5 raízes da eq. própria.

Obs.: A resolução de uma eq. reciproca pode reduzir-se a de uma eq. binomia

$$z^n - a = 0$$

Basta em efecto por $x = z \sqrt[n]{a}$, onde $\sqrt[n]{a}$ é uma qq. das raízes n enésimas de a , para ter da precedente a equação reciproca

$$z^n - 1 = 0$$

PREFÁCIO

O compêndio que ora apresentamos foi elaborado rigorosamente de acôrdo com os programas oficiais do 2.º ciclo, expedidos pela Portaria Ministerial n. 177 de 16 de Março de 1943.

Atendendo a que a diferença entre os programas dos cursos Clássico e Científico reside apenas no fato de alguns pontos dêste último não constarem daquele, resolvemos preparar um só volume para cada série de ambos, indicando aos estudantes do primeiro aquilo que não necessitarão ler. Tivemos o cuidado de, assim procedendo, evitar que a omissão de tais pontos possa constituir lacunas prejudiciais ao encadeamento dos assuntos seguintes.

Suprimimos as demonstrações de alguns teoremas, por nos parecerem acima do nível de inteligência exigível na primeira série do 2.º ciclo. Em alguns casos substituímos demonstrações rigorosas, porém inacessíveis

aos alunos, por raciocínios práticos e intuitivos. Assim o fizemos afim de que o nosso modesto compêndio não seja apenas *adquirido* mas, também, *lido* pelo estudante.

De nossos prezados colegas receberemos com a maior satisfação quaisquer referências críticas ao trabalho que ora submetemos à sua apreciação.

Rio de Janeiro, Julho de 1943.

O AUTOR

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CIENTÍFICO

Primeira Série

ARITMÉTICA TEÓRICA

Unidade I. As operações aritméticas fundamentais: 1. Teoria da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2. Sistemas de numeração.

Unidade II. A divisibilidade numérica: 1. Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m. d. c. e do m. m. c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

Unidade III. Os números fracionários: 1. Teoria das operações aritméticas sobre números fracionários. 2. Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros. Operações abreviadas.

ÁLGEBRA

Unidade IV. Os polinômios: 1. Operações algébricas sobre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Identidade de polinômios; método dos coeficientes a determinar; identidades clássicas. 4. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Unidade V. O trinômio do 2.º grau: 1. Decomposição em fatores do 1.º grau; sinais do trinômio; inequações do 2.º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica. 3. Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.

GEOMETRIA

Unidade VI. O plano e a reta no espaço: 1. Determinação de um plano. 2. Interseção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros.

Unidade VII. Os poliedros: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos. 3. Teorema de Euler; noções sobre os poliedros regulares.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO
CURSO CLÁSSICO

Primeira Série

ARITMÉTICA TEÓRICA

Unidade I. A divisibilidade numérica: 1. Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m. m. c. e do m. d. c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

ÁLGEBRA

Unidade II. Os polinômios: 1. Operações algébricas sobre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Unidade III. O trinômio do 2.º grau: 1. Decomposição em fatores do 1.º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2.º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica.

GEOMETRIA

Unidade IV. O plano e a reta no espaço: 1. Determinação de um plano. 2. Interseção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Noções sobre ângulos poliédricos.

Unidade V. Os poliedros: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos.

CAPÍTULO I

Aritmética teórica

UNIDADE:

As operações aritméticas fundamentais

CURSO CIENTÍFICO

1. Teorias da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros.
2. Sistemas de numeração.

ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

I. Preliminares. — *Adição* é a operação que tem por fim, dados dois ou mais números (inteiros), determinar um número formado por todas as unidades dos números dados.

Os números que são adicionados denominam-se *parcelas* e o resultado da operação chama-se *soma* ou *total*.

O sinal da adição é + que se lê: *mais* e se coloca entre cada duas parcelas consecutivas. Assim

$$17 + 12 + 25$$

indica que os números 17, 12 e 25 devem ser adicionados.

Consideremos o caso da adição de dois números A e B .

I. Se nenhum dêles for nulo, a soma $A + B$ será evidentemente maior do que qualquer um dêles separadamente, pois além de conter as unidades dêle, conterà ainda as unidades (ou a unidade) do outro.

II. Se um dêles for nulo, então a soma conterà tantas unidades quantas são as do outro. Assim

$$A + B = A \quad \text{se} \quad B = 0$$

ou
$$A + B = B \quad \text{se} \quad A = 0$$

Se ambas as parcelas forem nulas a soma será também nula, isto é,

$$A + B = 0 \quad \text{se} \quad A = 0 \quad \text{e} \quad B = 0 (*)$$

III. Se um dêles for a *unidade*, a soma conterà as unidades do outro mais uma unidade, isto é, será, na sucessão dos

*) Não se esqueça o leitor de que A e B ou são *números naturais* (1, 2, 3,) ou *zero*.

números inteiros, o número seguinte àquele. Esta operação é fundamental na prática da adição, como veremos mais adiante.

A observação I pode estender-se ao caso geral da adição de várias parcelas. Se, pelo menos duas parcelas não forem nulas, a soma será maior do que qualquer parcela.

Se todas as parcelas forem iguais, a adição poderá ser substituída por uma outra operação — a *multiplicação*, como veremos no estudo desta.

