



CÁLCULO VECTORIAL

Curso da Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo

por

J. O. MONTEIRO DE CAMARGO

prof. catedrático de Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Vectorial

1946

EDITORA RENASCENÇA S. A.

SÃO PAULO

PREFÁCIO

Estas **notas de aula** — despidas de exercícios e de aplicações — que ora se publicam, são a síntese, do curso de CÁLCULO VECTORIAL, que vímos, ha anos, professando na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

O ensino desta disciplina é aqui feito conjuntamente com o CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Visa, não só a formação de pensamento exáto, como também pretende dar uma informação básica, mínima, indispensável às ciências fundamentais da Engenharia. Dai sua orientação.

Esta publicação enquadra-se no plano geral que o Departamento de Matemática da Escola Politécnica de São Paulo está desenvolvendo.

Aos alunos Zake Tacla, assistente e E. G. Antonio Diez nossos agradecimentos pelo estímulo de sua cooperação na organização dos originais e figuras deste livro.

São Paulo, 8 de janeiro de 1946

Monteiro Camargo

PREFÁCIO

Faço estas notas de sala — depois de algumas aulas de álgebra — que ora se publicam, não a título de prefácio de CÁLCULO VECTORIAL, que sempre ha-

O ensino desta disciplina é sempre feito conjuntamente com o CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Mas, não só a formação do pensamento exato, como também pretende dar uma introdução física, sempre indispensável às ciências tecnológicas da Engenharia. Por sua orientação.

Esta publicação encontra-se no plano geral que o Departamento de Matemática da Faculdade Politécnica de São Paulo está desenvolvendo.

As notas são de autoria de E. O. Araújo. Têm como objectivo principal a introdução de um curso de álgebra para os alunos de Engenharia de São Paulo, e também de outras figuras de destaque.

São Paulo, 8 de Janeiro de 1946

Monteiro Corrêa

ÍNDICE GERAL

	PÁG.
PREFÁCIO	VII
ÍNDICE GERAL	IX

ALGEBRA VECTORIAL

CAP. I — VECTOR.	
1. Vector	1
2. Igualdade de vectores.	2
3. Produto de vector por um número real.	2
4. Adição de vectores. Subtração.	3
5. Expressões lineares. Expressões cartesianas.	5
CAP. II — MULTIPLICAÇÃO DE VECTORES.	
A. Produto escalar e vectorial.	
6. Definições.	9
7. Terno fundamental.	10
8. Comutatividade.	10
9. Associatividade.	11
10. Significado geométrico.	12
11. Distributividade em relação à soma.	12
B. Produto misto e duplo produto vectorial.	
12. Produto misto.	13
13. Significado geométrico.	13
14. Propriedades.	13
15. Duplo produto vectorial.	14
16. Expressões cartesianas.	17
17. Axialidade.	17

CAP. III — EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES VECTORIAIS ALGÉBRICAS.

	PÁG.
18. Decomposição de um vector em dois.	21
19. Ternos recíprocos de vectores.	22
20. Equações $\vec{x} \times \vec{v}_1 = \vec{c}_1$. Interpretação geométrica.	24
21. Equações $\vec{x} \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Interpretação geométrica.	25
22. Sistemas de equações.	27
23. Aplicações geométricas.	29

CAP. IV — VECTORES LIGADOS A PONTOS.

24. Definições. Invariantes.	31
25. Independência do pólo.	32
26. Equivalência de sistemas.	33
27. Redução de sistemas. Classificação.	34

CAP. V — TRANSFORMAÇÕES LINEARES DE VECTORES COMPLANARES.

28. Definições. Operador i	37
29. Operador $e^{i\varphi}$	38
30. Componentes simétricas. Definições.	39
31. Soma de operadores de uma seqüência.	40
32. Produto de seqüências.	40
33. Teoremas fundamentais.	41
34. Construção gráfica.	43
35. Sistemas de operadores coaxiais.	43
36. Soma de seqüências.	44

ANÁLISE VECTORIAL

CAP. VI — VECTOR FUNÇÃO DE UM NÚMERO REAL.

37. Definição.	47
38. Limite. Continuidade.	48
39. Propriedades operatórias.	49
40. Continuidade.	51

CAP. VII — DERIVADAS E DIFERENCIAIS.

	PÁG.
41. Definições. Derivada. Diferencial.	53
42. Função composta. Derivada.	54
43. Derivadas e diferenciais sucessivas.	55
44. Propriedades operatórias.	55
45. Propriedades gerais.	58
46. Hodógrafo.	60
47. Derivada de ponto.	60
48. Representação paramétrica.	61
49. Fórmula de Taylor.	61

CAP. VII — ESTUDO VECTORIAL DAS LINHAS.
(Aplicação geométrica)

50. Definições. Tangente.	63
51. Triedro de Frenet.	64
52. Fórmulas de Frenet-Serret. Vector de Darboux.	65
53. Curvas planas.	67
54. Flexão: 1.ª curvatura.	67
55. Torção: 2.ª curvatura.	68
56. Curvatura total.	69
57. Expressões das curvaturas.	69
58. Andamento de uma curva nas vizinhanças de um ponto. ...	71
59. Círculo osculador.	74
60. Esfera osculatriz.	75

CAP. IX — VECTOR FUNÇÃO DE MAIS DE UM NÚMERO REAL.

