SERGIO SONNINO - VICTOR MIRSHAWKA

NUMEROS COMPLEXOS

Com 65 exercícios resolvidos - 176 a resolver,

e 35 perguntas

2.ª Edição

LIVRARIA NOBEL S. A.

GH01065

GH01065

Jaime Dilbert
5/64

SERGIO SONNINO - VICTOR MIRSHAWKA

NUMEROS COMPLEXOS

Com 65 exercícios resolvidos - 176 a resolver,

e 35 perguntas

2.ª Edição

LIVRARIA NOBEL S. A.
(A CASA DOS APOSTILAS)
RUA CONSOLAÇÃO, 49
SÃO PAULO

LIVRARIA BRANDÃO "SEBO"
R. Xavier de Toledo, 234 S/L
CEP 01048-000 - São Paulo
Telefones:
3214 - 3325 / 3214 - 3646 / 3214 - 3647
Fax: Ramal 23
www.lbusedbookshop.com.br
oldbook@terra.com.br

INTRODUÇÃO HISTÓRICA - BIBLIOGRAFIA

A discussão da fórmula resolvente da equação de terceiro gráu no chamado "caso irredutível" em que, apesar de aparecer radicais quadráticos negativos tôdas as raízes da equação eram reais, levaram Raffaele Mombelli (Algebra - 1572), a introduzir pela primeira vez os números complexos

Entretanto só dois séculos mais tarde quando Gauss e Argand deram a representação geométrica, os números complexos tornaram-se capítulo essencial da Análise algébrica. A denominação "número complexo" deve-se à Gauss (1832) e o símbolo i tinha sido introduzido anteriormente por Euler em 1777 no seu Istitutiones calculi integralis

A sistematização definitiva e a extensão (teoria dos quaterniões) é devida a Hamilton (1853) e a Grassmann (1862)

ooooooOOOOOOOoooooo

Amaldi, U. - Analise algébrica e infinitesimal

Caraça,B.J. - Conceitos fundamentais da matemática

Caraça,B.J. - Lições de álgebra e analise

Courant,R. - Calculo diferencial e integral

Magarinos,G. - M. Silva Filho - Vestibulares de matemática

Picone e Miranda - Exercícios de análise matemática

Severi, F. - Lezioni de analisi

Serrão,A.N. - Exercícios e problemas de álgebra

Smail,L.L. - College algebra

Stranges,N.A. - Elementos de matemática

Urner,S. e Orange,W.B. - Elements of mathematicae analisys

Tonelli, L. - Analisi infinitesimale
Valério, G. - Números compléxos

§1) GENERALIDADES

A introdução dos números complexos é amplamente justificada pelas possibilidades:
a) de dar significado por exemplo a expressões do tipo $\frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$ que, conforme os velhos livros de algebra, não eram lícitos no campo real.
b) de simplificar o enunciado de muitos teoremas da álgebra (assim como, por exemplo, o teorema: tôda equação algébrica de gráu n admite sempre n raizes reais ou complexas)
c) de representar analiticamente os pontos de um plano.
d) de calcular os logarítmos dos números negativos.
e) de determinar relações entre certas funções transcendentes (e^x, log x, sen x e cos x).
f) de ampliar o campo da análise infinitesimal com o estudo das funções de variável complexa (em analogia com o que foi feito para a variável real).

Em síntese a introdução dos números complexos na álgebra resulta numa ampliação do campo dos números, e para isso é necessário dar significação, para o novo campo, a tôdas as operações que se consideram na álgebra.

Para se chegar a este resultado, consideremos inicialmente dois casos particulares:
1- A equação $x^2 + 1 = 0$, fornece as soluções

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Introduziremos o símbolo i para indicar $\sqrt{-1}$.˙. $i = \sqrt{-1}$, concluindo-se então que a equação citada possui as duas soluções $\pm i$.
2- Consideremos o caso ja citado da fórmula resolutiva da equação do segundo gráu com o discriminante negativo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Noutras palavras as soluções de uma equação do segundo gráu serão expressas por relações do tipo

$$A \pm iB$$ (A e B números reais) que se chama número complexo.

§2) DEFINIÇÕES e PRIMEIRAS PROPRIEDADES

No exemplo que finalizou o parágrafo precedente, acham-se contidos os elementos necessários para uma análise rigorosa dos números complexos.