2. Prática da operação. — Seja adicionar os números 7 e 5. Em virtude da definição dada, devemos reunir a um deles sucessivamente as unidades do outro. Assim, por exemplo, reunindo ao número 7 as unidades de 5, teremos sucessivamente

$$7 + 1 = 8, \quad 8 + 1 = 9, \quad 9 + 1 = 10, \quad 10 + 1 = 11, \quad 11 + 1 = 12$$

Este processo elementar, como facilmente se vê, embora seja aceitável quando as parcelas contêm números pequenos de unidades, torna-se impraticável pela sua lentidão, quando as mesmas são números elevados. Há, pois, necessidade de uma simplificação do processo, isto é, do estabelecimento de uma regra prática para a adição de números inteiros. É o que veremos a seguir.

I. Admitamos inicialmente que se trate da *adição de dois números de um só algarismo*. Neste caso a experiência demonstrou a conveniência da memorização dos resultados de todas as combinações possíveis, o que se deve fazer no início do estudo da aritmética primária. Estes resultados podem ser reunidos no quadro ao lado, denominado *tábua de somar*, e que se forma do seguinte modo: escreve-se, na primeira linha, 0 seguido dos nove primeiros números naturais; na segunda linha os 10 primeiros números naturais, na terceira dez números naturais consecutivos a partir de 2, e assim por diante, até a décima linha onde se escrevem dez números naturais consecutivos a partir de 9.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Concluimos, então, pela própria definição de adição, que à direita do primeiro número de cada linha estão sucessivamente suas somas com os nove números inteiros 1, 2, ... 9. Observando que estes números estão no alto de cada coluna a partir da segunda, podemos dizer que a soma de dois números dados (de um só algarismo) se encontra no cruzamento da linha começada por um deles com a coluna encabeçada pelo outro. Assim a soma $8 + 5$ se acha no encontro da linha começada por 8 com a coluna encabeçada por 5.

II. Consideremos agora o caso da *adição de um número de mais de um algarismo e outro de um só algarismo*.

Seja, por exemplo calcular a soma $275 + 8$. Sendo 275 a soma dos valores relativos de seus algarismos, isto é, a soma de 2 centenas (ou 200 unidades), 7 dezenas (ou 70 unidades) e 5 unidades, a soma $275 + 8$ equivale à soma

$$200 + 70 + 5 + 8$$

Sendo a soma de 5 unidades e 8 unidades igual a 13 unidades, ou seja 1 dezena e 3 unidades (caso anterior), a soma considerada passará a ser

$$200 + 70 + 10 + 3$$

ou, reunindo as dezenas,

$$200 + 80 + 3$$

ou sejam 283.

Na prática realiza-se, pois, a operação adicionando-se a parcela de um algarismo ao algarismo (*) das unidades da outra, e sendo a soma superior a 9, escreve-se o seu algarismo das unidades e adiciona-se 1 ao algarismo das dezenas da primeira parcela.

III. O caso da *adição de vários números de um só algarismo* é agora uma aplicação dos anteriores. Com efeito sabemos que a adição de vários números se realiza adicionando-se os dois primeiros, a seguir o resultado ao terceiro, e assim por diante. Enquanto essas adições parciais tiverem como resultado números de um só algarismo, seguiremos a regra I. A partir do momento em que um resultado for um número de mais de um algarismo, as adições seguintes serão feitas de acôrdo com a regra II.

IV. Tratem-se, agora, do caso da *adição de números de mais de um algarismo*. Seja calcular a soma

$$876 + 497 + 265$$

Obtém-se esta, adicionando-se separadamente as unidades de mesma ordem dos números dados, isto é, realizando-se as operações parciais

$$6 \text{ unidades} + 7 \text{ unidades} + 5 \text{ unidades} = 18 \text{ unidades}$$

$$7 \text{ dezenas} + 9 \text{ dezenas} + 6 \text{ dezenas} = 22 \text{ dezenas}$$

$$8 \text{ centenas} + 4 \text{ centenas} + 2 \text{ centenas} = 14 \text{ centenas}$$

e reunindo-se os resultados parciais 18 unidades (ou 1 dezena e 8 unidades), 22 dezenas (ou 2 centenas e 2 dezenas) e 14 centenas (ou 1 milhar e 4 centenas). Obtém-se 1 milhar, 6 centenas, 3 dezenas e 8 unidades, ou seja o número 1 538. Na prática, em virtude do princípio de posição de nosso sistema de numeração (**) estas operações se realizam com extraordinária facilidade, de acôrdo com a seguinte regra:

(*) E' frequente utilizar-se a denominação algarismo mesmo tratando-se de *valor absoluto de algarismo*.

(**) Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vezes maiores do que as representadas por este outro.

REGRA. — Para somar números de vários algarismos escrevem-se uns abaixo dos outros de modo que suas unidades de mesma ordem fiquem nas mesmas colunas; efetua-se separadamente a adição dos números contidos em cada coluna começando pela direita, e tendo-se o cuidado de, cada vez que uma destas somas ultrapassar 9, escrever apenas o seu algarismo das unidades debaixo da coluna e adicionar o seu algarismo das dezenas à soma dos números da coluna seguinte. O número formado pelos algarismos assim obtidos é a soma procurada.

