THALES MELLO CARVALHO

MATEMÁTICA

PARA OS CURSOS CLÁSSICO e CIENTÍFICO

1.ª SÉRIE

Companhia Editora Nacional
São Paulo - Rio de Janeiro - Baía - Recife - Porto Alegre

...s formações lineares das eqç͂es algebricas

Tomemos uma eq algebrica do grau n.

(1) $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$

...stuemos sobre ela a transformação linear

(2) $z = \frac{au+b}{cu+d}$,

...ndo-se que $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (3)

~~[illegible]~~ Se $\delta = 0$, o 2º membro seria independente de u ... q.

De facto se $ad = bc$ ... $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, isto é, $a = bk$ e ...

... Substituindo em (2), teremos $z = k$ = constante

MATEMÁTICA

PRIMEIRA SÉRIE

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

...ncomente se $\frac{au+b}{cu+d} = k$ = constante

...emos que $au+b = k(cu+d)$

$(a-kc)u + (b-kd) = 0$, logo

qualquer que seja o valor que se atribua a u,

$\left.\begin{matrix} a = kc \\ b = kd \end{matrix}\right\}$ donde $ad - bc = 0$.

...bstituindo (2) em (1) e multiplicando em seguida os 2 mbr por $(cu+d)^n$, obtemos uma outra eq algebrica

(4) $F(u) = (cu+d)^n f\left(\frac{au+b}{cu+d}\right) = 0$

... Esta eq. chama-se transformada ... grau é menor ou igual a n. Para que $F(u) = 0$ seja do grau $< n$ ... ar da (1) mediante (2) ... nec e suf que resulte

$a_0 a^n + a_1 a^{n-1} c + a_2 a^{n-2} c^2 + \dots + a_n c^n = 0$

...é, que a/c seja raiz da $f(z) = 0$.

... Posto isto, a toda raiz ξ da (1) corresponde uma raiz φ da transfor- ... da (4) dada por

$\varphi = \frac{-d\xi + b}{c\xi - a}$

... resolvendo (2) em relação a u e pondo $z = \xi$. Vice-versa ... a toda raiz φ da transformada (4) corresponde uma raiz ξ da primitiva (1)

...mos na

...q.

$z = u + h$

a satisfa-

as raizes

10,00

dado pela formula $\xi = \frac{a\varphi+b}{c\varphi+d}$

porque $-\frac{d}{c}$ não é raiz de (4).

Chamaremos transformações simples ou elementares as transformações dos tipos: $z=u+h$, $z=ku$, $z=\frac{1}{u}$

aos quais se dão respectivamente o nome de translação, homotetia e reciprocidade. É facil ver que qq outra transformação linear se pode obter aplicando sucessivamente transformações destes tipos ou como se usa dizer é um produto de transformações simples.

Com efeito, se $c\neq0$, pondo-se

$$z = u_1 + \frac{a}{c}$$

$$u_1 = \frac{bc-ad}{c^2}$$

$$u_2 = \frac{1}{u_3}$$

$$u_3 = u + \frac{d}{c}$$

resulta (2). - Se $c=0$ deve ser $d\neq0$ para que o det^{te} δ de (2) não seja nulo. Basta então por

$$z = u_1 + \frac{b}{d}$$

$$u_1 = \frac{a}{d}u$$

para ter (2) com $c=0$

Efetuando-se uma oportuna transformação pode acontecer que a equação transformada seja de forma mais simples que a primitiva. Por ex. provaremos que com uma oportuna translação se pode obter uma transformada privada do termo do grau $n-1$.

Com efeito, pondo em $f(z)$ $z=u+h$

tem-se desenvolvendo-a pela formula de Taylor

$$F(u)=f(u+h)=f(h)+uf'(h)+\frac{u^2}{2!}f''(h)+\cdots+\frac{u^n}{n!}f^n(h)$$

Para que o coeficiente de u^{n-1} na eq transformada $F(u)=0$ seja nulo, é nec. determinar h de modo a satisfazer a eq do 1º grau em h: $f^{(n-1)}(h)=0$, isto é, a equação

$$n!a_0h+(n-1)!a_1=0$$

Basta então tomar $h=-\frac{a_1}{na_0}$

para ter a eq $F(u)=0$ sem o termo do grau $n-1$.

Tomemos por ex: $f(z)=z^2+pz+q=0$

Esta com a transformação: $z=u+\frac{p}{2}$ transforma-se na equação

THALES MELLO CARVALHO

Do Ensino Secundário da Prefeitura do Distrito Federal e dos Colégios Andrews, La-Fayette e Santo Ignácio

$$u^2-\frac{p^2}{4}+q=0$$

a qual tem para raiz: $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

Segue-se que as raizes da proposta são: $z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

Como 2º exemplo, tomemos a equação do 3º grau.

