CÁLCULO VECTORIAL

Curso da Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo

por

J. O. MONTEIRO DE CAMARGO

prof. catedratico de Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Vectorial

1946

EDITÔRA RENASCENÇA S. A.

SÃO PAULO

PREFÁCIO

Estas **notas de aula** — despidas de exercícios e de aplicações — que ora se publicam, são a síntese, do curso de CÁLCULO VECTORIAL, que vímos, ha anos, professando na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

O ensino desta disciplina é aqui feito conjuntamente com o CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. Visa, não só a formação de pensamento exáto, como também pretende dar uma informação básica, mínima, indispensável às ciências fundamentais da Engenharia. Daí sua orientação.

Esta publicação enquadra-se no plano geral que o Departamento de Matemática da Escola Politécnica de São Paulo está desenvolvendo.

Aos alunos Zake Tacla, assistente e E. G. Antonio Diez nossos agradecimentos pelo estímulo de sua cooperação na organização dos originais e figuras deste livro.

São Paulo, 8 de janeiro de 1946

Monteiro Camargo

ÍNDICE GERAL

ALGEBRA VECTORIAL

CAPÍTULO I

VECTOR

1. **Vector.** Sabemos da Geometria elementar ser um segmento o conjunto dos pontos de uma reta compreendidos entre dois outros.

Um segmento AB é suceptível de orientação: segmento orientado no sentido AB ou orientado no sentido BA, um oposto ao outro.

O comprimento do segmento, sua medida em relação a outro tomado por unidade, é um número real positivo.

Vector é o conjunto de uma direção, um sentido e um número real positivo, seu módulo. Indica-se por uma letra em corpo cheio ou encimada por uma flexa: **v** ou $\vec{v}$, p. ex., que se lê "vector v".

Os segmentos de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido (segmentos eqüipolentes) possuem o mesmo vector. Diferem uns dos outros por serem conjuntos distintos de pontos.

Os segmentos são conjuntos de pontos, enquanto que o vector não possui ponto algum.

Diz-se *soma de vector* $\vec{v}$ *a um ponto* A a operação da qual resulta um ponto B, extremidade do segmento AB, de mesma direção, mesmo sentido que o vector e comprimento dado pelo seu módulo, escolhido e fixado um segmento unitário; indica-se por

$$A + \vec{v} = B \qquad (1)$$

O vector $\vec{v}$ conduz, por assim dizer, o ponto A ao ponto B (vehere, conduzir).

Grassmann empregou a notação (B — A), "B menos A", para indicar o mesmo vector $\vec{v}$:

$$\vec{v} = B - A \qquad (2)$$

As relações (1) e (2) são eqüivalentes. (B — A) *é dito* uma diferença de pontos.

Existe uma infinidade de pares de pontos para o mesmo vector.

E' comoda a representação do vector $\vec{v}$ por um dos segmentos cujas extremidades A e B, p. ex., satisfazem a (1). Confundí-los é erro conceitual.

A distância de um a outro ponto do mesmo par dá o módulo do vector

$$\text{mod}\,\vec{v} \text{ ou } |\vec{v}|$$

ou ainda, lembrando a relação (2)

$$\text{mod } (B - A) \text{ ou } |B - A| .$$

Vector nulo, por extensão, tem módulo igual a zero, sentido e direção arbitrários; satisfaz à relação

$$A + \vec{v} = A$$

para A qualquer. Indica-se por 0 (zero).

Podemos definir:

Vector é um número real absoluto associado a uma direção e a um sentido.

2. Igualdade de vectores. Dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são iguais quando possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido: indica-se

$$\vec{a} = \vec{b} .$$

Os vectores nulos são iguais.

3. Produto de vector por um número real. Seja m número real e $\vec{v}$ vector, $m\vec{v}$ será um vector com a direção de $\vec{v}$, mesmo sentido se $m > o$, contrário se $m < o$ e mod $m\vec{v} = |m|$ mod $\vec{v}$, sendo $|m|$ o valor absoluto de m.

São notações eqüivalentes $m\vec{v}$, $m.\vec{v}$, $(m)\,\vec{v}$; só a conveniência decide de seu emprêgo.

Se $m = o$, $m\vec{v}$ será vector nulo, e reciprocamente, se $\vec{v} \neq o$.

Se $m = -1$, o produto $m\vec{v}$ indica-se por $-\vec{v}$: será o vector oposto a $\vec{v}$. (A — B) e (B — A) são opostos.

Se $n \neq o$, $\dfrac{1}{n} = m$, escreve-se

$$m\,\vec{v} = \frac{\vec{v}}{n}$$

que é o quociente de $\vec{v}$ por n.