61. Definição.	77
62. Limite. Continuidade.	77
63. Derivadas e diferenciais.	78
64. Invertibilidade da ordem de derivação.	79
65. Diferenciais de ordem superior à primeira.	80
66. Funções compostas.	80
67. Fórmula de Taylor. Expressão mais geral.	80
68. Fórmula de Mac-Laurin.	82

CAP. X — ESTUDO VECTORIAL DAS SUPERFÍCIES.
(Aplicação geométrica)

69. Superfície. Definição. Exemplos.	83
70. Normal.	85
71. Plano tangente.	86

	PÁG.
72. Arco de uma linha.	87
73. Complanção.	88
74. Distância de um ponto vizinho de P ao plano tangente. ...	89
75. Estudo de uma superfície nas vizinhanças de um ponto P.	91
76. Estudo geral das linhas sobre uma superfície.	91
77. Secções planas normais.	94
78. Curvaturas total e média.	95
79. Direções principais. Teorema de Euler.	96
80. Linhas assintóticas.	99
81. Linhas geodésicas.	99
82. Linhas de curvatura.	99
CAP. XI — TRANSFORMAÇÕES VECTORIAIS LINEARES.	
83. Definição. Exemplo. Expressão cartesiana. Homografia função de um parâmetro.	101
84. Soma de operadores.	103
85. Produto de operadores. Exemplo.	103
86. Direções unidas. Invariantes.	104
87. Operador vectorial linear conjugado. Expressão cartesiana.	106
88. Operador vectorial linear simétrico.	108
89. Operador vectorial linear pseudo-simétrico ou axial.	109
90. Teorema fundamental.	109
91. Vector da homografia.	110
92. Unicidade da decomposição. Dilatação e vector da homografia.	110
93. Classificação.	112
94. Indicatriz.	112
95. Diades.	114
96. Fórmulas diádicas de uma homografia.	115
CAP. XII — CAMPOS ESCALARES. GRADIENTE.	
97. Definições. Limite. Continuidade.	117
98. Derivada de uma função escalar de ponto segundo vector.	117
99. Propriedades. Linearidade.	118
100. Derivada da soma e do produto.	119
101. Derivada de funções compostas.	119
102. Representação cartesiana.	120
103. Gradiente.	120
104. Expressão da diferencial.	122
105. Propriedades operatórias do gradiente.	123
106. Expressão cartesiana.	123
107. Circuição.	123

	PÁG.
CAP. XIII — CAMPOS VECTORIAIS.	
108. Definição. Limite. Continuidade.	125
109. Derivada de função vectorial de ponto segundo um vector.	125
110. Propriedades lineares.	126
111. Diferencial du	127
112. Derivada do produto $f(P) \vec{u}(P)$	127
113. Propriedades operatórias.	128
114. Expressões cartesianas.	129
CAP. XIV — ROTACIONAL.	
115. Definição.	131
116. Propriedade distributiva em relação à soma.	131
117. Outra definição. Propriedades.	132
118. Rotacional do produto $f(P) \vec{u}(P)$	132
119. Rotacional de função vectorial composta.	133
120. Expressões cartesianas.	134
121. Significado cinemático.	135
CAP. XV — DIVERGENTE.	
122. Definição.	137
123. Propriedade. Divergente do produto $f(P) \vec{v}(P)$	137
124. Divergente do produto vectorial de duas funções.	138
126. Expressões cartesianas.	139
127. Significado físico.	140
CAP. XVI — CAMPOS ESCALARES E VECTORIAIS. DEFINIÇÃO.	
128. Campo potencial-escalar. Campo irrotacional. Campo solenoidal. Campo potencial-vectorial.	141
129. Superfície e tubo de corrente.	142
130. Fluxo de um vector.	142
CAP. XVII — PRODUTOS DOS OPERADORES GRAD, DIV E ROT.	
131. Definições. Laplaciano.	145
132. Operador Δ_2	145
133. Campo potencial. Propriedade.	146
134. Campo rotacional. Propriedade.	147
135. Campo solenoidal. Propriedade.	147

CAP.	XVIII — INTEGRAIS DE VECTORES.	PÁG.
136.	Definições. Integral definida. Existência.	149
137.	Integral definida como função.	150
138.	Integrais múltiplas.	151
139.	Aplicação. Centros de massa.	152
CAP.	XIX — TEOREMA DE GAUSS. TEOREMA DE STOKES. CONSEQUÊNCIAS.	
140.	Teorema de divergente ou de Gauss.	153
141.	Campo solenoidal. Propriedade.	154
142.	Tubo de corrente. Propriedade.	154
143.	Teorema do gradiente.	155
144.	Teorema do rotacional.	155
145.	Integral do Laplaciano.	156
146.	Fórmulas de Green.	156
147.	Teorema de Stokes.	157
148.	Fluxo do rotacional.	159
149.	Campo lamelar.	159
150.	Campo cíclico.	159
	INDICE ANALÍTICO.	161

ALGEBRA VECTORIAL

CAPÍTULO I

VECTOR

1. Vector. Sabemos da Geometria elementar ser um segmento o conjunto dos pontos de uma reta compreendidos entre dois outros.