MATEMÁTICA

$$f(z)=z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0.$$

Temos

De acôrdo com os programas dos Cursos

CLÁSSICO E CIENTÍFICO

$$f'(z)=3z^2+2a_1z+a_2$$

$$f''(z)=6z+2a_1$$

$$f'''(z)=6.$$

PRIMEIRA SÉRIE

Para que a transformada $F(u)=0$ mediante a translação $z=u+h$ não tenha o termo do 2º grau, devemos tomar h de modo a satisfazer a eq. $f''(h)=0$, isto é, a equação $6h+2a_1=0$ ∴

$$h=-\frac{a_1}{3}$$

Resulta, então,

$$f(h)=-\frac{1}{27}a_1^3+\frac{a_1^3}{9}-\frac{a_1a_2}{3}+a_3=\frac{2a_1^3}{27}-\frac{a_1a_2}{3}+a_3$$

$$f'(h)=\frac{1}{3}a_1^2-\frac{2}{3}a_1^2+a_2=a_2-\frac{1}{3}a_1^2$$

$$f''(h)=0$$

$$f'''(h)=6$$

Pondo-se então: $p=a_2-\frac{1}{3}a_1^2$; $q=\frac{2a_1^3}{27}-\frac{a_1a_2}{3}+a_3$

a equação

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

S. Paulo - Rio de Janeiro - Recife - Belo Horizonte - Pôrto Alegre

$$u^3+pu+q=0$$

1943

será a transformada de $f(z)=0$, mediante $z=u-\frac{a_1}{3}$ e as raizes destas serão iguais a desta última diminuída de $\frac{a_1}{3}$.

Equações recíprocas.

Seja a eq. (5) $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$, nós supomos $a_n \neq 0$, isto é, que a eq. não tenha raiz nula.

A sua transformada mediante a reciprocidade

$$z = \frac{1}{u}$$

é

(6) $F = u^n f\left(\frac{1}{u}\right) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 = 0$

que se chama a equação de raízes recíprocas da dada porque as raízes de uma são recíprocas das da outra.

Então, para deduzir da eq. dada a de raízes recíprocas basta inverter nesta a ordem dos coeficientes.

DO MESMO AUTOR

1. *Elementos de Matemática Comercial e Financeira*, (Cia. Editora Nacional).
2. *Lições de Matemática*, 1.º e 2.º fascículos (edições do autor), esgotadas.
3. *Lições de Trigonometria Retilínea*, (edição do autor).
4. *Curiosidades Matemáticas* (Distribuidores: Civilização Brasileira S. A).

Em preparação:

5. *Matemática*, para o 2.º ano dos Cursos Clássico e Científico (Cia. Editora Nacional).
6. *Matemática*, para o 3.º ano dos Cursos Clássico e Científico (Cia Editora Nacional).

Queremos determinar as condições que devem satisfazer os coeficientes de (5) para que esta e (6) tenham as mesmas raízes, isto é, para que sendo α uma qq raiz de (5), o seja ainda $\frac{1}{\alpha}$ com a mesma ordem de multiplicidade.

Uma eq. deste tipo chama-se recíproca. Se a eq. (5) é recíproca, as equações

$$f(z) = 0 \quad e \quad z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

terão as mesmas raízes. O mesmo se pode dizer da equação

(7) $a_n f(z) - a_0 z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$

a qual sendo de grau menor que n, é então uma identidade. O termo independente de z em (7) é $a_n^2 - a_0^2$. Devendo ser nulo segue-se que

Exemplar N.º 4803

$$a_n = \varepsilon a_0 \quad \text{com } \varepsilon = \pm 1$$

Segue-se que deve ser identicamente

(8) $f(z) - \varepsilon z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$,

donde:

(9) $a_0 = \varepsilon a_n$, $a_1 = \varepsilon a_{n-1}$, $a_2 = \varepsilon a_{n-2}$, $\dots$ $a_n = \varepsilon a_0$

isto é, numa eq. recíproca os coef. extremos são iguais, ou iguais e opostos e 2 coef. qq equidistantes dos extremos são iguais no 1º caso iguais e opostos no 2º.

Inversamente, se subsistem as (9), (7) é uma identidade e logo a (5) é uma eq. recíproca. Se se supõe agora que a equação (5) suposta recíproca não admita como raízes 1 e −1, façam em (8) sucessivamente $z = 1$ e $z = -1$. Conclue-se

$$f(1)(1 - \varepsilon) = 0$$

$$f(-1)\{1 - \varepsilon(-1)^n\} = 0$$

Mas $f(1)$ e $f(-1)$ não são nulos, logo deve ser $1 = \varepsilon$; $1 = (-1)^n$, isto é, n é um número par e sendo $\varepsilon = 1$, os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais. A equação dada é pois do tipo seguinte:

À minha filhinha

DORIS

com todo o carinho paternal.

(10) $f(z) = a_0 z^{2m} + a_1 z^{2m-1} + \dots + a_{m-1} z^{m+1} + a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

Se ao contrário, 1 é raiz múltipla de ordem μ e −1 é raiz múltipla de ordem ν, tem-se

$$f(z) = (z-1)^{\mu}(z+1)^{\nu}\varphi(z),$$

será então, $\varphi(z) = 0$ uma nova eq. recíproca (de grau $n - \mu - \nu$) a qual não admite para raízes 1 e −1. Logo esta é de grau par e têm iguais os coeficientes equidistantes dos extremos. Terá assim a forma (10). Podemos logo concluir: A resolução de uma eq. recíproca pode ser conduzida à resolução de uma equação tb recíproca de grau par $2m$ e da forma

(11) $a_0 z^{2m} + a_1 z^{2m-1} + \dots + a_{m-1} z^{m+1} + a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

Demonstremos agora, o seguinte teorema importante:

A resolução da equação (11) pode se reduzir a resolução de uma equação de grau m e a resolução de m equações de 2º grau.

