COLEÇÃO DIDÁTICA DO BRASIL
SÉRIE COLEGIAL

F. Furquim de Almeida,
João B. Castanho, Edison Farah -
e Benedito Castrucci

MATEMÁTICA

PRIMEIRO VOLUME

PARA A 1.ª SÉRIE DOS
CURSOS CLÁSSICO
E CIENTÍFICO

RASIL S/A
O

Matemática

COLEÇÃO DIDÁTICA DO BRASIL
Série Colegial VOL. 10

F. FURQUIM DE ALMEIDA, JOÃO B. CASTANHO,
EDISON FARAH e BENEDITO CASTRUCCI

Matemática

Destinado à primeira série dos cursos Clássicos e Científico

Edilon de Araújo
1945

EDITORA DO BRASIL S/A
Rua Conselheiro Nébias, 787
SÃO PAULO
1944

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CLÁSSICO (1)

PRIMEIRA SÉRIE

ARITMÉTICA TEÓRICA

UNIDADE I — A DIVISIBILIDADE NUMÉRICA: 1. Teoremas gerais sôbre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m.m.c. e do m.d.c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

ÁLGEBRA

UNIDADE II — OS POLINÔMIOS: 1. Operações algébricas sôbre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffino.

UNIDADE III — O TRINÔMIO DO 2.º GRAU — 1. Decomposição em fatores do 1.º grau; sinais do trinômio; desigualdades do 2.º grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.º grau; representação gráfica.

GEOMETRIA

UNIDADE IV — O PLANO E A RETA NO ESPAÇO: 1. Determinação de um plano. 2. Intersecção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Noções sobre ângulos poliédricos.

UNIDADE V — OS POLIEDROS: 1. Noções gerais. 2. Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos.

---

(1) Portaria Ministerial n. 177 de 16 de março de 1943, publicado no Diario Oficial de 18 do mesmo mês.

PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO CURSO CIENTÍFICO

PRIMEIRA SÉRIE

ARITMÉTICA TEÓRICA

UNIDADE I — AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS: 1. Teoria da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2. Sistemas de numeração.

UNIDADE II — A DIVISIBILIDADE NUMÉRICA: 1. Teoremas gerais sobre divisibilidade. 2. Caracteres de divisibilidade. 3. Teorias do m.d.c. e do m.m.c. 4. Teoria dos números primos; aplicações.

UNIDADE III — OS NÚMEROS FRACIONÁRIOS: 1. Teoria das operações aritméticas sôbre números fracionários. 2. Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros. Operações abreviadas.

ÁLGEBRA

UNIDADE IV — OS POLINÔMIOS: 1. Operações algébricas sôbre polinômios. 2. Teoria da divisão de polinômios. 3. Identidade de polinômios; método dos coeficientes a determinar; identidades clássicas. 4. Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini.

UNIDADE V — O TRINÔMIO DO 2.° GRAU: 1. Decomposição em fatores do 1.° grau; sinais do trinômio; inequações do 2.° grau. 2. Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2.° grau; representação gráfica. 3. Noções elementares sôbre continuidade e sôbre máximos e mínimos.

GEOMETRIA

UNIDADE VI — O PLANO E A RETA NO ESPAÇO: 1. Determinação de um plano. 2. Intersecção de planos e retas. 3. Paralelismo de retas e planos. 4. Reta e plano perpendiculares. 5. Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6. Diedros; planos perpendiculares entre si. 7. Ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros.

UNIDADE VII — OS POLIEDROS: 1. Noções gerais. 2. Estudos dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes dêsses sólidos. 3. Teorema de Euler; noções sôbre os poliedros regulares.

ÍNDICE

UNIDADE I
AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

UNIDADE II
A DIVISIBILIDADE NUMÉRICA

UNIDADE III
OS NÚMEROS RACIONAIS

Unidade IV

OS POLINÔMIOS

Unidade V

O TRINÔMIO DO 2.º GRAU

Unidade VI

O PLANO E A RETA NO ESPAÇO

ADVERTÊNCIA

Com êste volume iniciamos a publicação dos livros de matemática destinados aos alunos do curso secundário - 2.º ciclo.

Neste livro, para a primeira série, seguimos tanto quanto possível o programa oficial, fazendo sòmente os acréscimos e modificações que reputamos absolutamente indispensáveis à seqüência lógica dos argumentos expostos.

O trabalho apresenta-se distribuido da seguinte forma:

UNIDADES I e II — *Fernando Furquim de Almeida.*
UNIDADES III e IV — *João Batista Castanho.*
UNIDADE V — *Edison Farah.*
UNIDADES VI e VII — *Benedito Castrucci.*

Os Autores

UNIDADE I

AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

NÚMEROS NATURAIS

§ *1.º* — *Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.*

1. Um conjunto não se define. Basta, para uma construção lógica da Aritmética, a noção intuitiva que dêle formamos. Quando dizemos, por exemplo, um conjunto de casas ou um conjunto de cadeiras, sabemos perfeitamente o que isso significa, o que é suficiente para nosso estudo. No entanto, é bom observar que a noção de conjunto exige só a pluralidade de objetos, não importando absolutamente que êsses objetos sejam ou não da mesma espécie, como poderia parecer pelos exemplos dados.

Afim de simplificar a exposição sempre indicaremos um conjunto com letras maiúsculas e, com letras minúsculas, um objeto qualquer que dêle faça parte, o qual chamaremos de elemento do conjunto.

2. Tomemos dois conjuntos A e B, e marquemos um elemento de A e um elemento de B com um sinal qualquer. Diremos que êsses dois elementos são correspondentes. Dentre os elementos de A e B que não estão marcados, marquemos outros dois, sendo um de A e outro de B, e prossigamos nessa operação, marcando sucessivamente um elemento de A e outro de B, enquanto houver elementos não marcados nos dois conjuntos. Evidentemente, tendo começado por marcar um elemento de A, não poderemos prosseguir na operação desde que B tenha todos os seus elementos marcados, pois consideramos como uma operação única a marcação de dois elementos sendo um em cada conjunto, e começamos sempre por marcar um elemento de A. Quando essa operação não for mais possível dizemos que se estabeleceu entre A e B uma correspondência, e se a e b são elementos marcados num dos passos da operação, diremos que êles são correspondentes; a se diz correspondente de b e b correspondente de a.

Estabelecida a correspondência entre A e B pode acontecer que os dois conjuntos não contenham senão elementos marcados. Neste caso a correspondência tem as seguintes propriedades:

1) a elementos distintos de A correspondem elementos distintos de B;

2) cada elemento de A tem um elemento correspondente em B e cada elemento de B tem um correspondente em A.

Diremos então que os dois conjuntos estão em correspondência biunívoca ou que são equivalentes.

Suponhamos, por exemplo, um conjunto de mesas e um conjunto de cadeiras. Se pudermos colocar uma e uma só cadeira em cada mesa de modo que não fique nenhuma mesa sem cadeira e nenhuma cadeira sem mesa, o conjunto de mesas é equivalente ao conjunto de cadeiras e a correspondência entre os dois conjuntos é biunívoca.

Essa noção de equivalência é de grande importância e possue as tres seguintes propriedades importantes:

1) Se o conjunto A é equivalente ao conjunto B, e se o conjunto B é equivalente ao conjunto C, o conjunto A é equivalente ao conjunto C.

Com efeito, sendo A equivalente ao conjunto B, a cada elemento a de A corresponde um único elemento b de B, e, sendo B equivalente ao conjunto C, ao elemento b corresponderá um único elemento c de C. Portanto, ao elemento a de A corresponde um único elemento c de C. Inversamente, ao elemento c de C corresponde, em B, um único elemento, que é, precisamente, b, e a este, corresponderá, em A o único elemento a.

Existe, pois, uma correspondência biunívoca entre os elementos dos conjuntos A e C, isto é, estes conjuntos são equivalentes.

A propriedade enunciada é a chamada propriedade *transitiva* da equivalência de conjuntos.

2) Em um conjunto A podemos fazer corresponder a cada elemento êle próprio marcando, por exemplo, duas vezes cada objeto de A. O conjunto A pode dessa forma, ser posto em correspeto de A. O conjunto A pode dessa forma, ser posto em correspondência biunívoca consigo mesmo, isto é, o conjunto A é equivalente a si mesmo.