Fàcilmente se verifica ser

$$m(n\vec{v}) = mn\vec{v} = n(m\vec{v}).$$

Como notação de produto entre números reais, escalares, usaremos também um ponto: mn ou m.n.

Vectores paralelos são os que têm a mesma direção; vectores complanares os que são paralelos a um mesmo plano.

O vector nulo pode ser considerado como paralelo a outro não nulo.

Vector unitário é o que tem módulo um. Os vectores $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e seu oposto $\dfrac{-\vec{v}}{|\vec{v}|}$ são unitários e paralelos a $\vec{v}$.

Versor de um vector $\vec{v}$, vers $\vec{v}$, é o vector unitário paralelo a $\vec{v}$ e de mesmo sentido que $\vec{v}$.

4. Adição de vectores. Dados dois vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, tomemos um ponto 0 qualquer, $0 + \vec{v}_1 = A$, $A + \vec{v}_2 = B$: o vector de (B — 0) diz-se soma de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Indica-se por $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$. E' independente do ponto 0 e do segmento unitário escolhido.

Atendendo-se que a soma $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ é ainda o mesmo vector de (B — 0), pois os pontos 0, $0 + \vec{v}_2 = A'$, $A' + \vec{v}_1$ e A são os vértices de um paralelogramo,, verifica-se que a adição de dois vectores goza da propriedade comutativa

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

A soma, expressa pela diferença de pontos, toma o aspecto de uma identidade algébrica em relação aos pontos, assim

$$(B - 0) + (0 - A) = B - A.$$

Verificam-se as propriedades distributivas:

$m(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$ em relação aos vectores e $(m+n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$ em relação aos escalares.

A soma de n vectores $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$,

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots\ldots + \vec{v}_n \quad \text{ou} \quad \sum_1^n \vec{v}_i$$

será ainda um vector como se verifica da construção dos pontos

$$P_i = P_{i-1} + \vec{v}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots .n)$$

a partir de um ponto arbitrário P_0.

A propriedade associativa verifica-se imediatamente

$$\sum_1^{p+q} \vec{v}_i = \sum_1^{p} \vec{v}_i + \sum_{p+1}^{p+q} \vec{v}_i$$

para p e q números inteiros positivos.

A propriedade comutativa para a adição de n vectores decorre simplesmente das anteriores.

Subtração de vectores. Define-se a diferença de dois vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, que se indica por $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, como a soma de $\vec{v}_1$ ao oposto de $\vec{v}_2$.

Teorema 1. *O módulo da soma de dois vectores é igual ou menor que a soma de seus módulos.*

Construam-se os pontos 0, $A = 0 + \vec{v}_1$, $B = 0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ com $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ quaisquer. Entre os segmentos teremos a relação.

$$|0B| \leq |0A| + |AB|$$

que se traduz em

$$|B-0| \leq |A-0| + |B-A|$$

ou

$$\left|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right| \leq \left|\vec{v}_1\right| + \left|\vec{v}_2\right| \qquad \text{c. q. d.}$$

Teorema 2. *O módulo da diferença de dois vectores é igual ou maior que a diferença de seus módulos.*

Tomem-se para $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ quaisquer os pontos 0, $A = 0 + \vec{v}_1$, e $B = 0 + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$.

No triângulo 0AB, teremos

$$|0B| \geq |0A| - |AB|$$

entre os segmentos e, portanto

$$\left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right| \geq \left|\vec{v}_1\right| - \left|\vec{v}_2\right| \qquad \text{c. q. d.}$$

5. Expressões lineares de vectores. — *Teorema* 1. *Dados dois vectores paralelos, um $\vec{v}$ e outro $\vec{u}$, não nulo, é possível exprimir-se linearmente o primeiro em função do segundo e de uma única maneira.*

Provemos a existência do número real x, tal que

$$\vec{v} = x\vec{u}$$

Se $\vec{v}$ é nulo, para $\vec{u} \neq o$, acarreta $x = o$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não forem nulos, seus módulos serão diferentes de zero e os vectores unitários respectivos diferirão apenas pelo sinal, isto é,

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \pm \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Donde

$$\vec{v} = \pm \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \vec{u}$$

Assim, o número x, quociente de dois números reais ficou determinado.

E, é único o número x, pois se outro x' pudesse existir, obtido de qualquer outra maneira, teríamos também

$$\vec{v} = x'\vec{u}$$

Por diferença $(x - x')\,\vec{u} = o$

que só se verifica se $x = x'$

pois, por hipótese, $\vec{u} \neq o$.

Teorema 2. *Dados três vectores complanares, $\vec{v}$ qualquer, $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ não paralelos, é possível exprimir-se o primeiro em função linear dos outros dois e de uma só maneira.*

De fato, tomado o ponto arbitrário 0, construamos $O + \vec{v} = A$. De 0 tiremos a paralela a $\vec{u}_1$ e de A a paralela a $\vec{u}_2$; cortam-se num ponto B, pois estão no mesmo plano e não são paralelas.