Dividamos a eq. (11) por z^m, temos

$$a_0\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) + a_1\left(z^{m-1} + \frac{1}{z^{m-1}}\right) + \dots + a_{m-1}\left(z + \frac{1}{z}\right) + a_m = 0$$

Pondo

$$V_i = z^i + \frac{1}{z^i}$$

tem

(12) $a_0 V_m + a_1 V_{m-1} + \dots + a_{m-1} V_1 + a_m = 0$

Ponhamos agora $u = V_1 = z + \frac{1}{z}$.

donde

$$z^2 - uz + 1 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}} \ (13)$$

Da identidade

$$\left(z^{i+1} + \frac{1}{z^{i+1}}\right) \equiv \left(z^{i} + \frac{1}{z^{i}}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^{i-1} + \frac{1}{z^{i-1}}\right)$$

fornece para V_i a relação recorrente

$$\boxed{V_{i+1} = V_i u - V_{i-1}}$$

que permite calcular sucessivamente $V_1, V_2, V_3, V_4, \ldots$

De fato, tem

(14) $V_1 = u \quad V_2 = u^2 - 2, \quad V_3 = u^3 - 3u, \quad V_4 = u^4 - 4u^2 + 2, \ldots$

Em geral, obtem-se para V_m uma função racional inteira de grau m em u com coeficientes inteiros. Substituindo-se então em (12) no lugar de V_i as suas expressões (14) em u, obtem-se uma eq. em u (eq. resolvente de grau m). Resolvida esta eq. e suas raízes $u_1, u_2, \ldots u_m$ mediante (13) encontramos imediatamente as $2m$ raízes, aos pares recíprocas, da eq. proposta. O teorema é assim demonstrado.

Ex: a eq. $z^5 - 1 = 0$ admite a raiz $z = 1$, logo é divisível por $z - 1$ e reduz-se à forma (11)

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Dividindo por z^2, vem

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

A eq. resolvente em u é então

$$u^2 + u - 1 = 0$$

cujas raízes são: $u_1 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ e $u_2 = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Substituindo em (13) tem-se para z os 4 valores

$$z = \frac{1}{4}\left\{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right\}$$

$$z = \frac{1}{4}\left\{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right\}$$

os quais juntamente com o valor $z = 1$ dão as 5 raízes da eq. proposta.

Obs.: A resolução de uma eq. recíproca pode reduzir-se à de uma eq. binômia

$$x^n - a = 0$$

Basta com efeito pôr $x = z\sqrt[n]{a}$, onde $\sqrt[n]{a}$ é uma qq das raízes enésimas de a, para ter da precedente a equação recíproca

$$z^n - 1 = 0$$

PREFÁCIO

O compêndio que ora apresentamos foi elaborado rigorosamente de acôrdo com os programas oficiais do 2.° ciclo, expedidos pela Portaria Ministerial n. 177 de 16 de Março de 1943.

Atendendo a que a diferença entre os programas dos cursos Clássico e Científico reside apenas no fato de alguns pontos dêste último não constarem daquele, resolvemos preparar um só volume para cada série de ambos, indicando aos estudantes do primeiro aquilo que não necessitarão ler. Tivemos o cuidado de, assim procedendo, evitar que a omissão de tais pontos possa constituir lacunas prejudiciais ao encadeamento dos assuntos seguintes.

Suprimimos as demonstrações de alguns teoremas, por nos parecerem acima do nivel de inteligência exigivel na primeira série do 2.° ciclo. Em alguns casos substituimos demonstrações rigorosas, porém inaccessíveis aos alunos, por raciocínios práticos e intuitivos. Assim o fizemos afim de que o nosso modesto compêndio não seja apenas *adquirido* mas, também, *lido* pelo estudante.

De nossos prezados colegas receberemos com a maior satisfação quaisquer referências críticas ao trabalho que ora submetemos à sua apreciação.

Rio de Janeiro, Julho de 1943.

O AUTOR

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CIENTÍFICO

Primeira Série

ARITMÉTICA TEÓRICA

Unidade I. As operações aritméticas fundamentais: 1. Teoria da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2. Sistemas de numeração.

Unidade II. A divisibilidade numérica: 1. Teoremas gerais sôbre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m. d. c. e do m. m. c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

Unidade III. Os números fracionários: 1. Teoria das operações aritméticas sôbre números fracionários. 2. Noções sôbre cálculo numérico aproximado. Êrros. Operações abreviadas.