Esta nova propriedade se exprime dizendo que a equivalência de conjuntos é *reflexiva.*

3) Propriedade simétrica. — Se o conjunto A é equivalente ao conjunto B, B é equivalente a A. Esta propriedade é uma consequência imediata da definição de conjuntos equivalentes.

É claro que a noção de conjunto exige a pluralidade de objetos, mas, para uniformidade da definição de número que daremos, vamos estender êsse conceito a um único objeto, dizendo que um único objeto forma tambem um conjunto, que chamaremos de conjunto unitário. É uma convenção, mas, uma convenção útil, que simplificará extraordinariamente a definição de número.

Aplicando aos conjuntos unitários a noção de equivalência, vemos que dois conjuntos unitários são equivalentes e que se um conjunto unitário A é equivalente ao conjunto unitário B e se êste por sua vez for equivalente ao conjunto C, A e C como conjuntos unitários, são equivalentes. Assim sendo, ao tratarmos de conjuntos equivalentes não faremos distinção entre conjuntos unitários ou não unitários.

3. Dado um conjunto A, consideremos todos os conjuntos equivalentes a A. Todos êsses conjuntos e o conjunto A têm alguma cousa em comum, que chamamos de número cardial, e dá uma idéia da quantidade de objetos contidos em cada conjunto. Indicaremos os números cardiais tambem por letras minúsculas, e sempre que possa haver dúvida, se uma letra minúscula representa um número ou um elemento de um conjunto, diremos explicitamente o número a ou o elemento a.

Cada conjunto tem assim um número bem definido que a êle corresponde. Reciprocamente, dado um número a podemos a êle fazer corresponder um qualquer dos conjuntos que servem para definí-lo. Donde, a cada conjunto corresponde um número, e a cada número podemos fazer corresponder um conjunto (1).

4. De acôrdo com a definição que demos, a dois conjuntos equivalentes corresponde sempre o mesmo número. Ora, suponhamos dados dois números a e b, e sejam A e B dois conjuntos correspondentes a a e b respectivamente. Diremos que a e b são iguais ou que representam o mesmo número, se A for equivalente a B. Indicaremos, abreviadamente, a igualdade dos dois números a e b da seguinte forma:

(1) Note-se que esta correspondência não é biunívoca, pois, se bem que a cada conjunto corresponda um número, a conjuntos deferentes pode corresponder o mesmo número, bastando para isso que êles sejam equivalentes.

$$a = b.$$

A igualdade de números goza das seguintes propriedades:

1) Reflexiva: $a = a$. Se A é o conjunto correspondente de a, como a equivalência goza da propriedade reflexiva, A será equivalente a si próprio. A conjuntos equivalentes correspondendo sempre o mesmo número, $a = a$.

2) Simétrica: Se $a = b$, $b = a$. Essa propriedade segue-se imediatamente da definição de correspondência, pois, quando estudamos a correspondência entre dois conjuntos vimos que a cada elemento de um deles corresponde um e um só elemento do outro, e reciprocamente. É essa reciprocidade que estabelece a simetria da igualdade.

3) Transitiva: Se $a = b$ e $b = c$, $a = c$. A transitividade da igualdade é uma consequência da transitividade da equivalência dos conjuntos, como fàcilmente se verifica.

5. Examinamos, no n.º 2, o caso da correspondência biunívoca entre dois conjuntos, mas, voltando às considerações iniciais do estudo de uma correspondência, vemos que pode muito bem acontecer que uma correspondência entre dois conjuntos A e B não seja biunívoca, isto é, pode acontecer que, estabelecida uma correspondência entre os dois conjuntos, exista em um dêles elementos não marcados.

Para fixar bem as idéias, suponhamos que todos os elementos de A estejam marcados, mas que existam em B elementos não marcados. Os elementos marcados de B formarão tambem um conjunto C que é uma parte do conjunto B, e recordando a definição de equivalência entre conjuntos, vemos que A é equivalente ao conjunto C, isto é, A é equivalente a uma parte de B. Nesse caso, existem em B, mais elementos do que em A, o que exprimiremos dizendo que o número de elementos de B é maior que o número de elementos de A ou então que o número de elementos de A é menor que o número de elementos de B. Se a é o número de elementos de A, e b o de B, $a > b$ indica abreviadamente que a é maior do que b e $a < b$ que a é menor do que b.

As relações:

$$a > b \qquad \text{ou} \qquad a < b$$

chamam-se desigualdades e gozam das seguintes propriedades:

1) *Assimétrica*: se $a > b$, $b < a$. Essa propriedade segue-se imediatamente a definição.

2) *Transitiva*: se $a < b$ e $b > c$, então $a < c$. Sejam A, B e C três conjuntos correspondentes respectivamente aos números a, b e c. De acôrdo com as hipóteses, A é equivalente a uma parte B_1 de B e B_1 é equivalente a uma parte C_1 de C, portanto, pela propriedade transitiva da equivalência, A é equivalente a C_1, que é parte de C, o que, de acôrdo com a definição dada, significa que $a < c$.

Esta propriedade vale tambem para a relação $>$, pois, de acôrdo com a primeira propriedade podemos escrever, desde que valha a segunda propriedade: se $a > b$ e $b > c$, $a > c$.

É tambem facil verificar que a 2.ª propriedade pode tambem ser enunciada do seguinte modo: se $a > b$ e $b \geqslant c$, $a > c$, ou ainda se $a < b$ e $b \leqslant c$, $a < c$, indicando o símbolo $\leqslant$ menor ou igual e o símbolo $\geqslant$ maior ou igual.

Introduzidas as noções de igualdade e desigualdade é facil verificar que "se a e b são dois números, ou $a > b$, ou $a = b$, ou $a < b$.

I. ADIÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, sem elementos comuns, formemos o conjunto C dos objetos contidos em A e B, isto é, aos elementos do conjunto A, juntemos os elementos do conjunto B de modo a formar um só conjunto C. Se a e b são respectivamente os números correspondentes aos conjuntos A e B, e s o número correspondente a C, dizemos que c é a soma dos números a e b, o que representamos abreviadamente por

$$a + b = c.$$

Os números a e b chamam-se parcelas e o número c soma. Ao conjunto C, chamamos conjunto soma, e à operação mediante a qual obtemos a soma c, adição.

Da definição de adição seguem-se imediatamente as seguintes propriedades:

1) A soma c é única, isto é, a adição não dá números diferentes como soma de dois números dados. (2)

(2) Quando for necessário colocaremos $a + b$ entre parênteses para indicar a soma dos números a e b,

Desta propriedade e da noção de conjunto decorre facilmente que se $a = b$, $a + c = b + c$, e tambem, se $a = b$ e $c = d$, $a + c = b + d$.

2) Formemos o conjunto C juntando os elementos de B aos elementos de A. E' claro que se tivessemos juntado os elementos de A aos elementos de B, teríamos obtido o mesmo conjunto C. Ora, se no primeiro caso dizemos que c é a soma $a + b$, vemos, no segundo, que a soma $b + a$ é tambem c. Daí a propriedade da adição:

$$a + b = b + a$$

que chamamos de propriedade comutativa.

3) Tomemos os números *a*, *b* e c e sejam A, B, C os conjuntos correspondentes. Formemos a soma $(a + b)$ e a ela adicionemos c. Teremos como resultado a soma:

$$(a + b) + c,$$

obtida juntando os elementos do conjunto com os elementos do conjunto soma de A e B. Ora, se juntássemos os elementos de A aos elementos do conjunto soma de B e C, obteríamos o mesmo conjunto, mas devido à maneira de se efetuar a adição, teríamos obtido a soma:

$$a + (b + c)$$

a qual tendo como conjunto correspondente ao mesmo conjunto que corresponde ao número $(a + b) + c$, será igual a esta soma, isto é,

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \qquad (1)$$

A propriedade da adição expressa por (1) é chamada propriedade associativa, e exprime que a soma dos números *a*, *b* e c é independente da ordem em que a efetuamos, e por essa razão sempre que não houver perigo de dúvida, a indicaremos sem os parênteses.

A propriedade associativa estende-se sem dificuldade a um número qualquer de parcelas, o que poderá ser verificado como exercício.