Do teorema anterior

$$B - 0 = x_1 \vec{u}_1$$

$$A - B = x_2 \vec{u}_2$$

Mas, $A - 0 = (B - 0) + (A - B)$,

portanto, $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$ c. q. d.

E' único o par x_1, x_2 de números reais, pois se outro x'_1, x'_2 existisse teríamos

$$\vec{v} = x'_1 \vec{u}_1 + x'_2 \vec{u}_2$$

o que acarretaria

$$(x - x'_1) \vec{u}_1 + (x - x'_2) \vec{u}_2 = 0$$

Esta última indica o paralelismo de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ e contraria, portanto, a hipótese. Só se verifica se

$$x_1 = x'_1 \quad e \quad x_2 = x'_2 \qquad \text{c. q. d.}$$

Teorema 3. *Dados quatro vectores,* $\vec{v}$ *qualquer e* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ *não complanares, é sempre possível exprimir-se linearmente o primeiro em função dos outros três e de uma única maneira.*

Tomemos o ponto 0 qualquer e $0 + \vec{v} = A$. Por êste último tiremos a paralela a $\vec{u}_3$, que encontra no ponto B o plano passando por 0 e paralelo a $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

Pelo teorema anterior

$$B - 0 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$$

e pelo primeiro

$$A - B = x_3 \vec{u}_3$$

Portanto, de $A - 0 = (B - 0) + (A - B)$

resulta $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$ c. q. d.

E' único o terno de números reais x_1, x_2, x_3. Outro qualquer implicaria em ser também

$$\vec{v} = x'_1 \vec{u}_1 + x'_2 \vec{u}_2 + x'_3 \vec{u}_3$$

Por diferença entre as duas expressões teríamos

$$(x_1 - x'_1) \vec{u}_1 + (x_2 - x'_2) \vec{u}_2 + (x_3 - x'_3) \vec{u}_3 = 0$$

o que indica a complanaridade dos vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ contràriamente à hipótese. Esta última relação só se verifica se

$$x_1 = x'_1 \qquad x_2 = x'_2 \qquad x_3 = x'_3 \qquad \text{c. q. d.}$$

Expressões cartesianas de vectores. Se $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ forem vectores não complanares existe uma correspondência biunívoca entre um vector $\vec{v}$ e o terno de números reais x_1, x_2, x_3. São as coordenadas do vector $\vec{v}$ no sistema de base $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$.

Se as coordenadas do vector forem nulas o vector é nulo e reciprocamente.

A soma de dois vectores

$$\vec{v}_1 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$$

e $\vec{v}_2 = x'_1 \vec{u}_1 + x'_2 \vec{u}_2 + x'_3 \vec{u}_3$

será $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x'_1) \vec{u}_1 + (x_2 + x'_2) \vec{u}_2 + (x_3 + x'_3) \vec{u}_3$

como fàcilmente se demonstra.

Se 0 fôr um ponto fixo

$$P - 0 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$$

indica serem x_1, x_2, x_3, as coordenadas cartesianas do ponto P, no sistema de base $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ e origem 0.

Três vectores não complanares diz-se formarem um *terno não complanar.*

CAPÍTULO II

MULTIPLICAÇÃO DE VECTORES

A. PRODUTO ESCALAR E VECTORIAL.

Consideremos as operações em que entram dois vectores.

Distingamos:

a) a *multiplicação escalar,* indicada por $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, que se lê "$\vec{v}_1$ escalar $\vec{v}_2$", e

b) a *multiplicação vectorial,* indicada por $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, que se lê "$\vec{v}_1$ vectorial $\vec{v}_2$".

6. Definições.

Produto escalar de dois vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, é o número real, igual ao produto do módulo do primeiro vector pelo módulo do segundo e pelo coseno do ângulo por êles formado (*).

Produto vectorial de dois vectores, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, é um vector: de direção normal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$; de sentido tal que o terno $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ seja orientado positivamente (**); e, de módulo igual ao produto dos módulos dos vectores multiplicado pelo seno do ângulo por êles formado:

$$\left| \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \right| = \left| \vec{v}_1 \right| . \left| \vec{v}_2 \right| . \text{ sen } (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Nota: - O sentido do produto vectorial fica dependendo da orientação do espaço.

(*) — Ângulo de dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o ângulo, no intervalo fechado $(0, \pi)$, das semi-retas de mesma direção e sentido de $\vec{a}$ e $\vec{b}$: $(0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$.