3. **Possibilidade da adição.** — Como a sucessão dos números naturais é *ilimitada*, a operação de adição é sempre *possível* na classe dos números naturais isto é, dados dois ou mais números naturais existirá um número natural que contenha todas as unidades dos números dados.

4. Propriedades da adição.

I. *A adição é uma operação unívoca.*

Esta propriedade indica que a adição é uma operação que tem um só resultado. Ela decorre imediatamente da própria definição de adição, pois não é possível, reunindo as unidades de vários números dados encontrar dois resultados diferentes.

II. *A adição é uma operação comutativa.*

Esta propriedade pode também ser assim enunciada: *A ordem das parcelas não altera a soma*. Como no caso anterior, ela resulta da própria definição, pois qualquer que seja a posição das parcelas, suas unidades (que vão formar as unidades do total) serão sempre as mesmas.

III. *A adição é uma operação associativa.*

Assim se exprime que o resultado de uma adição não se altera quando se substituem duas ou mais parcelas pela sua soma.

Esta propriedade é uma consequência da definição de adição e da propriedade comutativa. Com efeito, considerando-se um certo número de parcelas de uma soma, pode-se, em virtude da propriedade comutativa, escreve-las em primeiro lugar; de acôrdo com a definição de adição a soma to-

tal será o resultado da adição da soma destas primeiras parcelas e das demais.

IV. *A adição é uma operação dissociativa.*

Esta propriedade indica que se pode substituir, sem alterar o resultado, uma parcela pela soma equivalente de duas ou mais. Assim

$$6 + \overline{13} + 5 = 6 + \overbrace{4 + 7 + 2} + 5$$

Esta propriedade é uma consequência imediata da anterior.

V. *A adição é uma operação monotônica.*

Esta propriedade exprime que, sendo A , B e C três números inteiros e $A < B$, será

$$A + C < B + C$$

Realmente, se B contém outras unidades além das de A (por ser maior do que A), $B + C$ conterá também unidades além das de $A + C$, isto é, será maior do que $A + C$.

5. Aplicação ao cálculo mental. — As propriedades anteriores são de grande utilidade para o cálculo mental, conforme mostraremos nos exemplos a seguir.

I. Seja calcular a soma

$$S = 7 + 8 + 3 + 2 + 6 + 5 + 4$$

Em virtude da propriedade comutativa podemos mentalmente juntar as parcelas 7 e 3; 8 e 2, e 6 e 4, e, de acôrdo com a propriedade associativa, realizar suas adições parciais, de modo que a soma S se torna

$$S = 10 + 10 + 10 + 5$$

e facilmente se calcula.

Êste tipo de cálculo mental aplica-se com vantagem quando se efetua uma adição de muitas parcelas.

II. Seja calcular a soma

$$S = 58 + 37$$

Pode-se realiza-la mentalmente com simplicidade decompondo-se uma das parcelas, como 37, por exemplo, na

soma $30 + 7$ (propriedade dissociativa) e efetuando-se as seguintes operações faceis

$$58 + 30 = 88 \quad 88 + 7 = 95$$

III. Seja calcular a soma

$$S = 68 + 97$$

Seu cálculo mental torna-se muito simples, substituindo-se a parcela 68 pela soma $65 + 3$ (propriedade dissociativa) e realizando-se as seguintes operações

$$97 + 3 = 100 \quad 100 + 65 = 165$$

6. Provas da adição.

I. Efetuada uma adição, pode-se experimentar sua exatidão, tomando-se as parcelas em outra ordem e realizando-se novamente a operação. Êste processo visa evitar a repetição inconciente de um êrro cometido. Baseia-se no fato de ser muito pequena a probabilidade de se cometer o mesmo êrro nas duas operações.

Na prática aplica-se esta prova somando-se as parcelas em sentido inverso àquele em que foi efetuada a adição. Como esta é feita habitualmente *de cima para baixo*, realiza-se a prova somando-se as parcelas *de baixo para cima*.

II. Realiza-se, ainda, outra prova com o auxílio da subtração, conforme veremos mais adiante (n.º 12).

III. Outra prova habitualmente usada é a denominada *prova dos nove*. Dela trataremos mais adiante (Cap. II, n.º 31) quando estudarmos os princípios de divisibilidade em que se baseia.

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

7. Preliminares. — Subtração é a operação que tem por fim, dados dois números (inteiros), determinar de quantas unidades o maior excede o menor, ou, o que é o mesmo, determinar um número que, somado ao menor, reproduza o maior.

Nesta última forma a subtração pode ainda ser assim enunciada: operação que tem por fim, dada a soma de dois números e um dêles, achar o outro.

O número maior denomina-se *minuendo* ou *diminuendo* e o menor *subtraendo* ou *diminuidor*. O resultado chama-se *resto*, *excesso* ou *diferença*. O *minuendo* e o *subtraendo* denominam-se indiferentemente *termos* da subtração.

O sinal da subtração é — que se lê *menos* e se coloca entre o minuendo e o subtraendo. Assim $16 - 7$ indica que o número 7 deve ser diminuído de 16.

8. Noção de operação inversa. — Sejam A e B dois números e suponhamos que uma determinada operação sobre êles conduza a um resultado R . Designando por o esta operação, podemos escrever simbolicamente

$$A \ o \ B = R$$

significando que a aplicação da operação o aos números A e B dá como resultado R .