Um segmento AB é susceptível de orientação: segmento orientado no sentido AB ou orientado no sentido BA, um oposto ao outro.

O comprimento do segmento, sua medida em relação a outro tomado por unidade, é um número real positivo.

Vector é o conjunto de uma direção, um sentido e um número real positivo, seu módulo. Indica-se por uma letra em corpo cheio ou encimada por uma flexa: \mathbf{v} ou \vec{v} , p. ex., que se lê "vector v ".

Os segmentos de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido (segmentos equípolentes) possuem o mesmo vector. Diferem uns dos outros por serem conjuntos distintos de pontos.

Os segmentos são conjuntos de pontos, enquanto que o vector não possui ponto algum.

Diz-se *soma de vector \vec{v} a um ponto A* a operação da qual resulta um ponto B, extremidade do segmento AB, de mesma direção, mesmo sentido que o vector e comprimento dado pelo seu módulo, escolhido e fixado um segmento unitário; indica-se por

$$A + \vec{v} = B \quad (1)$$

O vector \vec{v} conduz, por assim dizer, o ponto A ao ponto B (ver, conduzir).

Grassmann empregou a notação $(B - A)$, "B menos A", para indicar o mesmo vector \vec{v} :

$$\vec{v} = B - A \quad (2)$$

As relações (1) e (2) são equivalentes. $(B - A)$ é dito uma diferença de pontos.

Existe uma infinidade de pares de pontos para o mesmo vector. E' comoda a representação do vector \vec{v} por um dos segmentos cujas extremidades A e B, p. ex., satisfazem a (1). Confundí-los é erro conceitual.

A distância de um a outro ponto do mesmo par dá o módulo do vector

$$\text{mod } \vec{v} \text{ ou } |\vec{v}|$$

ou ainda, lembrando a relação (2)

$$\text{mod } (B - A) \text{ ou } |B - A|.$$

Vector nulo, por extensão, tem módulo igual a zero, sentido e direcção arbitrários; satisfaz à relação

$$A + \vec{v} = A$$

para A qualquer. Indica-se por 0 (zero).

Podemos definir:

Vector é um número real absoluto associado a uma direcção e a um sentido.

2. Igualdade de vectores. Dois vectores \vec{a} e \vec{b} são iguais quando possuem mesmo módulo, mesma direcção e mesmo sentido: indica-se

$$\vec{a} = \vec{b}.$$

Os vectores nulos são iguais.

3. Produto de vector por um número real. Seja m número real e \vec{v} vector, $m\vec{v}$ será um vector com a direcção de \vec{v} , mesmo sentido se $m > 0$, contrário se $m < 0$ e $\text{mod } m\vec{v} = |m| \text{mod } \vec{v}$, sendo $|m|$ o valor absoluto de m.

São notações equivalentes $m\vec{v}$, $m \cdot \vec{v}$, $(m)\vec{v}$; só a conveniência decide de seu emprêgo.

Se $m = 0$, $m\vec{v}$ será vector nulo, e reciprocamente, se $\vec{v} \neq 0$.

Se $m = -1$, o produto $m\vec{v}$ indica-se por $-\vec{v}$: será o vector oposto a \vec{v} . $(A - B)$ e $(B - A)$ são opostos.

Se $n \neq 0$, $\frac{1}{n} = m$, escreve-se

$$m\vec{v} = \frac{\vec{v}}{n}$$

que é o quociente de \vec{v} por n.

Fácilmente se verifica ser

$$m(n\vec{v}) = mn\vec{v} = n(m\vec{v}).$$

Como notação de produto entre números reais, escalares, usaremos também um ponto: mn ou m.n.

Vectores paralelos são os que têm a mesma direcção; vectores coplanares os que são paralelos a um mesmo plano.

O vector nulo pode ser considerado como paralelo a outro não nulo.

Vector unitário é o que tem módulo um. Os vectores $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e seu oposto $\frac{-\vec{v}}{|\vec{v}|}$ são unitários e paralelos a \vec{v} .

Versor de um vector \vec{v} , vers \vec{v} , é o vector unitário paralelo a \vec{v} e de mesmo sentido que \vec{v} .

4. Adição de vectores. Dados dois vectores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , tomemos um ponto 0 qualquer, $0 + \vec{v}_1 = A$, $A + \vec{v}_2 = B$: o vector de $(B - 0)$ diz-se soma de \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Indica-se por $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. E' independente do ponto 0 e do segmento unitário escolhido.