ÁLGEBRA

Unidade IV. Os polinômios: 1. Operações algébricas sôbre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Identidade de polinômios; método dos coeficientes a determinar; identidades clássicas. 4. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Unidade V. O trinômio do 2.° grau: 1. Decomposição em fatores do 1.° grau; sinais do trinômio; inequações do 2.° grau. 2. Noção de variavel e de função; variação do trinômio do 2.° grau; representação gráfica. 3. Noções elementares sôbre continuidade e sôbre máximos e mínimos.

GEOMETRIA

Unidade VI. O plano e a reta no espaço: 1. Determinação de um plano. 2. Interseção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros.

Unidade VII. Os poliedros: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Teorema de Euler; noções sôbre os poliedros regulares.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO
CURSO CLÁSSICO

Primeira Série

ARITMÉTICA TEÓRICA

Unidade I. A divisibilidade numérica: 1. Teoremas gerais sôbre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m. m. c. e do m. d. c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

ÁLGEBRA

Unidade II. Os polinômios: 1. Operações algébricas sôbre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Unidade III. O trinômio do 2.° grau: 1. Decomposição em fatores do 1.° grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2.° grau. 2. Noção de variavel e de função; variação do trinômio do 2.° grau; representação gráfica.

GEOMETRIA

Unidade IV. O plano e a reta no espaço: 1. Determinação de um plano. 2. Interseção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e obliquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Noções sôbre ângulos poliédricos.

Unidade V. Os poliedros: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes dêsses sólidos.

CAPÍTULO I

Aritmética teórica

UNIDADE:

As operações aritméticas fundamentais

CURSO CIENTÍFICO

1. Teorias da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros.
2. Sistemas de numeração.

ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

1. Preliminares. — *Adição* é a operação que tem por fim, dados dois ou mais números (inteiros), determinar um número formado por todas as unidades dos números dados.

Os números que são adicionados denominam-se *parcelas* e o resultado da operação chama-se *soma* ou *total.*

O sinal da adição é + que se lê: *mais* e se coloca entre cada duas parcelas consecutivas. Assim

$$17 + 12 + 25$$

indica que os números 17, 12 e 25 devem ser adicionados.

Consideremos o caso da adição de dois números A e B.

I. Se nenhum dêles for nulo, a soma $A + B$ será evidentemente maior do que qualquer um dêles separadamente, pois além de conter as unidades dêle, conterá ainda as unidades (ou a unidade) do outro.

II. Se um dêles for nulo, então a soma conterá tantas unidades quantas são as do outro. Assim

$$A + B = A \quad \text{se} \quad B = 0$$

ou

$$A + B = B \quad \text{se} \quad A = 0$$

Se ambas as parcelas forem nulas a soma será também nula, isto é,

$$A + B = 0 \quad \text{se} \quad A = 0 \quad \text{e} \quad B = 0\,(*)$$

III. Se um dêles for a *unidade*, a soma conterá as unidades do outro mais uma unidade, isto é, será, na sucessão dos

*) Não se esqueça o leitor de que A e B ou são *números naturais* (1, 2, 3, ...) ou *zero.*

números inteiros, o número seguinte àquele. Esta operação é fundamental na prática da adição, como veremos mais adiante.

A observação I pode estender-se ao caso geral da adição de várias parcelas. Se, pelo menos duas parcelas não forem nulas, a soma será maior do que qualquer parcela.

Se todas as parcelas forem iguais, a adição poderá ser substituida por uma outra operação — *a multiplicação*, como veremos no estudo desta.

2. Prática da operação. — Seja adicionar os números 7 e 5. Em virtude da definição dada, devemos reunir a um dêles sucessivamente as unidades do outro. Assim, por exemplo, reunindo ao número 7 as unidades de 5, teremos sucessivamente

$$7 + 1 = 8, \quad 8 + 1 = 9, \quad 9 + 1 = 10, \quad 10 + 1 = 11, \quad 11 + 1 = 12$$

Êste processo elementar, como facilmente se vê, embora seja aceitavel quando as parcelas contém números pequenos de unidades, torna-se impraticavel pela sua lentidão, quando as mesmas são números elevados. Há, pois, necessidade de uma simplificação do processo, isto é, do estabelecimento de uma regra prática para a adição de números inteiros. E' o que veremos a seguir.

I. Admitamos inicialmente que se trate da *adição de dois números de um só algarismo*. Nêste caso a experiência demonstrou a conveniência da memorização dos resultados de todas as combinações possíveis, o que se deve fazer no início do estudo da aritmética primária. Êstes resultados podem ser reunidos no quadro ao lado, denominado *tábua de somar*, e que se forma do seguinte modo: escreve-se, na primeira linha, 0 seguido dos nove primeiros números naturais; na segunda linha os 10 primeiros números naturais, na terceira dez números naturais consecutivos a partir de 2, e assim por diante, até a décima linha onde se escrevem dez números naturais consecutivos a partir de 9.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Concluimos, então, pela própria definição de adição, que à direita do primeiro número de cada linha estão sucessivamente suas somas com os nove números inteiros 1, 2, . . . 9. Observando que êstes números estão no alto de cada coluna a partir da segunda, podemos dizer que a soma de dois números dados (de um só algarismo) se encontra no cruzamento da linha começada por um dêles com a coluna encabeçada pelo outro. Assim a soma $8 + 5$ se acha no encontro da linha começada por 8 com a coluna encabeçada por 5.