Se existe uma operação o' que permita, conhecidos A e R determinar B , isto é, tal que

$$R \ o' \ A = B$$

e se existe uma operação o'' que permita calcular A , dados B e R , ou seja

$$R \ o'' \ B = A$$

diz-se, então, que o' e o'' são *operações inversas* de o .

Se a operação o é comutativa, isto é, se

$$A \ o \ B = B \ o \ A$$

as operações o' e o'' são idênticas.

Consideremos o caso da adição, isto é, admitamos que a soma de dois números A e B seja R , ou

$$A + B = R$$

Do que acabamos de expor resulta que, dados A e R (ou B e R) obtém-se B (ou A) por uma operação de subtração

$$B = R - A \quad (\text{ou } A = R - B)$$

Assim podemos dizer que a *subtração é a operação inversa da adição*, o que corresponde à terceira definição dada de subtração.

9. Limitação da subtração. — Vimos anteriormente que a adição é sempre *possível* na classe dos números naturais, isto é, que, dados dois ou mais números naturais, sua soma é um número natural. Tal não acontece, entretanto, com a subtração. Dados dois números naturais A e B , a diferença $A - B$ só será um número natural se $A > B$. Se $A \leq B$, a subtração $A - B$ é *impossível* na classe dos números naturais, isto é, o seu resultado não é um número natural. Veremos mais tarde que esta operação só se tornará possível mediante uma extensão do conceito de número.

10. Prática da operação. — Na prática da operação distinguiremos os seguintes casos:

I. *O subtraendo é um número de um algarismo e o minuendo é tal que o resto seja também um número de um algarismo.*

Assim o minuendo será, no máximo, igual a 18. A experiência demonstrou a conveniência de se ter de cór os resultados de todos os casos possíveis. Êstes podem ser obtidos da tábua de somar (n.º 2), como mostraremos no exemplo seguinte. Seja calcular a diferença $13 - 5$. Procuramos na linha começada por 5 o número 13; o primeiro número da coluna em que êste se acha é a diferença pedida. A construção da tábua, dada no estudo da adição, e a definição de subtração justificam o procedimento acima.

9. TRONCO DE PIRÂMIDE REGULAR

Notações	Fórmula
p, p' : semi-perímetro das bases	$S_l = (p+p')\alpha$ (Cap. VII, n.º 57)
a, a' : apótemas das bases	$S_t = p(a+\alpha) + p'(a'+\alpha)$ (Cap. VII, n.º 58)
α : apótema	$V = \frac{h}{3}(pa + p'a' + \sqrt{pp'aa'})$
h : altura	(Cap. VII, n.º 61)

10. TRONCO DE PIRÂMIDE

Notações	Fórmula
B, B' : áreas das bases	$V = \frac{h}{3}(B+B'+\sqrt{BB'})$
h : altura	(Cap. VII, n.º 61)

11. POLIEDROS CONVEXOS

Notações	Fórmula
A : número de arestas	$A + 2 = F + V$ (Cap. VII, n.º 63)
F : número de faces	
V : número de vértices	

BIBLIOGRAFIA

1. ALMEIDA LISBOA, J. I. — *Lições de Álgebra Elementar*, 1.º volume, S. Paulo, Cia. Editora Nacional, 2.ª ed., 1942.
2. ANDRÉ, PH. — *Précis de Géométrie*, Paris, Liv. André-Guédon, 1906, 5.ª ed.
3. AUBERT ET PAPELIER — *Ezercices de Calcul Numérique*, Tomo I, Paris, Librairie Vuibert, 1920.
4. BALLORE, R. DE MONTESSUS DE — *Cours de Mathématiques*, Collection Charles de Comberousse, Tomo primeiro, 2.ª parte, Paris, Gauthier-Villars, 6.ª ed., 1921.
5. BENITEZ Y PARODI, MANUEL e IGNACIO SALINAS Y ANGULO — *Aritmética*. Madrid, Libreria de los sucesores de Hernandez, 2.ª ed., 1913.
6. BOURLET, CARLO — *Leçons d'Algèbre Élémentaire*, Paris, Librairie Armand Colin, 7.ª ed., 1911.
7. CAJORI, FLORIAN — *A History of Elementary Mathematics*, New York, Macmillan, 1897.
8. COMBETTE, C. — *Cours d'Arithmétique*. Paris, Félix Alcan, 11.ª ed., 1902.
9. CONANT, LEVI LEONARD — *The number concept, its origin and development*. New York, Macmillan, 1931.
10. COSTA, M. AMOROSO — *As ideias fundamentais da Matemática*. Rio de Janeiro, Pimenta de Mello, 1929.
11. CRANTZ, PAUL — *Aritmética y Algebra*. Trad. do Prof. Fernando Lorente de Nó, Barcelona, Editorial Labor, 4.ª ed., 1940.
12. DE COMBEROUSSE, CHARLES — *Cours de Mathématiques*. Tome Premier, Première Partie — Arithmétique. Paris, Gauthier-Villars, 5.ª ed., 1911.
13. DE COMBEROUSSE, CHARLES — *Cours de Mathématiques*. Tome deuxième, Première Partie. — Géométrie Élémentaire, Plane et dans l'Espace. Paris, Gauthier-Villars, 1920, 5.ª ed.
14. DE COMBEROUSSE, CHARLES — *Cours d'Algèbre Supérieure*. 1.ª parte. Paris, Gauthier-Villars, 3.ª ed., 1904.
15. FETTWEIS, E. — *Wie man einstens rechnet*. Leipzig, B. G. Teubner, 1923.
16. F. G. M. — *Ezercices d'Arithmétique*. Tours, Maison A. Mame & Fils, 1911.
17. FITZ-PATRICK, J. — *Ezercices d'Arithmétique*. Paris, Librairie A. Hermann, 3.ª ed., 1914.
18. GIROD, FÉLICIEN e EMILE WEILL — *Éléments de Géométrie*. Paris, Lib. André-Guédon.