Atendendo-se que a soma $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ é ainda o mesmo vector de $(B - 0)$, pois os pontos 0, $0 + \vec{v}_2 = A'$, $A' + \vec{v}_1$ e A são os vértices de um paralelogramo,, verifica-se que a adição de dois vectores goza da propriedade comutativa

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

A soma, expressa pela diferença de pontos, toma o aspecto de uma identidade algébrica em relação aos pontos, assim

$$(B - 0) + (0 - A) = B - A.$$

Verificam-se as propriedades distributivas:

$$m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \text{ em relação aos vectores}$$

e $(m + n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$ em relação aos escalares.

A soma de n vectores \vec{v}_i ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n \quad \text{ou} \quad \sum_1^n \vec{v}_i$$

será ainda um vector como se verifica da construção dos pontos

$$P_i = P_{i-1} + \vec{v}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

a partir de um ponto arbitrário P_0 .

A propriedade associativa verifica-se imediatamente

$$\sum_1^{p+q} \vec{v}_i = \sum_1^p \vec{v}_i + \sum_{p+1}^{p+q} \vec{v}_i$$

para p e q números inteiros positivos.

A propriedade comutativa para a adição de n vectores decorre simplesmente das anteriores.

Subtração de vectores. Define-se a diferença de dois vectores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , que se indica por $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, como a soma de \vec{v}_1 ao oposto de \vec{v}_2 .

Teorema 1. O módulo da soma de dois vectores é igual ou menor que a soma de seus módulos.

Construam-se os pontos O , $A = O + \vec{v}_1$, $B = O + \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ com \vec{v}_1 e \vec{v}_2 quaisquer. Entre os segmentos teremos a relação.

$$|OB| \leq |OA| + |AB|$$

que se traduz em

$$|B - O| \leq |A - O| + |B - A|$$

ou $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| \leq |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|$ c. q. d.

Teorema 2. O módulo da diferença de dois vectores é igual ou maior que a diferença de seus módulos.

Tomem-se para \vec{v}_1 e \vec{v}_2 quaisquer os pontos O , $A = O + \vec{v}_1$, e $B = O + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$.

No triângulo OAB , teremos

$$|OB| \geq |OA| - |AB|$$

entre os segmentos e, portanto

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \geq |\vec{v}_1| - |\vec{v}_2| \quad \text{c. q. d.}$$

5. Expressões lineares de vectores. — *Teorema 1.* Dados dois vectores paralelos, um \vec{v} e outro \vec{u} , não nulo, é possível exprimir-se linearmente o primeiro em função do segundo e de uma única maneira.

Provemos a existência do número real x , tal que

$$\vec{v} = x\vec{u}$$

Se \vec{v} é nulo, para $\vec{u} \neq 0$, acarreta $x = 0$.

Se \vec{u} e \vec{v} não forem nulos, seus módulos serão diferentes de zero e os vectores unitários respectivos diferirão apenas pelo sinal, isto é,

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \pm \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Donde

$$\vec{v} = \pm \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \vec{u}$$

Assim, o número x , quociente de dois números reais ficou determinado.

E , é único o número x , pois se outro x' pudesse existir, obtido de qualquer outra maneira, teríamos também

$$\vec{v} = x'\vec{u}$$

Por diferença $(x - x')\vec{u} = 0$

que só se verifica se $x = x'$

pois, por hipótese, $\vec{u} \neq 0$.

Teorema 2. Dados três vectores coplanares, \vec{v} qualquer, \vec{u}_1 e \vec{u}_2 não paralelos, é possível exprimir-se o primeiro em função linear dos outros dois e de uma só maneira.

De fato, tomado o ponto arbitrário O , construíamos $O + \vec{v} = A$. De O tiremos a paralela a \vec{u}_1 e de A a paralela a \vec{u}_2 ; cortam-se num ponto B , pois estão no mesmo plano e não são paralelas.

Do teorema anterior

$$B - 0 = x_1 \vec{u}_1$$

$$A - B = x_2 \vec{u}_2$$

Mas, $A - 0 = (B - 0) + (A - B)$,

portanto, $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$ c. q. d.

E' único o par x_1, x_2 de números reais, pois se outro x'_1, x'_2 existisse teríamos

$$\vec{v} = x'_1 \vec{u}_1 + x'_2 \vec{u}_2$$

o que acarretaria

$$(x - x'_1) \vec{u}_1 + (x - x'_2) \vec{u}_2 = 0$$

Esta última indica o paralelismo de \vec{u}_1 e \vec{u}_2 e contraria, portanto, a hipótese. Só se verifica se

$$x_1 = x'_1 \text{ e } x_2 = x'_2 \text{ c. q. d.}$$

Teorema 3. Dados quatro vectores, \vec{v} qualquer e $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ não coplanares, é sempre possível exprimir-se linearmente o primeiro em função dos outros três e de uma única maneira.

Tomemos o ponto 0 qualquer e $0 + \vec{v} = A$. Por êste último tiremos a paralela a \vec{u}_3 , que encontra no ponto B o plano passando por 0 e paralelo a \vec{u}_1 e \vec{u}_2 .

Pelo teorema anterior

$$B - 0 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$$

e pelo primeiro

$$A - B = x_3 \vec{u}_3$$

Portanto, de $A - 0 = (B - 0) + (A - B)$

resulta $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$ c. q. d.