II. Consideremos agora o caso da *adição de um número de mais de um algarismo e outro de um só algarismo*.

Seja, por exemplo calcular a soma $275 + 8$. Sendo 275 a soma dos valores relativos de seus algarismos, isto é, a soma de 2 centenas (ou 200 unidades), 7 dezenas (ou 70 unidades) e 5 unidades, a soma $275 + 8$ equivale à soma

$$200 + 70 + 5 + 8$$

Sendo a soma de 5 unidades e 8 unidades igual a 13 unidades, ou seja 1 dezena e 3 unidades (caso anterior), a soma considerada passará a ser

$$200 + 70 + 10 + 3$$

ou, reunindo as dezenas,

$$200 + 80 + 3$$

ou sejam 283.

Na prática realiza-se, pois, a operação adicionando-se a parcela de um algarismo ao algarismo (*) das unidades da outra, e sendo a soma superior a 9, escreve-se o seu algarismo das unidades e adiciona-se 1 ao algarismo das dezenas da primeira parcela.

III. O caso da *adição de vários números de um só algarismo* é agora uma aplicação dos anteriores. Com efeito sabemos que a adição de vários números se realiza adicionando-se os dois primeiros, a seguir o resultado ao terceiro, e assim por diante. Enquanto essas adições parciais tiverem como resultado números de um só algarismo, seguiremos a regra I. A partir do momento em que um resultado for um número de mais de um algarismo, as adições seguintes serão feitas de acôrdo com a regra II.

IV. Tratemos, agora, do caso da *adição de números de mais de um algarismo*. Seja calcular a soma

$$876 + 497 + 265$$

Obtém-se esta, adicionando-se separadamente as unidades de mesma ordem dos números dados, isto é, realizando-se as operações parciais

6 unidades + 7 unidades + 5 unidades = 18 unidades
7 dezenas + 9 dezenas + 6 dezenas = 22 dezenas
8 centenas + 4 centenas + 2 centenas = 14 centenas

e reunindo-se os resultados parciais 18 unidades (ou 1 dezena e 8 unidades), 22 dezenas (ou 2 centenas e 2 dezenas) e 14 centenas (ou 1 milhar e 4 centenas). Obtém-se 1 milhar, 6 centenas, 3 dezenas e 8 unidades, ou seja o número 1 538. Na prática, em virtude do princípio de posição de nosso sistema de numeração (**) estas operações se realizam com extraordinária facilidade, de acôrdo com a seguinte regra:

(*) E' frequente utilizar-se a denominação algarismo mesmo tratando-se de *valor absoluto de algarismo*.

(**) Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades dez vezes maiores do que as representadas por êste outro.

Regra. — *Para somar números de vários algarismos escrevem-se uns abaixo dos outros de modo que suas unidades de mesma ordem fiquem nas mesmas colunas; efetua-se separadamente a adição dos números contidos em cada coluna começando pela direita, e tendo-se o cuidado de, cada vez que uma destas somas ultrapassar 9, escrever apenas o seu algarismo das unidades debaixo da coluna e adicionar o seu algarismo das dezenas à soma dos números da coluna seguinte. O número formado pelos algarismos assim obtidos é a soma procurada.*

3. Possibilidade da adição. — Como a sucessão dos números naturais é *ilimitada*, a operação de adição é sempre *possivel* na classe dos números naturais isto é, dados dois ou mais números naturais existirá um número natural que contenha todas as unidades dos números dados.

4. Propriedades da adição.

I. *A adição é uma operação unívoca.*

Esta propriedade indica que a adição é uma operação que tem um só resultado. Ela decorre imediatamente da própria definição de adição, pois não é possivel, reunindo as unidades de vários números dados encontrar dois resultados diferentes.

II. *A adição é uma operação comutativa.*

Esta propriedade pode também ser assim enunciada: *A ordem das parcelas não altera a soma.* Como no caso anterior, ela resulta da própria definição, pois qualquer que seja a posição das parcelas, suas unidades (que vão formar as unidades do total) serão sempre as mesmas.

III. *A adição é uma operação associativa.*

Assim se exprime que o resultado de uma adição não se altera quando se substituem duas ou mais parcelas pela sua soma.

Esta propriedade é uma consequência da definição de adição e da propriedade comutativa. Com efeito, considerando-se um certo número de parcelas de uma soma, pode-se, em virtude da propriedade comutativa, escreve-las em primeiro lugar; de acôrdo com a definição de adição a soma total será o resultado da adição da soma destas primeiras parcelas e das demais.

IV. *A adição é uma operação dissociativa.*

Esta propriedade indica que se pode substituir, sem alterar o resultado, uma parcela pela soma equivalente de duas ou mais. Assim

$$6 + \widetilde{13} + 5 = 6 + \overbrace{4 + 7 + 2} + 5$$

Esta propriedade é uma consequência imediata da anterior.

V. *A adição é uma operação monotônica.*

Esta propriedade exprime que, sendo A, B e C três números inteiros e $A < B$, será

$$A + C < B + C$$

Realmente, se B contém outras unidades além das de A (por ser maior do que A), $B + C$ conterá também unidades além das de $A + C$, isto é, será maior do que $A + C$.