19. GONÇALVES, J. VICENTE — *Compêndio de Aritmética* (3.º ciclo). Braga, Livraria Cruz, 1939.
20. GONSETH, F. — *Les Fondements des Mathématiques*. Paris, Librairie Le François, 1926.
21. HADAMARD, JACQUES — *Leçons de Géométrie Élémentaire, II, Géométrie l'espace*. Paris, Armand Colin.
22. INIGUEZ ALMECH, JOSÉ MARIA — *Matemáticas para Químicos*. Barcelona, Editorial Labor, 2.ª ed., 1936.
23. KLEIN, FELIX — *Elementary Mathematics from an advanced stand point*. New York, Macmillan, 1932.
24. LACROIX, S. F. — *Éléments d'Algèbre*. Paris, Gauthier-Villars, 25.ª ed., 1888.
25. LÖFFLER, EUGEN — *Ziffern und Ziffernsysteme*. I. Teil. *Die Zahlenzeichen der Alten Kulturvölker*. Leipzig, B. G. Teubner, 3.ª ed., 1928.
26. NIEWENGLAWSKI, B. — *Cours d'Algèbre*. Tomo primeiro. Paris, Librairie Armand Colin, 9.ª ed., 1920.
27. REY PASTOR, J. *Aritmética Racional*. Primeira Parte. Buenos Aires, Libreria "El Ateneo", 3.ª ed. Segunda parte. Montevideo, Libreria A. Barreiro Ramos S. A., 2.ª ed., 1932.
28. REY PASTOR, J. — *Algebra*, 2 volumes. Buenos Aires, Libreria "El Ateneo".
29. REY PASTOR, J. — *Curso Cíclico de Matemáticas*. Tomo I, Madrid, 2.ª ed., 1930.
30. REY PASTOR, J. — *Elementos de Análisis Algebraico*, Madrid, 5.ª ed., 1939.
31. ROSSOTTI, M. A. *Formulario Scolastico di Matematica Elementare*. Milão, Ulrico Hoepli, 5.ª ed., 1935.
32. ROUCHÉ, EUGÈNE e CHARLES DE COMBEROUSSE — *Traité de Géométrie, Seconde Partie, Géométrie dans l'espace*. Paris, Gauthier-Villars, 1879, 4.ª ed.
33. SEVERI, FRANCESCO — *Elementos de Geometria*. Tomo Segundo. Trad. de T. Martin Escobar, Madrid, Editorial Labor, 1931.
34. TANNERY, JULES — *Leçons d'Arithmétique*. Paris, Librairie Armand Colin, 10.ª ed., 1928.
35. THIRÉ, CECIL — *Questões de Aritmética*. Rio de Janeiro, Pimenta de Mello.
36. THIRÉ, CECIL e J. C. MELLO e SOUZA — *Problemas e Formulário de Geometria*, Rio de Janeiro, Pimenta de Mello, 6.ª ed.
37. VACQUANT, CH. e A. MACÉ DE LÉPINAY — *Éléments de Géométrie*. Paris, Masson et Cie., 1907, 15.ª ed.
38. WAISMANN, FRIEDRICH — *Introduzione al pensiero matematico*. Trad. de Ludovico Geymonat, Turim, Einaudi, 1939.
39. XAVIER, AGLIBERTO — *Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé*. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

ÍNDICE

	PÁG.
Prefácio	9
Programa do Curso científico	11
Programa do Curso Clássico	12

CAPÍTULO I: As operações aritméticas fundamentais.

ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	15	Propriedades da adição.....	19
Prática da operação.....	16	Aplicação ao cálculo mental..	20
Possibilidade da adição.....	19	Provas da adição.....	21

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	22	Princípios relativos à adição e à subtração	27
Noção de operação inversa..	22	Aplicações.....	28
Limitação da subtração	23	Expressões contendo adições e subtrações.....	28
Prática da operação.....	23	Complemento aritmético....	29
Provas da subtração.....	24	Aplicações do complemento aritmético.....	30
Prova da adição.....	25		
Princípios relativos à subtração.....	26		

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	32	Produto de somas indicadas	42
Prática da operação.....	33	Provas da multiplicação	43
Número de algarismos do produto.....	39	Produto de vários fatores...	43
Possibilidade da multiplicação.....	40	Propriedades dos produtos de vários fatores.....	44
Propriedades da multiplicação	40	Número de algarismos do produto de vários fatores...	46

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	48	Provas da divisão.....	55
Prática da operação.....	49	Propriedade.....	56
Número de algarismos do quociente.....	55	Princípios relativos à divisão.....	57