A essas propriedades já estudadas, podemos acrescentar as seguintes que envolvem desigualdades:

4) Uma soma é maior do que qualquer parcela. Sejam *a*, *b* e c os três números cujos conjuntos são respectivamente A, B e C. À soma $a + b + c$ corresponde o conjunto soma de A, B e C que, sendo obtido pela reunião dos elementos de dois conjuntos a um terceiro, contem evidentemente mais objetos do que qualquer deles, pois cada um deles é parte do conjunto soma. Portanto,

$$a + b + c > a.$$

5) Se $a > b$, *a* é a soma de *b* e de um outro número *c*. De fato, se $a > b$ e se A e B são os conjuntos correspondentes de *a* e *b*, B está em correspondência biunívoca com uma parte de A. Ora, tomemos os elementos de A que não têm correspondentes em B. Êsses elementos formam um conjunto C ao qual corresponde um número c. Juntando a B o conjunto C obteremos o próprio conjunto A, donde

$$a = b + c.$$

6) Se $a > b$ e c é um terceiro número qualquer, $a + c > b + c$. Como $a > b$, existe, de acôrdo com a propriedade 5 um número *d* tal que

$$a = b + d$$

e então, pela propriedade 1, somando c a ambos os membros dessa igualdade, vem

$$a + c = (b + d) + c$$

e aplicando as propriedades comutativa e associativa,

$$a + c = (b + c) + d$$

donde, pela propriedade 4

$$a + c > b + c$$

como queríamos demonstrar.

Com o auxílio dessas propriedades poderemos demonstrar tôdas as propriedades da adição. Afim de dar uma idéia de como se deve proceder demonstraremos as duas seguintes:

Se $a + c < b + c$, $a < b$. De fato, se não fosse $a < b$, teríamos $a > b$ ou $a = b$, e, de acôrdo com as propriedades 2 e 6 teríamos nesses casos, ou $a + c > b + c$ ou $a + c = b + c$, ao contrário da hipótese.

Se $a > b$ e $c > d$, $a + c > b + d$. De $a > b$ temos, de acôrdo com a 6.ª propriedade, $a + c > b + c$ e de $c > d$, $b + c > b + d$, donde pela propriedade transitiva das desigualdades

$$a + c > b + d.$$

Como dissemos, as bases dos sistemas de numeração são dadas em geral no sistema decimal. Então, para passar de um sistema de base a para o sistema de base a', é suficiente passar a' para a base a e depois com o processo das divisões sucessivas efetuadas na base a, como explicamos no início dêste capítulo, passar o número para a base a'.

Exemplo: Passar o número $45\,\alpha\,3\,\beta_{(12)}$ para a base 7.

Como 7 na base doze é êle próprio, teremos

```
45α3β(12) | 7
41        |-------
------    7823 | 7
 4α       7    |-------
 48       ----  1120 | 7
 -----    08    7    |-------
  13      7     ----- 1α6 | 7
  12      ----  62    17  |-------
  -----    12   5α    -----  36 | 7
  1β       12   ----  36     36 |------
  17       ---- 40    36     ----   6
  -----    03   36    ----    0
    4           ----   0
                 6
```

donde temos

$$45\,\alpha\,3\,\beta_{(12)} = 600634_{(7)}$$

UNIDADE II

A DIVISIBILIDADE NUMÉRICA

DIVISIBILIDADE

§ *1.º* — *Teoremas gerais sôbre divisibilidade*

1. Quando estudamos a divisão definimos múltiplos e divisores de um número. Entretanto, como nesta unidade vamos estudar as suas propriedades, é conveniente recordar as definições.

Um número a chama-se múltiplo de um número b, quando existe um número q tal que

$$a = b \cdot q \tag{1}$$

e quando a é múltiplo de b, diremos tambem que b é um divisor de a.

As próprias definições deixam claro que se a é múltiplo de b, êle é tambem múltiplo de q ou que q é tambem um divisor de a, de modo que as noções de múltiplo e divisor se correspondem, sendo os teoremas demonstrados para os divisores, depois de feitas convenientes modificações, válidos tambem para os múltiplos.

Demonstraremos os teoremas relativos aos divisores e nos limitaremos a enunciar os correspondentes aos múltiplos, constituindo ótimo exercício as suas demonstrações, que serão conseguidas repetindo as que forem dadas com as modificações necessárias para que sejam válidas para os múltiplos.

Teorema 1 — Todo número divisível pelo produto de dois outros é tambem divisível por cada um deles.

Sejam a e b dois números e m um número qualquer divisível pelo produto $a\ b$. Ora, m sendo divisível por $a.b.$, existirá um número q tal que

$$m = (a \cdot b) \cdot q \tag{2}$$

e, pela propriedade associativa da multiplicação,

$$m = a.(b.q)$$

o que, por definição, significa que m é divisível por a.

Com o auxílio das propriedades comutativa e associativa da multiplicação, viria tambem de (2)

$$m = b.(a.q)$$

isto é, *m* é divisível por *b*.

O teorema relativo aos múltiplos pode ser enunciado do seguinte modo: Todo múltiplo do produto de dois números é tambem múltiplo de cada um deles.

Êsses teoremas se estendem aos produtos com um número qualquer de fatores e as demonstrações se fazem de modo semelhante.

Teorema 2 — Todo número que divide um divisor de um número, divide tambem êsse número.

Suponhamos que o número *a* seja divisível pelo número *b* e que *b* seja divisível por um terceiro número c. Devemos demonstrar que *a* é divisível por c. Por definição,

$$a = b.q_1 \qquad e \qquad b = c.q_2 .$$

Substituindo na primeira igualdade *b* pelo valor dado pela segunda, temos

$$a = (c.q_2).q_1$$

que, pela propriedade associativa da multiplicação, pode ser escrita

$$a = c.(q_1.q_2)$$

isto é, *a* é divisível por c.

Correspondentemente, temos o seguinte teorema para os múltiplos: Todo múltiplo de um múltiplo de um número é tambem múltiplo dêsse número.

Teorema 3 — Se os membros de uma igualdade forem ambos divisíveis por um número diferente de zero, dividindo-os por êsse número obtem-se uma igualdade entre os quocientes.

Se os membros c e *d* da igualdade

$$c = d$$

forem divisíveis por $b \neq 0$, podemos por definição escrever

$$c = b.q_1 \qquad e \qquad d = b.q_2$$

e, como c = d, virá

$$b.q_1 = b.q_2$$

Subtraindo bq_2 de ambos os membros, teremos

$$bq_1 - bq_2 = 0$$

ou seja

$$b(q_1 - q_2) = 0$$

de onde, como $b \neq 0$,

$$q_1 - q_2 = 0$$

e, adicionando q_2 a ambos os membros, vem

$$q_1 = q_2 .$$

Com relação aos múltiplos, o teorema seria o seguinte: Podemos multiplicar os dois termos de uma igualdade por um mesmo número, que ela se mantem para êsses múltiplos, teorema êsse já demonstrado quando estudamos a multiplicação.

2. Um número é divisor comum de vários outros, quando é divisor de cada um deles, e analogamente, um número é múltiplo comum de vários outros, quando é múltiplo de cada um deles.

Os divisores e múltiplos comuns de vários números gozam de propriedades importantes das quais uma delas é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 4 — Um divisor comum de dois números é tambem divisor da soma e da diferença dêsses números.

De fato, seja c divisor comum dos números *a* e *b*. Por definição temos

$$a = c.q_1 \qquad e \qquad b = c.q_2 \qquad (3)$$

Adicionando membro a membro essas igualdades, virá

$$a + b = c.q_1 + cq_2$$

e, supondo $a \geqslant b$, virá subtraindo a segunda da primeira das igualdades (3)

$$a - b = c.q_1 - c.q_2$$

ou seja

$$a + b = c.(q_1 + q_2)$$

$$a - b = c.(q_1 - q_2).$$

Estas duas igualdades mostram que $a + b$ e $a - b$ são divisíveis por c.

Analogamente, poderíamos dizer que: Um múltiplo comum de dois números é tambem múltiplo de sua soma e de sua diferença.

Êsses teoremas, como veremos, terão grande aplicação em seguida.