5. Aplicação ao cálculo mental. — As propriedades anteriores são de grande utilidade para o cálculo mental, conforme mostraremos nos exemplos a seguir.

I. Seja calcular a soma

$$S = 7 + 8 + 3 + 2 + 6 + 5 + 4$$

Em virtude da propriedade comutativa podemos mentalmente juntar as parcelas 7 e 3; 8 e 2, e 6 e 4, e, de acôrdo com a propriedade associativa, realizar suas adições parciais, de modo que a soma S se torna

$$S = 10 + 10 + 10 + 5$$

e facilmente se calcula.

Êste tipo de cálculo mental aplica-se com vantagem quando se efetua uma adição de muitas parcelas.

II. Seja calcular a soma

$$S = 58 + 37$$

Pode-se realiza-la mentalmente com simplicidade decompondo-se uma das parcelas, como 37, por exemplo, na

soma $30 + 7$ (propriedade dissociativa) e efetuando-se as seguintes operações faceis

$$58 + 30 = 88 \qquad 88 + 7 = 95$$

III. Seja calcular a soma

$$S = 68 + 97$$

Seu cálculo mental torna-se muito simples, substituindo-se a parcela 68 pela soma $65 + 3$ (propriedade dissociativa) e realizando-se as seguintes operações

$$97 + 3 = 100 \qquad 100 + 65 = 165$$

6. Provas da adição.

I. Efetuada uma adição, pode-se experimentar sua exatidão, tomando-se as parcelas em outra ordem e realizando-se novamente a operação. Êste processo visa evitar a repetição inconciente de um êrro cometido. Baseia-se no fato de ser muito pequena a probabilidade de se cometer o mesmo êrro nas duas operações.

Na prática aplica-se esta prova somando-se as parcelas em sentido inverso àquele em que foi efetuada a adição. Como esta é feita habitualmente *de cima para baixo*, realiza-se a prova somando-se as parcelas *de baixo para cima.*

II. Realiza-se, ainda, outra prova com o auxílio da subtração, conforme veremos mais adiante (**n.° 12**).

III. Outra prova habitualmente usada é a denominada *prova dos nove*. Dela trataremos mais adiante (**Cap. II, n.° 31**) quando estudarmos os princípios de divisibilidade em que se baseia.

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

7. Preliminares. — Subtração é a operação que tem por fim, dados dois números (inteiros), determinar de quantas unidades o maior excede o menor, ou, o que é o mesmo, determinar um número que, somado ao menor, reproduza o maior.

Nesta última forma a subtração pode ainda ser assim enunciada: operação que tem por fim, dada a soma de dois números e um dêles, achar o outro.

O número maior denomina-se *minuendo* ou *diminuendo* e o menor *subtraendo* ou *diminuidor*. O resultado chama-se *resto*, *excesso* ou *diferença*. O *minuendo* e o *subtraendo* denominam-se indiferentemente *termos* da subtração.

O sinal da subtração é — que se lê *menos* e se coloca entre o minuendo e o subtraendo. Assim $16 - 7$ indica que o número 7 deve ser diminuido de 16.

8. Noção de operação inversa. — Sejam A e B dois números e suponhamos que uma determinada operação sôbre êles conduza a um resultado R. Designando por o esta operação, podemos escrever simbolicamente

$$A \ o \ B = R$$

significando que a aplicação da operação o aos números A e B dá como resultado R.

Se existe uma operação o' que permita, conhecidos A e R determinar B, isto é, tal que

$$R \ o' \ A = B$$

e se existe uma operação o'' que permita calcular A, dados B e R, ou seja

$$R \ o'' \ B = A$$

diz-se, então, que o' e o'' são *operações inversas* de o.

Se a operação o é comutativa, isto é, se

$$A \ o \ B = B \ o \ A$$

as operações o' e o'' são idênticas.

Consideremos o caso da adição, isto é, admitamos que a soma de dois números A e B seja R, ou

$$A + B = R$$

Do que acabamos de expor resulta que, dados A e R (ou B e R) obtém-se B (ou A) por uma operação de subtração

$$B = R - A \qquad \text{(ou } A = R - B\text{)}$$

Assim podemos dizer que *a subtração é a operação inversa da adição*, o que corresponde à terceira definição dada de subtração.

9. Limitação da subtração. — Vimos anteriormente que a adição é sempre *possivel* na classe dos números naturais, isto é, que, dados dois ou mais números naturais, sua soma é um número natural. Tal não acontece, entretanto, com a subtração. Dados dois números naturais A e B, a diferença $A - B$ só será um número natural se $A > B$. Se $A \leqq B$, a subtração $A - B$ é *impossivel* na classe dos números naturais, isto é, o seu resultado não é um número natural. Veremos mais tarde que esta operação só se tornará possivel mediante uma extensão do conceito de número.