E' único o terno de números reais x_1, x_2, x_3 . Outro qualquer implicaria em ser também

$$\vec{v} = x'_1 \vec{u}_1 + x'_2 \vec{u}_2 + x'_3 \vec{u}_3$$

Por diferença entre as duas expressões teríamos

$$(x_1 - x'_1) \vec{u}_1 + (x_2 - x'_2) \vec{u}_2 + (x_3 - x'_3) \vec{u}_3 = 0$$

o que indica a coplanaridade dos vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ contrariamente à hipótese. Esta última relação só se verifica se

$$x_1 = x'_1 \quad x_2 = x'_2 \quad x_3 = x'_3 \quad \text{c. q. d.}$$

Expressões cartesianas de vectores. Se $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ forem vectores não coplanares existe uma correspondência biunívoca entre um vector \vec{v} e o terno de números reais x_1, x_2, x_3 . São as coordenadas do vector \vec{v} no sistema de base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

Se as coordenadas do vector forem nulas o vector é nulo e reciprocamente.

A soma de dois vectores

$$\vec{v}_1 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$$

e $\vec{v}_2 = x'_1 \vec{u}_1 + x'_2 \vec{u}_2 + x'_3 \vec{u}_3$

será $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x'_1) \vec{u}_1 + (x_2 + x'_2) \vec{u}_2 + (x_3 + x'_3) \vec{u}_3$

como facilmente se demonstra.

Se 0 fôr um ponto fixo

$$P - 0 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$$

indica serem x_1, x_2, x_3 , as coordenadas cartesianas do ponto P, no sistema de base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ e origem 0.

Três vectores não coplanares diz-se formarem um *terno não coplanar*.

MULTIPLICAÇÃO DE VECTORES

A. PRODUTO ESCALAR E VECTORIAL.

Consideremos as operações em que entram dois vectores.

Distingamos:

- a) a *multiplicação escalar*, indicada por $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, que se lê “ \vec{v}_1 escalar \vec{v}_2 ”, e
- b) a *multiplicação vectorial*, indicada por $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, que se lê “ \vec{v}_1 vectorial \vec{v}_2 ”.

6. Definições.

Produto escalar de dois vectores \vec{v}_1, \vec{v}_2 , é o número real, igual ao produto do módulo do primeiro vector pelo módulo do segundo e pelo coseno do ângulo por eles formado (*).

Produto vectorial de dois vectores, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, é um vector: de direcção normal a \vec{v}_1 e \vec{v}_2 ; de sentido tal que o terno \vec{v}_1, \vec{v}_2 e $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ seja orientado positivamente (**); e, de módulo igual ao produto dos módulos dos vectores multiplicado pelo seno do ângulo por eles formado:

$$|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \text{sen}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Nota: - O sentido do produto vectorial fica dependendo da orientação do espaço.

(*) — Ângulo de dois vectores \vec{a} e \vec{b} é o ângulo, no intervalo fechado $(0, \pi)$, das semi-retas de mesma direcção e sentido de \vec{a} e \vec{b} : $(0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi)$.

(**) — A orientação de um terno \vec{v}_i ($i=1, 2, 3$), de vectores não coplanares é dada pelo triedro das semi-retas, de mesma origem, paralelas e de mesma orientação que os vectores considerados. A orientação do triedro, para nós, será *positiva* ou *dextrógira*, quando as três semi-retas, não pertencentes, ao mesmo plano, se collocarem respectivamente como o polegar, o indicador e o médio da mão direita espalmada e o médio fora do seu plano. Mnemônicamente: \vec{v}_1 (polegar), \vec{v}_2 (indicador), \vec{v}_3 (médio).

A permutação cíclica das semi-retas mantém a orientação do triedro.

Posições particulares.

Ortogonalidade: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$ só se verifica quando um dos vectores for nulo ou, quando não nulos, forem ortogonais.

Paralelismo: $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$ indica o paralelismo dos vectores, i. e., $\vec{v}_1 = m\vec{v}_2$.

7. Terno fundamental. O terno triortogonal $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de vectores unitários orientado positivamente, denomina-se fundamental.

Verificam-se as relações:

para o produto escalar,

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \times \vec{k} = 0$$

e para o produto vectorial,

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

Observe-se que para uma mesma ordem cíclica dos vectores o sinal se conserva.

8. Comutatividade.

A multiplicação escalar é comutativa. Assim,

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) =$$

$$= |\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = \vec{v}_2 \times \vec{v}_1 \quad \text{c. q. d.}$$

A multiplicação vectorial é anticomutativa.