§ 2.º — *Caracteres de divisibilidade*

1. Uma questão que se apresenta frequentemente na Aritmética prática é a verificação da possibilidade de um número dado *a* ser divisível por um outro número *b*. Não se pode resolver essa questão de um modo geral a não ser efetuando a divisão. Mas, podemos indicar algumas regras simples que permitirão reconhecer se um número é ou não divisível pelos primeiros números da série natural. Essas regras tomam o nome de caracteres de divisibilidade e simplificam bastante inúmeras questões.

Antes de passarmos a expôr os caracteres de divisibilidade, observemos que poderíamos obter caracteres para qualquer número, mas a sua pouca utilidade e desvantagem de se multiplicar regras sem valor prático, nos aconselha a restringí-los, como é costume, apenas aos números, 2, 3, 5, e 11. No entanto, o método que vamos obtê-los é geral, e como exercício poderão os leitores determinar os caracteres relativos a outros números. Importa, porém, observar que êles não são práticos a não ser para números muito grandes, donde a necessidade de se efetuar de fato a divisão.

Tomemos um número N. Vimos no estudo dos sistemas de numeração, que podemos escrever êsse número da seguinte forma:

$$N = r_0.10^n + r_1.10^{n-1} + \dots + r_{n-1}.10 + r_n.$$

O número 10 é divisível por 2, porque $10 = 2.5$. Logo, se o número N for divisível por 2, o número

$$r_n = N - (r_0.10^n + r_1.10^{n-1} + \dots + r_{n-1}.10)$$

que tambem se pode escrever

$$r_n = N - 10.(r_0.10^{n-1} + r_1.10^{n-2} + \dots + r_{n-1})$$

deverá tambem ser divisível por 2. Reciprocamente, se r_n for divisível por 2, como 10 é divisível por 2, o número N como soma de parcelas divisíveis por 2 tambem será divisível por 2.

De onde, um número N será divisível por 2, se o algarismo das unidades for divisível por 2, ou, em outras palavras, se o número for par.

Divisibilidade por 3 — Seja:

$$N = r_0.10^n + r_1.10^{n-1} + \dots + r_{n-1}.10 + r_n$$

o número dado. Dividindo 10 por 3, teremos

$$10 = 3.3 + 1$$

de onde tiramos

$$10^2 = 10.3.3 + 10$$

ou

$$10^2 = 30.3 + 3.3 + 1$$

ou seja,

$$10^2 = 33.3 + 1.$$

Vemos que o resto da divisão por 3 dos números 10 e 10^2 é 1. Generalizando, vamos mostrar que o resto da divisão por 3 de qualquer potência de 10 também é 1. De fato, suponhamos que o resto da divisão de 10^{n-1} por 3 seja 1, isto é, que

$$10^{n-1} = q.3 + 1.$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 10, virá

$$10^n = 10.q3 + 10$$

o que podemos escrever

$$10^n = (10.q + 3).3 + 1.$$

Essa igualdade mostra que o resto da divisão de 10^n por 3 é 1.

Assim sendo, se o resto da divisão de uma potência de 10 for igual a 1, segue-se -- pelo que acabamos de demonstrar -- que o resto da divisão por 3 da potência seguinte de 10 é também 1. Ora, como já vimos que o resto da divisão de 10 e 10^2 por 3 é 1, segue-se que o resto da divisão por 3 de uma qualquer potência de 10 é tambem 1.

Isto posto, seja o número

$$N = r_0.10^n + r_1.10^{n-1} + \dots + r_{n-1}.10 + r_n$$

donde, aplicando as expressões acima, tiramos

$$N = 3.(r_0q + r_1q_1 + \dots + r_{n-1}.3 + r_n) + (r_0 + r_1 + \dots + r_n)$$

ou

$$r_0 + r_1 + \dots + r_n = N - 3(r_0q + r_1q_1 + \dots + r_{n-1}.3 + r_n).$$

O segundo termo do segundo membro dessa igualdade é divisível por 3, de forma que se o número N for divisível por 3, $r_0 + r_1 \dots + r_n$ como diferença de dois números divisíveis por 3 será tambem divisível por 3. Invertendo o raciocínio vemos que se $r_0 + r_1 + \dots r_n$ for divisível por 3 o número N como soma de dois números divisíveis por 3 tambem o será.

Ora, $r_0 + r_1 + \dots r_n$ é a soma dos algarismos do número N, donde a regra —"Um número N será divisível por 3 se a soma dos seus algarismos tambem o for".

Êsse critério pode ser estendido à divisão por 9 da seguinte maneira: "um número N será divisível por 9 se a soma dos seus algarismos tambem o for".

Divisibilidade por 5 — Como 10 e todas as suas potências são divisíveis por 5, verifica-se facilmente como no caso da divisibilidade por 2 que um número N será divisível por 5 se o algarismo das unidades for divisível por 5, isto é, se o número terminar por 0 ou 5.

Divisibilidade por 11 — O número 10 póde ser escrito da forma

$$10 = 11 - 1.$$

Do mesmo modo, multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 10, virá

$$10^2 = 11.10 - (11 - 1)$$

isto é

$$10^2 = 11.10 - 11 + 1$$

ou

$$10^2 = 11.9 + 1.$$

Multiplicando ambos os membros dessa nova igualdade por 10, virá

$$10^3 = 11.90 + 10 = 11.90 + 11 - 1$$

o que dará

$$10^3 = 11.91 - 1.$$

Êsses três exemplos são suficientes para nos mostrar que quando o expoente de uma potência de 10 for um número ímpar, $2_n + 1$, podemos escrevê-la da seguinte forma

$$10^{2n+1} = 11.q_1 - 1$$

e, quando um número par, 2_n,

$$10^{2n} = 11.q_2 + 1.$$

Ora, quando *n* é par, $(-1)^n = (-1)^{2m} = +1$, e quando ímpar, $2^n + 1$ 2^m $(-1)^n = (-1)2^{m+1} = -1$, de onde podemos dizer em geral que

$$10^n = 11.q + (1)^n.$$

Verificamos essa expressão quando $n = 1, 2,$ e 3, portanto, teremos demonstrado em geral, caso demonstremos que sendo verificada para uma potência de 10, ela tambem será válida para a potência seguinte. Essa demonstração é facil de ser feita, bastando para isso multiplicar a expressão 10^n por 10, o que dá

$$10^n = 11 \,.\, q + (-1)^n.$$

e, como $10 = 11 - 1$, vem

$$10^{n+1} = 11.10.q + (-1)^n\,(11-1)$$

donde

$$10^{n+1} = 11\,[10.q + (-1)^n] + (-1)^{n+1}$$

e, chamando $[10.q + (-1)^n]$ de $\bar{q}$, vem

$$10^{n+1} = 11.\bar{q} + (-1)^{n+1}$$

como queríamos demonstrar.

Seja agora o número:

$$N = r_0.10^n + r_1.10^{n-1} + \dots + r_{n-1}.10 + r_n \qquad (1)$$

Como $10 = 11 - 1$, $10^2 = 11.9 + 1, \dots, 10^n = 11.q + (-1)^n$, virá, substituindo essas potências de 10 em (1)

Para construí-lo basta retirar da série natural dos números os múltiplos de 2, 3, 5 e 7 pois $11 < 100 < 11^2$.

Estudada a decomposição de um número em seus fatores primos, torna-se facil a determinação dos divisores de um número. De fato, seja N êsse número e

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \; p_r^{\alpha_r}$$

a sua decomposição em fatores primos. Fazendo todos os produtos possíveis dos fatores primos e dêstes elevados a um expoente menor ou igual ao expoente com que aparecem na decomposição de N obteremos evidentemente todos os seus divisores, pois, um divisor qualquer de N deve somente conter fatores primos que são contidos em N com expoentes menores ou iguais aos que aparecem em N.

Um método prático para a determinação de todos os divisores de um número N é por exemplo o seguinte. Seja o número $156 = 2^2.3.13$.

Escrevemos numa linha os números

$$1, \quad 2, \quad 2^2$$

e os multiplicamos por 1 e 3. Virá

$$1.3, \quad 1.2, \quad 1.2^2, \quad 2.3, \quad 2^2.3.$$

Os números dessa linha multiplicamos por 1 e 13, donde

$$1, \; 1.2, \; 1.2^2, \; 2.3, \; 2^2.3, \; 1.13, \; 2.13, \; 2.3.13, \; 2^2.3.13$$

ou seja

$$1, \; 2, \; 4, \; 6, \; 12, \; 13, \; 26, \; 52, \; 78, \; 156$$

que são todos os divisores de 156.