10. Prática da operação. — Na prática da operação distinguiremos os seguintes casos:

I. *O subtraendo é um número de um algarismo e o minuendo é tal que o resto seja também um número de um algarismo.*

Assim o minuendo será, no máximo, igual a 18. A experiência demonstrou a conveniência de se ter de cór os resultados de todos os casos possíveis. Êstes podem ser obtidos da tábua de somar (**n.° 2**), como mostraremos no exemplo seguinte. Seja calcular a diferença $13 - 5$. Procuramos na linha começada por 5 o número 13; o primeiro número da coluna em que êste se acha é a diferença pedida. A construção da tábua, dada no estudo da adição, e a definição de subtração justificam o procedimento acima.

9. TRONCO DE PIRÂMIDE REGULAR

Notações	*Fórmula*
p, p': semi-perímetro das bases	$S_l = (p+p')\alpha$ (Cap. VII, n.º 57)
a, a': apótemas das bases	$S_t = p(a+\alpha)+p'(a'+\alpha)$ (Cap. VII, n.º 58)
α : apótema	$V = \frac{h}{3}(pa+p'a'+\sqrt{pp'aa'})$ (Cap. VII, n.º 61)
h : altura	

10. TRONCO DE PIRÂMIDE

Notações	*Fórmula*
B, B': áreas das bases	$V = \frac{h}{3}(B+B'+\sqrt{BB'})$ (Cap. VII, n.º 61)
h : altura	

11. POLIEDROS CONVEXOS

Notações	*Fórmula*
A : número de arestas	$A + 2 = F + V$ (Cap. VII, n.º 63)
F : número de faces	
V : número de vértices	

BIBLIOGRAFIA

1. Almeida Lisboa, J. I. — *Lições de Álgebra Elementar*, 1.º volume, S. Paulo, Cia. Editora Nacional, 2.ª ed., 1942.
2. André, Ph. — *Précis de Géométrie*, Paris, Liv. André-Guédon, 1906, 5.ª ed.
3. Aubert et Papelier — *Exercices de Calcul Numérique*, Tomo I, Paris, Librairie Vuibert, 1920.
4. Ballore, R. de Montessus de — *Cours de Mathématiques*, Collection Charles de Comberousse, Tomo primeiro, 2.ª parte, Paris, Gauthier-Villars, 6.ª ed., 1921.
5. Benitez y Parodi, Manuel e Ignacio Salinas y Angulo — *Aritmética*. Madrid; Libreria de los sucessores de Hernandes, 2.ª ed., 1913.
6. Bourlet, Carlo — *Leçons d'Algèbre Élémentaire*, Paris, Librairie Armand Colin, 7.ª ed., 1911.
7. Cajori, Florian — *A History of Elementary Mathematics*, New York, Macmillan, 1897.
8. Combette, C. — *Cours d'Arithmétique*. Paris, Félix Alcan, 11.ª ed., 1902.
9. Conant, Levi Leonard — *The number concept, its origin and development*. New York, Macmillan, 1931.
10. Costa, M. Amoroso — *As ideias fundamentais da Matemática*. Rio de Janeiro, Pimenta de Mello, 1929.
11. Crantz, Paul — *Aritmética y Algebra*. Trad. do Prof. Fernando Lorente de Nó, Barcelona, Editorial Labor, 4.ª ed., 1940.
12. De Comberousse, Charles — *Cours de Mathématiques*. Tome Premier, Première Partie — Arithmétique. Paris, Gauthier-Villars, 5.ª ed., 1911.
13. De Comberousse, Charles — *Cours de Mathématiques*. Tome deuxième, Première Partie. — Géométrie Élémentaire, Plane et dans l'Espace. Paris, Gauthier-Villars, 1920, 5.ª ed.
14. De Comberousse, Charles — *Cours d'Algèbre Supérieure*. 1.ª parte. Paris, Gauthier-Villars, 3.ª ed., 1904.
15. Fettweis, E. — *Wie man einstens rechnete*. Leipzig, B. G. Teubner, 1923.
16. F. G. M. — *Exercices d'Arithmétique*. Tours, Maison A. Mame & Fils, 1911.
17. Fitz-Patrick, J. — *Exercices d'Arithmétique*. Paris, Librairie A. Hermann, 3.ª ed., 1914.
18. Girod, Félicien e Emile Weill — *Éléments de Géométrie*. Paris, Lib. André-Guédon.