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	59	Quadrado de um número...	62
Número de algarismos da potência.....	60	Regras de exclusão.....	63
Propriedades.....	60	Cubo de um número.....	64
		Regras de exclusão.....	65

RADICIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	67	Raiz cúbica de um número..	75
Raiz quadrada.....	67	Determinação da raiz cúbica de um número.....	75
Determinação da raiz quadrada de um número.....	68	Valores extremos do resto..	82
Valores extremos do resto...	74	Prova da operação.....	83
Prova da operação.....	74	Número de algarismos da raiz.....	83
Número de algarismos da raiz	74		

EXERCÍCIOS SOBRE AS OPERAÇÕES SOBRE NÚMEROS INTEIROS

	PÁG.		PÁG.
Exercícios resolvidos.....	84	Exercícios para resolver.....	93

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	98	Passagem de um número de um sistema qualquer para o sistema decimal.....	102
Sistema binário.....	99	Passagem de um número de um sistema qualquer para outro sistema qualquer..	103
Sistema duodecimal.....	99		
Passagem de um número do sistema decimal para um sistema qualquer.....	100		

	PÁG.		PÁG.
Evolução dos sistemas de numeração.....	104	Exercícios resolvidos.....	107
		Exercícios para resolver.....	108

CAPÍTULO II: A divisibilidade numérica

TEOREMAS GERAIS SOBRE DIVISIBILIDADE

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	113	Teoremas gerais.....	114

CARACTERES DE DIVISIBILIDADE

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	120	Divisibilidade por 9.....	123
Divisibilidade por potências de 10.....	120	Divisibilidade por 3.....	126
Divisibilidade por 2 e por 5	121	Divisibilidade por 11.....	126
Divisibilidade por 4 e por 25	122	Divisibilidade por 7.....	129
Generalização.....	123	Exercícios resolvidos.....	132
		Exercícios para resolver.....	135

TEOREMAS SOBRE RESTOS E SUAS APLICAÇÕES ÀS PROVAS DAS OPERAÇÕES

	PÁG.		PÁG.
Teoremas.....	136	Prova da divisão.....	140
Provas das operações.....	137	Prova da potenciação.....	141
Prova da adição.....	138	Prova da radiação.....	142
Prova da subtração.....	139	Exercícios para resolver.....	143
Prova da multiplicação.....	139		

TEORIA DO MÁXIMO DIVISOR COMUM

	PÁG.		PÁG.
Preliminares.....	145	M.D.C. de mais de dois números.....	150
M.D.C. de dois números..	145	Teorema fundamental.....	150
Teoremas.....	145	Determinação do m.d.c. de mais de dois números...	150
Determinação do m.d.c. de dois números pelo processo das divisões sucessivas...	146	Observações.....	151
Simplificações.....	148	Propriedades do m.d.c.....	152
Teoremas.....	149		

TEORIA DO MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

PÁG.		PÁG.	
Preliminares.....	154	M.M.C. de mais de dois números.....	157
Teoremas fundamentais.....	154	Teorema fundamental.....	157
Determinação do m.m.c. de dois números, conhecido seu m.d.c.....	156	Determinação do m.m.c. de mais de dois números ..	158
		Propriedades do m.m.c.....	159

TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS

PÁG.		PÁG.	
Preliminares.....	161	Teorema de Fermat.....	170
Teoremas.....	161	Teorema de Wilson.....	170
Formação de uma tábua de números primos.....	164	Recíproca do teorema de Wilson.....	171
Teoremas.....	165	Observação.....	172
Reconhecimento de um número primo.....	168		

APLICAÇÕES DA TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS

PÁG.		PÁG.	
Aplicações.....	173	Determinação do m.m.c. de dois ou mais números ...	180
Critérios de divisibilidade...	173	Dispositivo prático.....	181
Decomposição de um número em fatores primos.....	175	Divisores de um número....	182
Teoremas.....	176	Dispositivo prático.....	183
Determinação do m.d.c. de dois ou mais números...	178	Número de divisores de um número.....	184
Dispositivo prático.....	179	Divisores comuns de dois ou mais números.....	184

EXERCÍCIOS SOBRE M.D.C. E M.M.C.

PÁG.		PÁG.	
Exercícios resolvidos.....	186	Exercícios para resolver	192

EXERCÍCIOS SOBRE NÚMEROS PRIMOS

PÁG.		PÁG.	
Exercícios resolvidos.....	195	Exercícios para resolver.....	201

CAPÍTULO III: Os números fracionários

INTRODUÇÃO

PÁG.		PÁG.	
Preliminares.....	205	Números decimais.....	207
Frações ordinárias e decimais	206		

ADIÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

PÁG.		PÁG.	
Definição.....	208	Segundo caso.....	209
Adição de frações.....	208	Observações.....	209
Primeiro caso.....	208	Adição de números decimais	210

SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

PÁG.		PÁG.	
Definição.....	211	Observações.....	212
Subtração de frações.....	211	Subtração de números decimais.....	213
Primeiro caso.....	211		
Segundo caso.....	212		

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

PÁG.		PÁG.	
Definição.....	215	Propriedade.....	217
Multiplicação de frações....	215	Produto de vários fatores...	217
Primeiro caso.....	215	Multiplicação de números decimais.....	218
Observações.....	216	Primeiro Caso.....	218
Segundo caso.....	216	Segundo caso.....	219
Terceiro caso.....	217		

DIVISÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

PÁG.		PÁG.	
Definição.....	220	Divisão de números decimais	222
Divisão de frações.....	220	Primeiro caso.....	222
Primeiro caso.....	221	Observações.....	223
Segundo caso.....	221	Segundo caso.....	224

POTENCIAÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

Pág.	Pág.
Preliminares..... 226	Potência de um número decimal..... 227
Potência de uma fração..... 227	
Observações..... 227	

RADICIAÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

Pág.	Pág.
Preliminares..... 229	Observações..... 236
Raiz quadrada..... 229	Raiz cúbica..... 237
Raiz quadrada exata..... 230	Raiz cúbica exata..... 237
Raiz quadrada aproximada..... 230	Raiz cúbica aproximada..... 237
Teorema..... 230	Observação..... 238
Observação..... 231	Raiz cúbica com aproximação fixada..... 238
Raiz quadrada com aproximação fixada..... 232	Raiz cúbica a menos de uma unidade..... 238
Raiz quadrada a menos de uma unidade..... 232	Raiz cúbica a menos de uma fração $\frac{1}{p}$ 239
Raiz quadrada a menos de uma fração $\frac{1}{p}$ 233	Raiz cúbica de números decimais..... 239
Raiz quadrada dos números decimais..... 234	Raiz cúbica a menos de uma unidade..... 240
Raiz quadrada a menos de uma unidade..... 234	Raiz cúbica a menos de uma unidade decimal..... 240
Raiz quadrada a menos de uma unidade decimal..... 235	Observações..... 241

EXERCÍCIOS SÔBRE AS OPERAÇÕES SÔBRE FRAÇÕES

Pág.	Pág.
Exercícios resolvidos..... 243	Exercícios para resolver..... 249

NÚMEROS APROXIMADOS

Pág.	Pág.
Preliminares..... 253	Números decimais aproximados..... 256
Erro absoluto..... 255	Números aproximados com n algarismos exatos..... 259
Erro relativo..... 255	
Delimitação dos erros..... 256	

Pág.	Pág.
Cotas superiores dos erros... 259	Problema inverso..... 271
Teoremas fundamentais.... 260	Problema inverso pela consideração do erro absoluto 272
Problemas fundamentais... 262	Multiplicação abreviada.... 272
Adição de números aproximados..... 263	Justificação da regra..... 274
Problema direto..... 263	Divisão de números aproximados..... 276
Problema inverso..... 264	Teoremas..... 276
Subtração de números aproximados..... 265	Problema direto..... 279
Problema direto..... 265	Problema inverso..... 279
Problema inverso..... 266	Problema inverso pela consideração do erro absoluto..... 280
Multiplicação de números aproximados..... 266	Divisão abreviada..... 280
Teoremas..... 266	Exercícios para resolver.... 282
Problema direto..... 270	

CAPÍTULO IV: Os polinômios

NOÇÕES SÔBRE POLINÔMIOS

Pág.	Pág.
Preliminares..... 287	Polinômios idênticos..... 291
Definição de polinômio.... 289	Polinômios homogêneos.... 292
Valor numérico de um polinôm. 289	Grau de um polinômio.... 292
Polinômio como função das variáveis representadas por suas letras..... 290	Polinômios ordenados..... 292
	Exercícios para resolver.... 293

OPERAÇÕES SÔBRE POLINÔMIOS

Pág.	Pág.
Adição de polinômios..... 295	crescentes da letra ordenatriz..... 306
Subtração de polinômios... 296	Caso em que alguns ou todos os coeficientes da letra ordenatriz são polinômios 306
Multiplicação de polinômios 297	Exercícios para resolver.... 309
Teoremas..... 299	
Divisão de polinômios..... 300	
Caso dos polinômios ordenados segundo as potências	

IDENTIDADE DE POLINÔMIOS

Pág.	Pág.
Definições..... 311	Método dos coeficientes a determinar..... 313
Teoremas..... 311	

PÁG.	PÁG.
Determinação do quociente e do resto de uma divisão de polinômios.....	313
Decomposição de uma fração racional.....	316
Condições de divisibilidade	318
Identidades clássicas.....	319
Exercícios para resolver....	321

DIVISÃO POR $x \pm a$

PÁG.	PÁG.
Noções fundamentais sobre polinômios idênticos....	323
Teoremas.....	323
Determinação do quociente.	325
Dispositivo prático.....	327
Teorema.....	328
Divisão por $bx - a$	330
Determinação do resto.....	330
Determinação do quociente.	331
Divisão de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$	332
Exercícios para resolver....	335

CAPÍTULO V: O trinômio do 2.º grau

DECOMPOSIÇÃO E SINAL DO TRINÔMIO DO 2.º GRAU
INEQUAÇÕES DO 2.º GRAU

PÁG.	PÁG.
Definição.....	339
Decomposição do trinômio..	339
Primeiro caso.....	340
Segundo caso.....	341
Terceiro caso.....	342
Sinal do trinômio.....	343
Primeiro caso.....	243
Segundo caso.....	344
Terceiro caso.....	345
Resumo do estudo anterior..	345
Inequações do 2.º grau com uma incógnita.....	347
Inequações de grau superior ao segundo.....	348
Exercícios para resolver....	350