A decomposição de um número em seus fatores primos, facilita tambem a determinação do máximo divisor comum de dois números e do mínimo múltiplo comum.

Se a e b são os dois números dados, o máximo divisor comum deverá evidentemente conter os fatores primos comuns a a e b, elevados a um expoente tal que a potência de cada um dos fatores primos seja um divisor comum de a e b, o que quer dizer que o expoente de cada fator primo é o menor expoente com que êle aparece na decomposição de a ou de b.

Da mesma forma, o mínimo múltiplo comum de dois números deverá conter os fatores primos comuns a a e b elevados ao maior expoente com que aparece na decomposição de um deles.

Essas afirmações são de facil verificação, o que deixamos aos leitores.

UNIDADE III

OS NÚMEROS RACIONAIS

NÚMEROS RACIONAIS

§ *1.º* — *Números racionais absolutos. Operações.*

I. CONCEITO

Chama-se número racional absoluto a todo par ordenado de números inteiros absolutos,[1] com o segundo diferente de zero.

O primeiro número do par chama-se numerador e o segundo, denominador. O denominador é sempre diferente de zero.

Se o numerador não for múltiplo do denominador o número racional chama-se fracionário, ou fração ordinária ou simplesmente fração. No caso contrário, isto é, quando o numerador é múltiplo do denominador, o número dado chama-se racional inteiro, denominação que, conforme veremos mais tarde, é plenamente justificada.

Representa-se um número racional[2] pela notação $\dfrac{a}{b}$ que se lê: *a* sôbre *b*, na qual *a* é o numerador e *b* o denominador. Por comodidade tipográfica costuma-se usar tambem a notação a/b.

II. IGUALDADE

Dois números racionais são iguais quando são iguais os produtos do numerador de cada um pelo denominador do outro.

Assim serão iguais os números $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ se $a.d = b.c$.

---

(1) Damos o nome de números inteiros absolutos ao zero e aos números naturais.

(2) Sempre que nos referirmos a números racionais ou a números inteiros deve subentender-se o qualificativo "absolutos".

São iguais os números $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ porque $3.8 = 4.6$.

Dados dois números racionais iguais, se os denominadores forem iguais, serão tambem iguais os numeradores e, nversamente, se forem iguais os numeradores, serão tambem iguais os denominadores.

Realmente, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $b = d$, da igualdade $a.d = b.c$ resulta $a = c$; e se $a = c$, de $a.d = b.c$, resulta $b = d$.

A denição de igualdade, que acabamos de dar, goza das seguintes propriedades:

I) reflexiva: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

II) simétrica: se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

III) transitiva: se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$, $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

As duas primeiras são imediatas, com a aplicação das propriedades de igual nome, relativas à igualdade de números naturais, e das propriedades relativas ao número zero.

Demonstremos a propriedade transitiva.

Com efeito, de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ tiramos, por definição, respectivamente: $ad = bc$ e $cn = md$ e, aplicando à propriedade uniforme da multiplicação de números naturais, $adcn = cbmd$, de onde, suprimindo os fatores comuns a ambos os membros [3], obtemos $an = mb$, o que demonstra, precisamente, a igualdade dos números $\frac{a}{a}$ e $\frac{m}{n}$.

(3) Se $a = o$, vê-se imediatamente que $c = o$ e $m = o$. E, pois, $an = mb = o$.

Teorema 1 — Um número racional é igual ao número racional que se obtem multiplicando numerador e denominador por um mesmo número natural.

Realmente, sendo $\frac{a}{b}$ um número racional e m um número natural, dizer que $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$ significa dizer que $abm = amb$, e esta igualdade é verdadeira, pela propriedade comutativa da multiplicação de números naturais.

Teorema 2 — Um número racional é igual ao número racional que se obtem dividindo numerador e denominador por um seu divisor comum.

Com efeito, sendo $\frac{a}{b}$ um número racional e d um divisor comum de a e b, dizer que $\frac{a \div d}{b \div d} = \frac{a}{b}$ significa que $(a:d)b = a(b:d)$, o que é verdade, pelo que vimos na teoria dos números naturais.

III. SIMPLIFICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Simplificar um número racional significa encontrar um outro número racional que lhe seja igual e no qual o numerador e o denominador sejam respectivamente menores do que os do primeiro.

O teorema 2 permite efetuar essa operação, quando existe, naturalmente, um divisor comum ao numerador e denominador. Por exemplo, pode-se substituir $36/72$ por $6/12$. Êste novo número pode ser substituido por $1/2$, por exemplo. A simplificação de um número racional pode fazer-se sempre que o numerador e o denominador não sejam primos entre si, com a aplicação do teorema 2.

IV. FRAÇÃO IRREDUTIVEL

Pelo teorema 1 vemos que se multiplicarmos numerador e denominador de uma fração por um mesmo número natural, obtemos uma fração igual à fração dada. A recíproca, porém, não é verdadeira. Para prová-lo basta dar um exemplo: $4/6$ e $6/9$ são duas frações iguais, pois que $4 \,.\, 9 = 6 . 6$ e o numerador e o denominador de uma delas não são equimúltiplos do numerador e denominador da outra.

Demonstraremos, contudo, o seguinte

Teorema 3 — Tôda fração igual a uma fração que tem o numerador e o denominador primos entre si, tem o numerador e o denominador equimúltiplos dos da primeira.

Com efeito, sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n}$ as duas frações dadas, sendo m e n primos entre si. Devemos provar que $a = mq$ e $b = nq$, sendo q um número natural.

Ora, sendo n um fator de an e $an = bm$, n divide bm, e como é primo com m, n divide b. Seja então $b = nq$. Substituindo b por nq, obtemos

$an = nqm$, ou, suprimindo o fator comum n,

$a = qm$, isto é, a e b são equimúltiplos de n e m como queríamos provar.

Chama-se fração irredutível a fração em que o seu numerador e o seu denominador são primos entre si. Justifica-se a denominação pelo fato de ser impossível encontrar uma outra fração, de numerador e denominador respectivamente menores, igual a uma fração irredutivel.

V. REDUÇÃO AO MESMO DENOMINADOR

Reduzir dois ou mais números racionais ao mesmo denominador é encontrar outros tantos números racionais que sejam respectivamente iguais aos números dados e que tenham os denominadores iguais entre si.

Sejam os números $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$; multipliquemos o numerador e o denominador de cada um pelo produto dos denominadores dos outros dois; vem

$$\frac{adn}{bdn}, \quad \frac{cbn}{dbn}, \quad \frac{mbd}{nbd}$$

e, êsses números, pelo teorema 1, são iguais, respectivamente, aos números $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$, e têm todos o mesmo denominador.

Com êsse processo, porém, principalmente quando se trata de muitos números, somos conduzidos a operar com números muito grandes.

Sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$ três números racionais e M o mínimo múltiplo comum dos denominadores. Pelo que já foi visto na teoria do mínimo múltiplo comum, M, em geral, é menor do que o produto $b.d.n$. É facil, então, transformar cada número em outro igual e que tenha M como denominador, bastando, para isso, multiplicar numerador e denominador do número dado, pelo quociente de M pelo denominador do número dado.

Com efeito,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times (M \div b)}{b \times (M \div b)} = \frac{a \times (M : b)}{M}.$$

VI. DESIGUALDADE

Dados dois números racionais, diz-se que o primeiro é maior do que o segundo, se o produto do numerador do primeiro pelo denominador do segundo é maior do que o produto do denominador do primeiro pelo numerador do segundo.

Assim, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ se $a.d > b.c$, $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ porque

No caso particular de possuirem ambos os números os denominadores iguais, isto é, se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ e $b = d$, da desigualdade $a.d > b.c$, se deduz $a > c$, isto é, o maior número terá maior numerador. E, analogamente, se os numeradores forem iguais, deduz-se que o menor número terá maior denominador.

VII. ADIÇÃO

Dados dois ou mais números racionais, chama-se soma desses números ao número racional que tem para denominador o produto dos denominadores dos números dados e para numerador a soma dos produtos de cada numerador pelos denominadores dos restantes números.