De fato, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ são vectores do mesmo módulo e mesma direcção. Diferem apenas pelo sentido: são opostos. Portanto,

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1.$$

9. Associatividade em relação a um escalar.

Os produtos escalar e vectorial gozam da propriedade associativa em relação a um escalar:

$$1) \quad \vec{v}_1 \times m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 \times \vec{v}_2.$$

De fato, da igualdade dos ângulos $(\vec{v}_1, m\vec{v}_2)$ e $(m\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ para $m \geq 0$ e da definição de produto escalar decorre

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \times m\vec{v}_2 &= |\vec{v}_1| \cdot |m\vec{v}_2| \cdot \cos(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) = \\ &= |\vec{v}_1| \cdot |m| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) = \\ &= |m\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos(m\vec{v}_1, \vec{v}_2) = m\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \quad \text{c. q. d.} \end{aligned}$$

$$2) \quad \vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2.$$

De fato, considerando que para $m \geq 0$:

a) os vectores $\vec{v}_1, m\vec{v}_2, m\vec{v}_1$ e \vec{v}_2 são coplanares;

b) os ternos

$$\vec{v}_1 \quad m\vec{v}_2 \quad \vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2$$

$$e \quad m\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$$

têm a mesma orientação:

c) os ângulos $(\vec{v}_1, m\vec{v}_2)$ e $(m\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ são iguais, e portanto

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2| &= |\vec{v}_1| \cdot |m\vec{v}_2| \cdot \sin(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) = \\ &= |\vec{v}_1| \cdot |m| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) = \\ &= |m\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \sin(m\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2|, \end{aligned}$$

concluimos que o produto vectorial $\vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2$ tem mesma direcção, mesmo sentido e mesmo módulo que $m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$. c. q. d.

se acíclico. Consideremos nêle outra linha C_2 , concêntrica de C_1 ; sejam P_0 e Q_0 respectivamente os traços sôbre a , de C_1 e C_2 . Tomemos sôbre C_1 os pontos vizinhos P_1 e P_2 separados por P_0 e sôbre C_2 , Q_1 e Q_2 , separados por Q_0 , de maneira que os segmentos $P_1 Q_1$ e $P_2 Q_2$ sejam paralelos.

Consideremos o contôrno simples, fechado, constituído pelas duas circunferências e por êsses dois segmentos vizinhos. Sôbre êles façamos pãssar um diafragma. Pelo teorema de Stokes será nula a circuitação ao longo dêle. Sendo de sinais contrários e iguais as integrais sôbre os dois segmentos, resta

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{-}{v} \times dP - \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{-}{v} \times dP = 0$$

ou

$$f(P_2) - f(P_1) = f(Q_2) - f(Q_1) .$$

Assim a diferença de valores da função para dois pontos, vizinhos de um e de outro lado do plano a é constante (seja ω).

Admitamos, agora, que os pontos do semicírculo de plano a recebam o índice 1 ou o índice 2 conforme sejam considerados como pertencentes a um dos dois semiespaços determinados por a . O raciocínio anterior é ainda válido e a função é multivalente se $\omega \neq 0$. De fato, a m voltas no mesmo sentido sôbre C_1 corresponderá no ponto P_0 à determinação

$$f(P_2) = f(P_1) + m \omega .$$

FINIS

ÍNDICE ANALÍTICO

Os números referem-se às páginas.

- Adição de vectores 3.
- Andamento de uma curva 71.
- Angulo de vectores 9.
- Arbogast. Notação de — 53.
- Arco de uma linha sôbre uma superfície 87;
 - regular 63.
- Area orientada 12.
- Asociatividade do produto escalar e do produto vectorial 11.
- Axialidade 17.
- Base de uma seqüência 40.
- Binário 32.
- Binormal 64.
- Bivector 18.
- Caminho 63.
- Campo acíclico 160;
 - cíclico 159;
 - com fonte, com sorvedouro 140;
 - de momentos 31;
 - escalares 117, definições 17;
 - irrotacional 141, propriedade 147;
 - lamelar 159;
 - potencial-escalar 141, propriedades 146, 159;
 - potencial-vectorial 142;
 - rotacional 141, propriedade 147;
 - sem fonte, sem sorvedouro 141;
 - solenoidal 141, propriedades, 147, 154;
 - vectorial 31, continuidade 125, definição 125, limite 125.
- Cauchy. Notação de — 53.
- Centro de massa 36, 152.
- Circuitação de um vector 123.
- Círculo osculador 74.
- Complanação 88.
- Componentes simétricas 39;
 - construção gráfica das — 43.
- Comutatividade nos produtos escalar e vectorial 10.
- Continuidade de uma função vectorial 10.
- Curvas planas 67.
- Curvatura 66;
 - expressões das —s 69;
 - geodésica, normal 93;
 - raio de — 66;
 - total 69;
 - total e média 96.
- Derivada de função escalar de ponto 117, expressão cartesiana 120;
 - de ponto 60;
 - de vector função de um número real 53, representação paramétrica em coordenadas cartesianas e polares 61;
 - de vector função de ponto segundo um vector 125, propriedades operatórias 128, expressão cartesiana 129, propriedades lineares 126.
- Derivadas. Propriedades gerais das
 - de vector função de um número real 58;
 - propriedades operatórias das — de vector função de um número real;
 - sucessivas 55.
- Diade. Vector de uma — 115.
- Diades 114.
- Diafragma 159.
- Diferença de pontos 1.
- Diferencial de uma função escalar de ponto 122;
 - de vector função de ponto 127.
- Dilatação das homografias 110.
- Direção unida nula 112.
- Direções principais de uma superfície 96;
 - unidas de homografias 105.
- Distância de um ponto ao plano tangente 89.
- Distributividade do produto escalar em relação à soma 12;
 - do produto vectorial em relação à soma 14.