VARIAÇÃO DO TRINÔMIO DO 2.º GRAU

PÁG.	PÁG.
Noções sobre variável e função.....	352
Coordenadas cartesianas de um ponto.....	353
Representação gráfica de uma função.....	353
Variac. do trinômio do 2.º grau	356
Forma aproximada da curva representativa do trinômio do 2.º grau.....	358
Representação gráfica do trinômio.....	359

NOÇÕES ELEMENTARES SOBRE CONTINUIDADE E SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS

PÁG.	PÁG.
Noções elementares sobre continuidade.....	363
Função contínua.....	364
Noção elementar de máximo de uma função.....	364
Noção elementar de mínimo de uma função.....	365

CAPÍTULO VI: O plano e a reta no espaço

DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

PÁG.	PÁG.
Preliminares.....	369
Postulados da reta e do plano	370
Proposições deduzidas.....	371
Determinação de um plano..	372

INTERSEÇÃO DE PLANOS E RETAS

PÁG.	PÁG.
Preliminares.....	373
Posições relativas de duas retas.....	374
Posições relativas de uma reta e um plano.....	375
Posições relativas de dois planos.....	375

PARALELISMO DE RETAS E PLANOS

PÁG.	PÁG.
Preliminares.....	377
Teoremas.....	377
Ângulo de duas semi-retas..	385

RETA E PLANO PERPENDICULARES. PERPENDICULARES E OBLÍQUAS DE UM PONTO A UM PLANO

PÁG.	PÁG.
Retas perpendiculares.....	386
Teorema.....	386
Reta perpendicular a um plano	387
Teoremas.....	388
Distância de um ponto a um plano.....	391
Teorema das tres perpendiculares.....	392

DIEDROS. PLANOS PERPENDICULARES ENTRE SI

PÁG.	PÁG.
Diedros..... 393	Diedros opostos pela aresta 395
Angulo plano de um diedro.. 393	Teoremas..... 395
Diedros adjacentes..... 394	Medida de um diedro..... 398
Igualdade e desigualdade de diedros..... 394	Planos perpendiculares..... 398
Soma e diferença de diedros 394	Angulo diedro reto..... 398
	Teoremas..... 399

ÂNGULOS POLIÉDRICOS

PÁG.	PÁG.
Preliminares..... 402	Teoremas..... 403

ESTUDO ESPECIAL DOS TRIEDROS

PÁG.	PÁG.
Preliminares..... 406	Triedros suplementares..... 409
Igualdade de triedros..... 406	Teoremas..... 410
Triedros simétricos..... 408	Casos de igualdade de triedros 411
Triedros isósceles..... 409	

CAPÍTULO VII: Os poliedros

NOÇÕES GERAIS SÔBRE POLIEDROS

PÁG.	PÁG.
Preliminares..... 417	Classificação dos poliedros.. 418

PRISMA

PÁG.	PÁG.
Superfície prismática..... 419	Cubo..... 424
Prisma..... 419	Teorema..... 424
Prisma reto e prisma oblíquo 420	Área total do paralelepípedo retângulo..... 425
Prisma regular..... 420	Área total do cubo..... 425
Área lateral e área total de um prisma..... 421	Teoremas..... 426
Área lateral de um prisma oblíquo..... 421	Diagonal do paralelepípedo retângulo..... 427
Área lateral de um prisma reto 422	Diagonal do cubo..... 428
Área total de um prisma... 422	Volume do paralelepípedo retângulo..... 430
Paralelepípedo..... 423	

PÁG.	PÁG.
Volume do cubo..... 430	Volume de um paralelepípedo qualquer..... 434
Volume do paralelepípedo reto..... 431	Segunda expressão do volume de um prisma oblíquo.... 434
Volume do prisma reto..... 431	Exercícios para resolver.... 438
Volume de um prisma oblíquo 433	

PIRÂMIDE

PÁG.	PÁG.
Preliminares..... 439	Área total de uma pirâmide regular..... 441
Pirâmide regular..... 439	Teoremas..... 441
Área lateral de uma pirâmide regular..... 440	Volume da pirâmide..... 446
	Exercícios para resolver.... 449

TRONCO DE PRISMA E TRONCO DE PIRÂMIDE

PÁG.	PÁG.
Tronco de prisma..... 451	Área total de um tronco de pirâmide regular..... 454
Teorema..... 451	Teoremas..... 454
Volume do tronco de prisma triangular..... 452	Volume do tronco de pirâmide..... 456
Tronco de pirâmide..... 452	Exercícios para resolver.... 456
Área lateral de um tronco de pirâmide regular..... 453	

TEOREMA DE EULER. NOÇÕES SÔBRE POLIEDROS REGULARES

PÁG.	PÁG.
Teorema de Euler..... 457	Poliedro regular de face quadrática..... 462
Poliedros regulares..... 460	Poliedro regular de face pentagonal..... 462
Poliedros regulares de faces triangulares..... 461	Exercícios para resolver.... 463

APÊNDICE

PÁG.
Números primos inferiores a 10 000..... 467
Quadrados e cubos dos números inteiros de 1 a 100..... 470
Raízes quadrada e cúbica dos números inteiros de 1 a 100..... 471
Formulário de Geometria no espaço..... 472
Bibliografia..... 475

Preço Cr \$ 30,00

São Paulo Editora Limitada *imprim.*