Os números dados chamam-se parcelas e adição é a operação que tem por objeto determinar a soma. Indica-se uma soma escrevendo as parcelas umas em seguida às outras e separadas pelo sinal $+$.

Assim, se $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{p}{q}$ são as parcelas, a soma será

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{p}{q} = \frac{adq + cbq + pbd}{bdq}$$

A adição de números racionais goza das seguintes propriedades:

1) uniforme;

2) comutativa;

3) associativa;

4) monotônica.

A propriedade uniforme pode enunciar-se assim:

Somando os primeiros membros de duas ou mais igualdades e somando os segundos membros, as duas somas são iguais.

Vamos fazer a demonstração para o caso de duas igualdades, mas, como a demonstração não vai depender do número delas, será geral.

Sejam

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}, \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Provaremos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}$$

ou que

$$\frac{ad + cb}{bd} = \frac{pn + mq}{qn}$$

se mostrarmos que

$$(ad + cb)\, qn = (pn + mq)\, bd\,.$$

Com efeito, das igualdades (1) tiramos

$$aq = pb\,, \qquad cn = md$$

e, multiplicando ambos os membros da primeira por *dn* e os da segunda igualdade por *bq*, vem:

$$aqdn = pbdn\,, \qquad cnbq = mdbq$$

Somando membro a membro estas duas igualdades, obtemos

$$aqdn + cnbq = pbdn + mdbq$$

ou pondo em evidência *qn* no primeiro membro e *bd* no segundo,

$$(ad + cb)qn = (pn + mq)bd\,,$$

como queríamos provar.

Propriedade comutativa — A soma de números racionais é independente da ordem das parcelas.

Mostremos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Com efeito,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{cb + ad}{db}$$

Mas $cb + ad = ad + cb$ e $bd = db$ (propriedades dos números inteiros).

Portanto:

$$\frac{ad + cb}{bd} = \frac{cb + ad}{db}$$

de onde

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

Propriedade associativa — Numa soma de números racionais podemos substituir dois ou mais dêles pela sua soma efetuada.

Demonstremos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{p}{q} = \frac{a}{b} + \frac{cq + pd}{dq} \qquad (2)$$

Efetuando as somas indicadas, vem

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\ \frac{p}{q} = \frac{adq + cbq + pbd}{bdq}.$$

e

$$\frac{a}{b} + \frac{cq + pd}{dq} = \frac{adq + cqb + pdb}{bdq}$$

Mas, pelo que vimos sôbre os números inteiros,

$$adq + cbq + pbd = adq + cqb + pdb$$

e, portanto, a igualdade (2) é verdadeira e a propriedade fica assim demonstrada.

Propriedade monotônica — Somando o primeiro membro de uma igualdade com o primeiro membro de uma desigualdade e efetuando idêntica operação com os segundos membros, as duas somas constituem uma desigualdade do mesmo sentido que a desigualdade dada, tomando como primeiro membro a soma dos primeiros membros.

Sejam

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{p}{q} > \frac{m}{n} \qquad (3)$$

Mostraremos que

$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} > \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$$

o que equivale a mostrar que

$$\frac{aq + pb}{bq} > \frac{cn + md}{dn}$$

ou

$$(aq + pb)\,dn > (cn + md)\,bq\,.$$

Das relações (3) tiramos

$$ad = bc \quad \text{e} \quad pn > qm$$

ou, multiplicando ambos os membros da igualdade por qn e os da desigualdade por bd,

$$a.d.q.n = b.c.q.n \quad \text{e} \quad p.n.b.d > q.m.b.d.$$

Se $a = 0$, da igualdade $a.d = b.c$ resulta $c = 0$, pois que b, como denominador, é diferente de zero. E, como vimos, a soma de um número natural qualquer com o zero é igual ao número natural dado,

$$a.d.q.n + p.n.b.d = p.n.b.d$$

e

$$b.c.q.n + q.m.b.d = q.m.b.d$$

e, portanto,

$$a.d.q.n + p.n.b.d > b.c.q.n + q.m.b.d\,.$$

Se $a \neq 0$, e consequentemente, $c \neq 0$, pela propriedade monotônica dos números naturais, obtemos novamente

$$a.d.q.n + p.n.b.d > b.c.q.n + q.m.b.d,$$

desigualdade que, pondo em evidência dn no primeiro membro e $b.q$ no segundo, se transforma em

$$(a.q + p.b)\,d.n > (c.n + m.d)\,b.q$$

como se queria provar.

Simplificações na adição — Seja efetuar a soma seguinte

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{m}{n}.$$

UNIDADE VI

O PLANO E A RETA NO ESPAÇO

§ 1.º PRELIMINARES. DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

I. *Preliminares*

Admitimos sem definir os entes: *ponto, reta* e *plano.* Dizemos então que são tres *conceitos primitivos.* Designaremos os *pontos* com letras maiúsculas, A, B, C,...; as *retas* com letras minúsculas, a, b, c,...; os *planos* com letras gregas minúsculas, α, β, γ,...

Um outro ente é o da seguinte

Definição. Chamamos *espaço* à totalidade de todos os pontos.

Iniciaremos o nosso estudo com a enumeração de oito propriedades intuitivas que dizem respeito aos entes acima introduzidos. [1]

São:

a) A reta tem infinitos [2] pontos.

b) Dois pontos *determinam* uma reta, isto é, por dois pontos *passa uma e uma só* reta.

Nota. Em virtude dêste postulado, uma reta pode ser tambem designada por duas letras maiúsculas, AB.

c) Tres pontos não situados em linha reta (não pertencentes a uma reta) *determinam* um plano, isto é, pelos tres pontos *passa um e um só* plano.

Nota. Um plano pode ser também designado por tres letras maiúsculas, ABC, e que é justificado pela propriedade c.

d) Uma reta, que possue dois pontos num plano, está inteiramente contida nele. [3]

---

(1) Estas propriedades provenientes da experiência ou da observação, porisso, chamadas intuitivas, são designadas com o nome de *postulados* ou *axiomas.* Usaremos sempre a primeira denominação. Os postulados são propriedades admitidas sem demonstração.

(2) A expressão *infinitos pontos* significa aqui a possibilidade de considerarmos tantos pontos quantos quisermos.

(3) Tambem se diz: "a reta pertence ao plano", "a reta e o plano se pertencem", "o plano passa pela reta".

e) **Postulado da divisão do plano.** Uma reta de um plano divide-o em duas regiões, que se chamam *semi-planos* (um se diz *oposto* do outro). A reta é chamada *origem* de cada um dos semi-planos. Um segmento (4) cujas extremidades são dois pontos (5) do mesmo semi-plano não encontra a reta (origem). Se os dois pontos (5) forem de semi-planos opostos, o segmento, cujas extremidades são êsses pontos, encontrará a origem.

f) Um plano tem infinitos pontos.

g) **Postulado da divisão do espaço.** Um plano divide o espaço em duas regiões, cada uma das quais se chama *semi-espaço* (um é o oposto do outro). O plano é a *origem* de ambos os semi-espaços. Um segmento, cujas extremidades são dois pontos (5) d mesmo semi-espaço não encontra o plano (origem). Se os pontos (5) se acharem em semi-espaços opostos, o segmento mencionado encontrará a origem.

h) O espaço tem infinitos pontos.

II. *Determinação de um plano* (6)

Temos quatro casos de determinação de um plano: um é dado pelo postulado *c;* dois são conseqüências dos postulados *c* e *d*; e o último provém da definição de retas paralelas.

(4) Já conhecemos as definições de semi-reta e de segmento, pois a geometria plana é estudada no curso ginasial; entretanto, a título de recordação, lembraremos êsses conceitos.

Semi-reta é qualquer uma das duas partes em que um ponto divide uma reta, chamando-se ao ponto, *origem* de cada uma das semi-retas. Ver figura 1.

Segmento é a parte de uma reta comum a duas semi-retas dessa reta, isto é, tomando-se

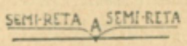

FIG. 1

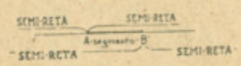

FIG. 2

dois pontos A e B numa reta r, cada um dêles divide r em duas semi-retas: a parte comum a uma semi-reta de origem A e à outra de origem B é o segmento. A e B são as extremidades do segmento. Ver figura 2.