Divergente. Definição do — 137;
 — do produto $f(P) \vec{v}(P)$ 137;
 — do produto vectorial 138;
 expressões cartesianas do — 139;
 propriedades do — 137;
 significado físico do — 140;
 teorema do — 153.

Duplo produto vectorial. Expressão do — 14.

Eixo central 33.

Equação de Hamilton-Cayley 106;
 — da esfera 85.

Equações vectoriais 24, 25;
 interpretação geométrica das — 25, 26;
 sistemas de — 27.

Equivalência de sistemas de vectores 33.

Escalares axiais e polares 19.

Esfera. Equação da — 85;
 — oscultriz 75.

Euler. Fórmula de — 98;
 teorema de — 97.

Flexão 66, 67;
 expressão da — 69.

Fluxo de um vector 142;
 — do rotacional 159.

Formas diádicas de uma homografia 115.

Fórmula de Euler 98;
 — de MacLaurin para vector função de um número real 62;
 — de MacLaurin para vector função de mais de um número real 82;
 expressão geral da — de Taylor 62, 82;
 — de Taylor para vector função de um número real 61;
 — de Taylor para vector função de mais de um número real 80.

Fórmulas de Frenet-Serret 65;
 — de Green 156.

Frenet. Triedro de — 64.

Frenet-Serret. Fórmulas de — 65.

Função escalar de ponto 117,
 continuidade 117, derivada da soma 119, derivada composta 119, derivada do produto 119, derivada segundo um vector 117, diferencial 122, limite 117, linearidade 118;
 — vectorial 47, continuidade 51;
 — vectorial composta 133, rotacional 133.

Funções compostas 54, 80, continuidade 54, derivada 54, derivadas e diferenciais sucessivas 55, limite 54;
 — harmônicas 145.

Gauss. Curvatura de — 96;
 teorema de — 153.

Gradiente. Expressão cartesiana do — 123;
 propriedades operatórias do — 123;
 representação do — 121;
 teorema do — 155.

Grandezas axiais e polares 18.

Grassmann. Notação de — 1.

Green. Fórmulas de — 156.

Hamilton-Cayley. Equação de — 106.

Helicóide de plano diretor 84.

Hodógrafo 60, 83.

Homografia conjugada 106;
 expressão cartesiana da — 108;
 constituintes de uma — 103, 108, 109, 129;
 definição de — 101, 103;
 — de inércia 104;
 formas diádicas de uma — 115;
 — função de um parâmetro 103;
 ordem de uma — 112, 116;
 — pseudo-simétrica ou axial 109;
 — simétrica 108.

Homografias. Classificação das — 112;
 dilatação das — 111;
 indicatriz das — 112;
 invariantes das — 105;
 — próprias 112;
 — singulares 112;
 teorema fundamental das — 109;
 vector das — 110.

Igualdade de vector 2.

Indicatriz das homografias 112.

Índice de uma seqüência 39.

Infinitésimo 47.

Integrais de vectores. Definição de — 149;
 — múltiplas 151.

Integral definida de vector 149;
 — de vector como função 150;
 — do Laplaciano 156.

Invariante. Primeiro — escalar de um sistema de vectores ligados 31;
 segundo — escalar de um sistema de vectores ligados 32.

Invariantes das homografias 105.

Jordan. Linha de — 63.

Lagrange. Notação de — 53.

Lancet. Teorema de — 69.

Laplaciano 145;
 integral do — 156.

Linearidade das derivadas de uma função de ponto segundo um vector 118.

Limite de uma função vectorial 47, existência 48, propriedades operatórias 49.

Linha de corrente, campo, força 142;
 — regular 63.

Linhas assintóticas 99;
 — de curvatura 99;
 — de Jordan 63;
 — geodésicas 99;
 — sobre uma superfície 91.

Mac-Laurin. Fórmula de — para vector função de um número real 62;
 fórmula de — para vector função de mais de um número real 82.

Meusnier. Teorema de — 95.

Möbius. Tira de — 86.

Módulo da diferença de vectores 4;
 — da soma de vectores 4;
 — de um vector 2;
 expressão cartesiana do — de um vector 17.

Momento de um binário 32;
 — de um vector 32;
 — mínimo de um sistema 33.

Monge. Notação de — 86.

Multiplicação escalar e vectorial 9;
 operações inversas da — 26.

Normal às superfícies 85;
 — geodésica 92;
 — principal 64;
 vector da — principal 64.

Operador $e^{i\varphi}$ 38, propriedades 39;
 — D 111;
 — Δ 145;
 — i 37;
 — K 107;
 — V 111;
 soma dos —s de uma seqüência 40;
 — vectorial linear conjugado 106, expressão cartesiana 108;
 — vectorial linear pseudo-simétrico ou axial 109;
 — vectorial linear simétrico 108.