19. GONÇALVES, J. VICENTE — *Compêndio de Aritmética* (3.º ciclo). Braga, Livraria Cruz, 1939.
20. GONSETH, F. — *Les Fondements des Mathématiques*. Paris, Librairie Le François, 1926.
21. HADAMARD, JACQUES — *Leçons de Géométrie Élémentaire, II, Géométrie l'espace*. Paris, Armand Colin.
22. IÑIGUEZ ALMECH, JOSÉ MARIA — *Matemáticas para Químicos*. Barcelona, Editorial Labor, 2.ª ed., 1936.
23. KLEIN, FELIX — *Elementary Mathematics from an advanced stand point*. New York, Macmillan, 1932.
24. LACROIX, S. F. — *Éléments d'Algèbre*. Paris, Gauthier-Villars, 25.ª ed., 1888.
25. LÖFFLER, EUGEN — *Ziffern und Ziffernsysteme*. I. Teil. *Die Zahlzeichen der Alten Kulturvölker*. Leipzig, B. G. Teubner, 3.ª ed., 1928.
26. NIEWENGLOWSKI, B. — *Cours d'Algèbre*. Tomo primeiro. Paris, Librairie Armand Colin, 9.ª ed., 1920.
27. REY PASTOR, J. *Aritmetica Racional*. Primeira Parte. Buenos Aires, Libreria "El Ateneo", 3.ª ed. Segunda parte. Montevideo, Libreria A. Barreiro Ramos S. A., 2.ª ed., 1932.
28. REY PASTOR, J. — *Algebra*, 2 volumes. Buenos Aires, Libreria "El Ateneo".
29. REY PASTOR, J. — *Curso Cíclico de Matemáticas*. Tomo I, Madrid, 2.ª ed., 1930.
30. REY PASTOR, J. — *Elementos de Análisis Algebraico*, Madrid, 5.ª ed., 1939.
31. ROSSOTTI, M. A.*Formulario Scolastico di Matematica Elementare*. Milão, Ulrico Hoepli, 5.ª ed., 1935.
32. ROUCHÉ, EUGÈNE e CHARLES DE COMBEROUSSE — *Traité de Géométrie*, Seconde Partie, Géométrie dans l'espace. Paris, Gauthier-Villars, 1879, 4.ª ed.
33. SEVERI, FRANCESCO — *Elementos de Geometria*. Tomo Segundo. Trad. de T. Martin Escobar, Madrid, Editorial Labor, 1931.
34. TANNERY, JULES — *Leçons d'Arithmétique*. Paris, Librairie Armand Colin, 10.ª ed., 1928.
35. THIRÉ, CECIL — *Questões de Aritmética*. Rio de Janeiro, Pimenta de Mello.
36. THIRÉ, CECIL e J. C. MELLO E SOUZA — *Problemas e Formulário de Geometria*, Rio de Janeiro, Pimenta de Mello, 6.ª ed.
37. VACQUANT, CH. e A. MACÉ DE LÉPINAY — *Éléments de Géométrie*. Paris, Masson et Cie., 1907, 15.ª ed.
38. WAISMANN, FRIEDRICH — *Introduzione al pensiero matematico*. Trad. de Ludovico Geymonat, Turim, Einaudi, 1939.
39. XAVIER, AGLIBERTO — *Théorie des Approximations Numériques et du Calcul Abrégé*. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

ÍNDICE

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

RADICIAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

EXERCÍCIOS SÔBRE AS OPERAÇÕES SÔBRE NÚMEROS INTEIROS

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Capítulo II : A divisibilidade numérica

TEOREMAS GERAIS SÔBRE DIVISIBILIDADE

CARACTERES DE DIVISIBILIDADE

TEOREMAS SÔBRE RESTOS E SUAS APLICAÇÕES ÀS PROVAS DAS OPERAÇÕES

TEORIA DO MÁXIMO DIVISOR COMUM

TEORIA DO MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS

APLICAÇÕES DA TEORIA DOS NÚMEROS PRIMOS

EXERCÍCIOS SÔBRE M.D.C. E M.M.C.

EXERCÍCIOS SÔBRE NÚMEROS PRIMOS

CAPÍTULO III: Os números fracionários

INTRODUÇÃO

ADIÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

DIVISÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

POTENCIAÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

RADICIAÇÃO DE FRAÇÕES E DE NÚMEROS DECIMAIS

EXERCÍCIOS SÔBRE AS OPERAÇÕES SÔBRE FRAÇÕES

NÚMEROS APROXIMADOS

Capítulo IV: Os polinômios

NOÇÕES SÔBRE POLINÔMIOS

OPERAÇÕES SÔBRE POLINÔMIOS

IDENTIDADE DE POLINÔMIOS

DIVISÃO POR $x \pm a$

CAPÍTULO V : **O trinômio do 2.º grau**

DECOMPOSIÇÃO E SINAL DO TRINÔMIO DO 2.º GRAU
INEQUAÇÕES DO 2.º GRAU

VARIAÇÃO DO TRINÔMIO DO 2.º GRAU

NOÇÕES ELEMENTARES SÔBRE CONTINUIDADE E SÔBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS

CAPÍTULO VI : **O plano e a reta no espaço**

DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

INTERSEÇÃO DE PLANOS E RETAS

PARALELISMO DE RETAS E PLANOS

RETA E PLANO PERPENDICULARES. PERPENDICULARES E OBLÍQUAS DE UM PONTO A UM PLANO

DIEDROS. PLANOS PERPENDICULARES ENTRE SI

ÂNGULOS POLIÉDRICOS

ESTUDO ESPECIAL DOS TRIEDROS

Capítulo VII: **Os poliedros**

NOÇÕES GERAIS SÔBRE POLIEDROS

PRISMA

PIRÂMIDE

TRONCO DE PRISMA E TRONCO DE PIRÂMIDE

TEOREMA DE EULER. NOÇÕES SÔBRE POLIEDROS REGULARES

APÊNDICE

Preço Cr $ 30,00

São Paulo Editora Limitada *imprim.*