(5) Não da origem.

(6) Um plano está determinado quando os elementos dados permitem concluir a sua *existência* e a sua *unicidade*.

Assim, teremos:

a) **Postulado** c. Tres pontos não situados em linha reta determinam um plano.

b) **Teorema 1.** Um ponto A e uma reta *a* que não se pertencem (isto é, A não está na reta *a*) determinam um plano (7).

DEMONSTRAÇÃO

Com efeito, tomados dois pontos B e C sôbre *a*, os três pontos A, B, C não situados em linha reta, determinam um plano (post. c), o qual contem *a*, porque possue dois pontos B e C da reta *a* (post. *d*) (fig. 3).

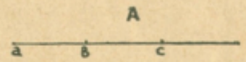

FIG. 3

O plano determinado é único, porque qualquer outro plano, contendo A e *a*, conteria os pontos A, B, C e não poderia ser diferente do já mencionado plano.

c) **Teorema 2.** Duas retas *a* e *b* que se cortam, determinam um plano. (7)

DEMONSTRAÇÃO

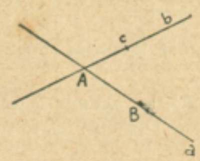

FIG. 4

Tomando-se os pontos B e C respectivamente sôbre as retas *a* e *b*, e considerando-se também o ponto A, encontro de *a* e *b*, teremos pelo postulado *c*, um plano determinado por êsses três pontos A, B, C, o qual contém as retas a e b (postulado *d*) (fig. 4).

O plano é único, pois qualquer outro plano contendo as retas *a* e *b*, também possue os pontos A, B, C e não pode ser diferente do plano já visto.

d) Duas retas *paralelas* determinam um plano.

Sabemos que duas retas co-planares *a* e *b* são paralelas quando não se encontram. Daí, concluímos que a existência das retas paralelas supõe a do plano delas.

Êsse plano é único, porque pode ser também julgado como o determinado por uma das retas e um ponto da outra.

É útil conhecer desde já a

(7) Os teoremas 1 e 2 podem ser dados como postulados.

Definição. Duas retas que não estão no mesmo plano, chamam-se *reversas.* [8]

Nota. Os casos de determinação do plano justificam as seguintes designações de um plano: plano ABC, se determinado por três pontos; plano Aa, se por um ponto A e uma reta *a;* plano ab, se por duas retas *a* e *b*.

Nota. Para fixar as idéias, representam-se, nas figuras que acompanham as demonstrações das propriedades, os planos por uma sua parte, limitada por uma linha fechada. Usa-se muito o paralelograma.

EXERCÍCIOS

§ 1.°

1. Porque assentam sempre perfeitamente as mesas com três pernas e não as com quatro? *Sugestão:* postulado c.

2. O espaço tem tantas retas ou tantos planos quantos desejarmos. Justificar. *Sugestão:* aplicar postulados b, c e h.

3. O plano tem tantas retas quantas desejarmos. Justificar. *Sugestão:* aplicar postulados d e f.

4. Por uma reta passam tantos planos quantos desejarmos. Justificar. *Sugestão:* aplicar o teorema 2 e postulado h.

5. Verificar que por dois pontos passam tantos planos quantos desejarmos. Justificar. *Sugestão:* conseqüência do exerc. 4.

6. Um quadrilátero reverso (isto é, cujos vértices não se acham num mesmo plano) não pode ser um paralelograma. *Sugestão:* Usar a letra *d* do n.° II e o postulado *d* do n.° I.

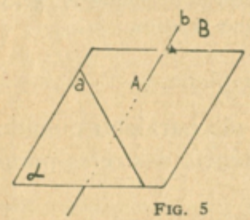

FIG. 5

(8) A existência de retas reversas é fácil de ver: é suficiente considerar a reta *a*, num plano α (fig. 5) e a reta b determinada por um ponto A de α, não pertencente à *a*, e um ponto B qualquer do espaço, fora de α. Observe-se ainda que essas retas não têm ponto comum, porque nesse caso elas determinariam um plano que as conteria, contra a definição.

§ 2.° — INTERSECÇÃO DE DOIS PLANOS

Vamos agora examinar a natureza do ente comum a dois planos α e β. Para êste fim, demonstraremos o

Teorema 3. Dois planos que têm um ponto comum, têm uma reta comum passando pelo ponto.

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos dois planos α e β e o ponto comum A (fig. 6). Provaremos que há uma reta comum aos planos α e β por A.

α divide o espaço em dois semi-espaços I e II (post. g) e β tem uma parte em cada um dêsses semi-espaços. Escolhemos então dois pontos B e C em β, respectivamente nos semi-espaços I e II, e de modo que A, B e C não fiquem em linha reta. Unindo-se B e C, teremos uma reta BC no plano β (post. d). Pelo postulado g, BC encontra α num ponto D, que evidentemente também é ponto de β. Assim, D é um outro ponto comum aos planos α e β, distinto do A, porque A não está, pela construção, na reta BC. Unindo-se A e D, teremos uma reta AD situada nos dois planos α e β, por ter os pontos A e D quer em α, quer em β (post. d). Não pode haver outro ponto comum aos planos α e β, fora dos da reta BC, senão os planos coincidem (§ 1.° - II - teorema 1).

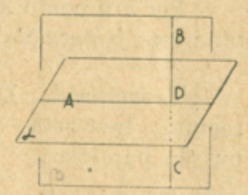

FIG. 6

Definição. À reta comum aos planos α e β chama-se *intersecção* dos dois planos. Tambem chama-se a esta reta de *traço* de α em β ou de β em α.

Nota. Uma reta *r* pode ser designada com a notação $\alpha\beta$, isto é, com as letras que indicam os planos, cuja intersecção é *r*.

§ 3.° — RETAS PARALELAS. ÂNGULOS DE RETAS REVERSAS

I. *Retas paralelas*

A definição de retas paralelas já é conhecida (§ 1.° - II - d).

Vamos examinar como o **Postulado das Paralelas,** visto na geometria plana, estende-se imediatamente ao espaço.

De fato, considerado um ponto A fora de uma reta *a*, a paralela *b* à reta *a*, conduzida por êsse ponto A, devendo ser co-planar com *a*, está no plano Aa determinado pelo ponto A e pela reta *a*, e neste plano vale o postulado das paralelas. Por conseguinte, no *espaço*, também temos a propriedade:

Por um ponto A fora de uma reta a, podemos conduzir sòmente uma reta b paralela à a.

Teorema 4. Dados tres planos que se encontram dois a dois segundo tres retas distintas, ou estas retas passam por um ponto ou são paralelas.

DEMONSTRAÇÃO

Para facilitar a linguagem, chamemos aos planos, α, β, γ; às intersecções, $a \equiv (\beta\,\gamma)$, $b \equiv (\alpha\,\gamma)$ e $c \equiv (\alpha\,\beta)$.

Considerando-se as retas *a* e *b*, por exemplo, vemos que são co-planares, pois $a \equiv (\beta\,\gamma)$ e $b \equiv (\alpha\,\gamma)$ estão no plano γ, como decorre até da própria notação. De modo análogo, c e b são co-planares, bem como *a* e c.

Temos dois casos:

a) Suponhamos em primeiro lugar que *a* e *b* se encontrem em *O* (fig. 7) e provemos que c passa por *O*, intersecção de *a* e *b*. *O* é o encontro de *a* e *b* e então ponto comum de α, β, γ, pois $a \equiv (\beta\,\gamma)$ e $b \equiv (\alpha\,\gamma)$. A veta c é intersecção de α e β e por conseguinte, contém também o ponto *O*. Dêste modo, vemos que c passa pelo encontro de *a* e *b*. Êste ponto *O* é único, pois se houvesse outro ponto *O'* de intersecção das retas *a*, *b*, *c*, a reta *OO'* estaria nos três planos α, β, γ, pois teria dois pontos em cada plano (postulado *d*, § 1.° - I), o que iria contradizer a hipótese.