Operadores vectoriais lineares. Soma de — 103;
 direcções unidas dos — 105;
 teorema fundamental dos — 109;
 vector dos — 110.

Ordem de uma seqüência 39.

Orientação de um terno de vectores 9.

Osculador. Circulo — 74.

Osculatriz. Esfera — 75.

Peano. Resto de — 62.

Plano. Equação do — 83;
 — normal, osculador, retificante 65;
 — tangente 86.

Pólo 31.

Ponto circular (umbilico) 96;
 — elíptico, hiperbólico, parabólico 91;
 — ordinário 85.

Produto escalar e vectorial 9,
 significado geométrico 12, expressão cartesiana 17;
 — de operadores 104, 145;
 — de seqüências 40;
 — de vector por um número real 2;
 — misto 13, expressão cartesiana, 17, propriedades 13, significado geométrico 13.

Projeção de segmento 12.

Raio de curvatura 66;
 — de torção 67.

Redução de sistemas de vectores ligados 34.

Resto de Peano 62.

Resultante geral 31.

Rotação de um ângulo reto 37.

Rotações repetidas 37.

Rotacional. Definição do — 131;
 — de uma função vectorial composta 133;
 — do produto $f(P) \vec{u}(P)$ 132;
 expressões cartesianas do — 134;
 fluxo do — 159;
 outra definição do — 132;
 propriedade distributiva do — em relação à soma 131;
 significado cinemático do — 135;
 teorema do — 155.

Secções planas normais 94.

Seqüência de operadores 39, 44;
 — de vectores 40;
 índice de uma — 39;
 ordem de uma — 39;
 produto de operadores por uma — de vectores 45;
 soma de —s 44.

Sistema assimétrico 41;
 — simétrico inverso ou de fase negativa 41;
 — simétrico direto ou de fase positiva 41;
 — trifásico 41, 44.

- Sistemas de equações vectoriais** 27;
 — de operadores coaxiais 43;
 — de vectores ligados 33, classificação 35, equivalência 33, redução 34.
- Soma de vector a ponto** 1.
- Sophie Germain.** Curvatura de — 96.
- Subtração de vectores** 4.
- Stokes.** Teorema de — 157.
- Superfície de corrente** 142;
 — de uma, de duas faces 86;
 direcções principais de uma — 96;
 linhas sobre uma — 91;
 — regular 86;
 — regradada, cilíndrica, cônica, de revolução 84.
- Superfícies.** Curvatura das — 96;
 curvaturas total e média das — 95;
 — equipotenciais 141;
 estudo das — 83; normal às — 85;
 estudo das — nas vizinhanças de um ponto 91;
 primeira forma fundamental das — 87;
 segunda forma fundamental das — 90.
- Tangente a uma curva** 63;
 plano — 86;
 vector — 64;
- Taylor.** Expressão geral da fórmula de 62, 80;
 fórmula de — para vector função de um número real 61;
 fórmula de — para vector de função de mais de um número real 80.
- Teorema da média** 151;
 — de Euler 97;
 — de Lancret 69;
 — de Meusnier 95;
 — de Stokes 157;
 — do divergente ou de Gauss 153;
 — do gradiente 155;
 — do rotacional 155;
 — fundamental das homografias 109.
- Terno não complanar** 7;
 —s recíprocos de vectores 22;
 — dextrógiro 9;
 — fundamental 10.
- Tira de Möbius** 86.
- Torção** 66, 68;
 expressão da — 69;
 raio de — 67.
- Transformações lineares de vectores**
 complanares 37;
 — vectoriais lineares 101, definição 101, expressão cartesiana 102.
- Triedro de Frenet** 64.
- Tubo de corrente** 142, propriedade 154.
- Vector base de um sistema** 7;
 — base de uma seqüência 40;
 circuitação de um — 123;
 — da binormal 64;
 — da normal principal 64;
 — da homografia 110;
 — de Darboux 66;
 — de uma diade 115;
 definição de — 2;
 — deslizante 32;
 divergente de um — 137;
 expressões cartesianas de um — 7;
 expressões lineares de um — 5;
 fluxo de um — 142;
 — função de um número real 47, continuidade 51, derivadas 53, diferenciais 53, limite 47;
 — função de mais de um número real 77, continuidade 77, derivadas 78, diferenciais 78, diferenciais de ordem superior à primeira 80, funções compostas 80, invertibilidade da ordem de derivação 79, limite 77;
 — nulo 2;
 produto de — por um número 2;
 rotacional de um — 131;
 — tangente 64.
- Vectores.** Adição de — 3;
 decomposição de — 21;
 igualdade de — 2;
 integral de — 149;
 — ligados a pontos 31;
 multiplicação de — 9;
 ortogonalidade, paralelismo de — 10;
 — paralelos, complanares 3;
 soma de — 1, 3;
 subtração de — 4;
 terno não complanar de — 7;
 ternos recíprocos de — 22;
 — unitários, opostos 3.
- Versor.** Definição de — 3.