(**) — A orientação de um terno $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, de vectores não complanares é dada pelo triedro das semi-retas, de mesma origem, paralelas e de mesma orientação que os vectores considerados. A orientação do triedro, para nós, será **positiva** ou **dextrógira,** quando as três semi-retas, não pertencentes, ao mesmo plano, se colocarem respectivamente como o polegar, o indicador e o médio da mão direita espalmada e o médio fora do seu plano. Mnemônicamente: $\vec{v}_1$ (polegar), $\vec{v}_2$ (indicador), $\vec{v}_3$ (médio).
A permutação cíclica das semi-retas mantém a orientação do triedro.

Posições particulares.

Ortogonalidade: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$ só se verifica quando um dos vectores fôr nulo ou, quando não nulos, forem ortogonais.

Paralelismo: $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$ indica o paralelismo dos vectores, i. e., $\vec{v}_1 = m\vec{v}_2$.

7. Terno fundamental. O terno triortogonal $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de vectores unitários orientado positivamente, denomina-se fundamental.

Verificam-se as relações:

para o produto escalar,

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = 0$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \times \vec{k} = 0$$

e para o produto vectorial,

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

Observe-se que para uma mesma ordem cíclica dos vectores o sinal se conserva.

8. Comutatividade.

A multiplicação escalar é comutativa. Assim,

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| . \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) =$$

$$= |\vec{v}_2| . |\vec{v}_1| . \cos(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = \vec{v}_2 \times \vec{v}_1 \quad \text{c. q. d.}$$

A multiplicação vectorial é anticomutativa.

De fato, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ são vectores do mesmo módulo e mesma direção. Diferem apenas pelo sentido: são opostos. Portanto,

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 .$$

9. Associatividade em relação a um escalar.

Os produtos escalar e vectorial gozam da propriedade associativa em relação a um escalar:

1) $$\vec{v}_1 \times m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 .$$

De fato, da igualdade dos ângulos $(\vec{v}_1, m\vec{v}_2)$ e $(m\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ para $m \gtrless 0$ e da definição de produto escalar decorre

$$\vec{v}_1 \times m\vec{v}_2 = |\vec{v}_1| . |m\vec{v}_2| . \cos(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$$

$$= |\vec{v}_1| . |m| . |\vec{v}_2| . \cos(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$$

$$= |m\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| . \cos(m\vec{v}_1, \vec{v}_2) = m\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \quad \text{c.q.d.}$$

2) $$\vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 .$$

De fato, considerando que para $m \gtrless 0$:

a) os vetores $\vec{v}_1$, $m\vec{v}_2$, $m\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são complanares;

b) os ternos

$$\vec{v}_1 \qquad m\vec{v}_2 \qquad \vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2$$

e

$$m\vec{v}_1 \qquad \vec{v}_2 \qquad m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$$

têm a mesma orientação:

c) os ângulos $(\vec{v}_1, m\vec{v}_2)$ e $(m\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ são iguais, e portanto

$$|\vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2| = |\vec{v}_1| . |m\vec{v}_2| . \text{sen}(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$$

$$= |\vec{v}_1| . |m| . |\vec{v}_2| . \text{sen}(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$$

$$= |m\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| . \text{sen}(m\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2|,$$

concluímos que o produto vectorial $\vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2$ tem mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo que $m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$. c. q. d.

se acíclico. Consideremos nêle outra linha C_2, concêntrica de C_1; sejam P_0 e Q_0 respectivamente os traços sôbre α, de C_1 e C_2. Tomemos sôbre C_1 os pontos vizinhos P_1 e P_2 separados por P_0 e sôbre C_2, Q_1 e Q_2, separados por Q_0, de maneira que os segmentos $P_1 Q_1$ e $P_2 Q_2$ sejam paralelos.

Consideremos o contôrno simples, fechado, constituido pelas duas circunferências e por êsses dois segmentos vizinhos. Sôbre êles façamos pássar um diafragma. Pelo teorema de Stokes será nula a circuitação ao longo dêle. Sendo de sinais contrários e iguais as integrais sôbre os dois segmentos, resta

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{v} \times dP - \int_{Q_2}^{Q_1} \vec{v} \times dP = 0$$

ou

$$f(P_2) - f(P_1) = f(Q_2) - f(Q_1) .$$

Assim a diferença de valores da função para dois pontos, vizinhos de um e de outro lado do plano α é constante (seja ω).

Admitamos, agora, que *os pontos do semicírculo de plano* α recebam o índice 1 ou o índice 2 conforme sejam considerados como pertencentes a um dos dois semiespaços determinados por α. O raciocínio anterior é ainda válido e a função é multivalente se $\omega \neq 0$. De fato, a m voltas no mesmo sentido sôbre C_1 corresponderá no ponto P_0 à determinação

$$f(P_2) = f(P_1) + m\,\omega .$$

FINIS

ÍNDICE ANALÍTICO

Os números referem-se às páginas.