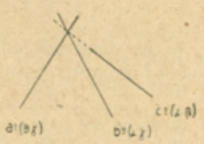

Fig. 7

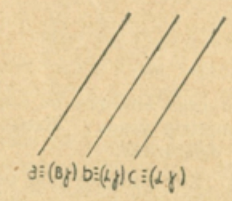

Fig. 8

b) Sejam *a* e *b* paralelas (fig. 8) e provemos que c é paralela à *a* e à *b*. Com efeito, se c não fôsse paralela à $a \equiv (\beta\,\gamma)$, encontraria *a*, porque *a* e c são co-planares (plano β). Neste caso com o raciocínio empregado em *a*), demonstraríamos que *b* passa pela intersecção de *a* e *c*, e então *b* encontraria *a* contra a suposição que estamos fazendo. Logo *a* e c são paralelas, pois são co-planares e não se encontram. Com idêntico raciocínio, pode ser demonstrado que c não encontra *b*, isto é, que c é paralela também à *b*.

Teorema 5. Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

DEMONSTRAÇÃO

Temos dois casos:

a) As três retas são co-planares, e nesta hipótese, é um teorema conhecido de goemetria plana.

b) As três retas não são co-planares, e é o caso que vamos demonstrar, cuja dificuldade está na verificação da co-planaridade das retas.

Sejam então *a* e *b* paralelas à c (fig. 9). Consideremos então o plano β das paralelas *a* e c e o plano α das paralelas *b* e c. Tomemos agora um terceiro plano γ, determinado pela reta *a* e por um ponto *A* de *b*. Êstes três planos se encontram dois a dois segundo três retas distintas, a saber: α e β (c), β e γ (a), α e γ (*b'*). Notemos também que *b'* passa por *A*, e pertence aos planos α e γ, sendo portanto co-planar com as retas c (plano α) e *a* (plano γ). Estamos então em condições de aplicar o teorema 4, isto é, ou as três retas *a*, *b'*, c passam por um ponto, ou são paralelas. Porém, como as retas *a* e c são paralelas, por hipótese, *b'* é também paralela à *a* e à c. Todavia, *b'* não pode passar por *A* e ser paralela à c, salvo que coincida com *b*, pois esta reta, por hipótese, é a parela à c pelo ponto *A*. Neste caso, para não haver contradição, *b'* coincide com *b*, e como *b'* é paralela à *a*, então *b* é paralela à *a*, como queríamos demonstrar.

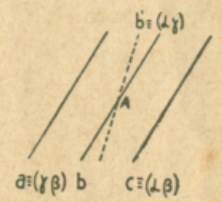

Fig. 9

Teorema 6. Dois ângulos, cujos lados são respectivamente paralelos, são iguais ou suplementares.

DEMONSTRAÇÃO

No caso em que os ângulos sejam co-planares, é um teorema conhecido de geometria plana. Estudemos a hipótese em que os ângulos estejam em planos diferentes.

a) Suponhamos que os ângulos rÂs e r'Â's s' tenham os lados respectivamente paralelos, dirigidos dois a dois no mesmo sentido e demonstremos que são *iguais* (fig. 10).

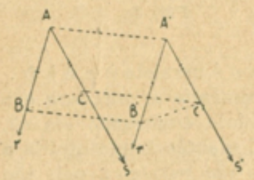

FIG. 10

Tomemos os segmentos AB = A'B' sôbre os lados paralelos *r* e *r'* e AC = A'C' sôbre os lados *s* e *s'*. Unamos A e A', e B', C e C'. O quadrilátero ABB'A' é um paralelogramo, pois os lados opostos AB e A'B' são iguais (construção) e paralelos (hipótese). Daí, concluimos que AA' e BB' são segmentos iguais e paralelos (lados opostos de um paralelogramo). Com idêntico raciocínio, provamos que AA' é igual e paralelo a CC'.

Concluímos então que CC' e BB' são iguais e também paralelos, conforme propriedade transitiva da igualdade de segmentos e teorema 5 dêste §.

Unindo-se C e B, C' e B', o quadrilátero BCC'B' é um paralelogramo, pois têm os lados opostos CC' e BB' iguais e paralelos. Logo os lados BC e B'C' são iguais como lados opostos de um paralelogramo. Dêste modo, os triângulos ABC e A'B'C' são iguais, pois têm os tres pares de lados respectivamente iguais (AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C').

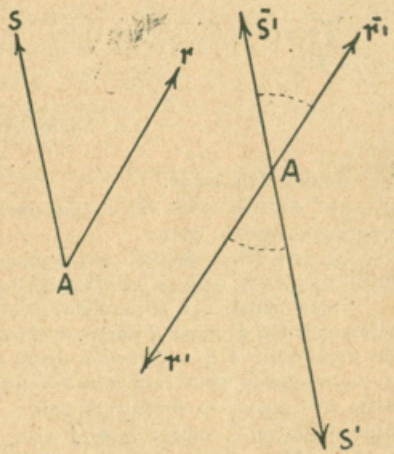

FIG. 11

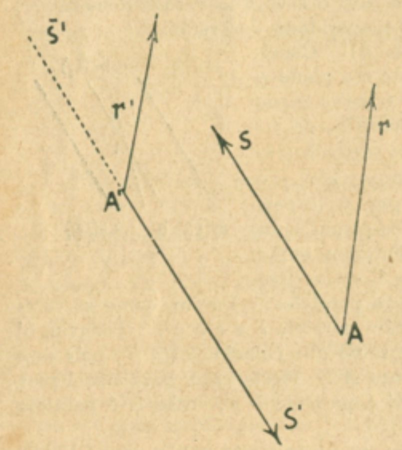

FIG. 12

Os triângulos ABC e A'B'C' sendo iguais, os demais elementos são respectivamente iguais, e então os ângulos BÂC (ou rÂs) e B'Â'C' (ou r'Â's') são iguais como queríamos provar.

b) Sejam os lados *r* e *r'* paralelos, dirigidos em sentido contrário, bem como *s* e *s'*, também, em sentido contrário (fig. 11). Neste caso prova-se que os ângulos são *iguais*. Deixamos a demonstração a cargo do aluno, sugerindo apenas que o ângulo oposto a um dêles (por exemplo, a r'A's' ou seja $\bar{r}'A'\bar{s}'$) ficará com os lados respectivamente paralelos aos de outro e no mesmo sentido, recaindo portanto no caso *a*).

c) Sejam dois lados *r* e *r'* paralelos e dirigidos no mesmo sentido e os dois lados *s* e *s'* paralelos, dirigidos em sentido contrário (fig. 12). Pode-se demonstrar que neste caso são *suplementares*. O aluno poderá demonstrar com a seguinte sugestão: a semi-reta oposta ao lado *s'*, $\bar{s}'$, forma com *r'* um ângulo de lados respectivamente paralelos aos do ângulo rÂs e dirigidos dois a dois no mesmo sentido. Observando-se que os ângulos r'Â's' e $\bar{s}'$Â'r' são suplementares, a demonstração apresenta-se imediatamente.

II. *Ângulo de retas reversas*

Consideremos duas retas reversas *a* e *b* (fig. 13) e estabeleçamos sôbre cada uma um sentido.

Posto isto, demonstremos o seguinte.

Teorema 7. Conduzindo-se por diversos pontos A, B, C, D... semi-retas paralelas à *a* e à *b*, com os mesmos sentidos destas retas, obtemos diversos ângulos de vértices A, B, C, D ... que são iguais.

DEMONSTRAÇÃO

Com efeito, tais ângulos são iguais, porque os seus lados são respectivamente paralelos e dirigidos dois a dois no mesmo sentido (teorema 5 - § 3.º - fig. 13).

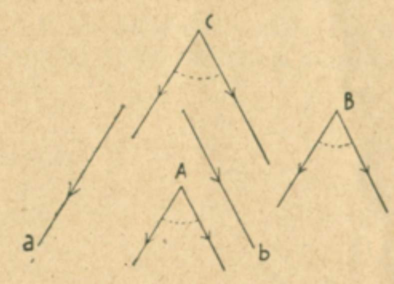

FIG. 13

Com êste teorema justifica-se a

Definição. Ângulo de duas retas reversas (orientadas) é o que se obtém conduzindo por um ponto qualquer, duas semi-retas respectivamente paralelas a essas retas e com a mesma orientação que elas possuem.

Nota. Os pontos A, B, C... podem ser também escolhidos sôbre as retas *a* e *b*.

Preço: Cr.$ 25,00