Tendo-se observado que um número complexo resulta caracterizado (além do novo ente i) por dois números reais, nos é permitido concluir que: "todo número complexo deve ser simbòlicamente associado a pares ordenados (a,b) de números reais e para o novo símbolo devem ter sentido as operações elementares e a relação da igualdade; e, enfim que os números reais resultem um caso particular do novo símbolo definido".

Concluindo dir-se-á "números complexos" aos pares ordenados (a,b) de números reais, que satisfaçam as condições:
1)- de poderem ser somados, dizendo-se soma dos dois números complexos (a,b) e (c,d) ao número complexo $(a,b)+(c,d)=(a+c;b+d)$

2)- de poderem ser multiplicados, dizendo-se produto de (a,b) por (c,d) ao número complexo

(ac-bd; ad+bc) = (a,b) . (c,d)

3)- de poder estabelecer sôbre êles o conceito de igualdade, dizendo-se que (a,b) e(c,d) são iguais se a=c e b=d

4)- de poder dizer que o número real a é idêntico ao número complexo (a,0) portanto

(a,0) = a

Deve-se notar das definições dadas que resulta: a)

a)- a operação de soma é comutativa e associativa.

b)- a operação de multiplicação é comutativa, associativa e distributiva em relação a soma.

c)- a relação de igualdade é simétrica, transitiva e reflexiva; e dois números complexos que não forem iguais dir-se-ão desiguais (não podendo entretanto se afirmar se um número complexo é maior ou menor do que outro).

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se imediatamente:

(1,0) = 1 (0,0) = 0

(0,1) = i (unidade imaginária)

(0,b) = (b,0).(0,1) = bi (imaginário puro)

(a,0)+(0,b) = (a,b) = a+ib

podendo-se de agora em diante utilizar para o número complexo a notação

z=a+ib=(a,b)

§3) CONDIÇÃO de ANULAMENTO do PRODUTO

Demonstraremos que: "condição necessária e suficiente para que o produto de dois números complexos seja nulo, é que um dos fatôres seja nulo".

Com efeito se (a,b)=(0,0) e (c,d) ≠ ≠(0,0) ou (a,b)≠(0,0) e (c,d)=(0,0) de 2) do §2) temos: (a,b).(c,d)=(0,0)

Reciprocamente, se (a,b).(c,d)=(0,0) identicamente de 2) e 3) do §2):

$$\begin{cases} ac-bd=0 \\ ad+bc=0 \end{cases}$$

sistema linear homogeneo de duas equações em duas incógnitas (a e b) cujo determinante do sistema é

$$\Delta = \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = c^2 + d^2$$

Se $\Delta = 0$ e o sistema admitir soluções não nulas (ver §3) de Elementos da Teoria dos Sistemas Lineares de Sergio Sonnino e Victor Mirshawka), deverá ser c=0 e d=0, pois $c^2 \neq -d^2$, sendo c e d reais.

Se $\Delta \neq 0$ a única solução possível do sistema será a solução nula, isto é,

a = 0 e b = 0

§4) COMPLEXOS CONJUGADOS - NORMA - MÓDULO

Dois números complexos dizem-se conjugados quando têm coeficiente real igual e o coeficiente do imaginário igual em valor absoluto, mas de sinal contrário.

Assim o conjugado do número complexo z = (a,b) é $\overline{z} = (a,-b)$.

Entende-se por norma de um número complexo z = a + ib à expressão essencialmente positiva

$$\boxed{a^2 + b^2}$$

Chama-se módulo de um número complexo e representa-se pelo símbolo $|z|$, o valor positivo da raiz quadrada da sua norma.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Da definição de complexos conjugados resultam algumas consequências bastante importantes:

a)- o conjugado do conjugado de z é o próprio z

b)- dois complexos conjugados têm a mesma norma e consequentemente o mesmo módulo.

c)- a soma de dois complexos conjugados é o dobro da parte real e a sua diferença é o imaginário puro cujo coeficiente é o dobro dos coeficientes dos complexos em questão.

Evidentemente se $z = (a,b)$ então $\overline{z} = (a,-b)$ logo:

$$z + \overline{z} = (2a,0) \quad e \quad z - \overline{z} = (0,2b)$$

§5) SUBTRAÇÃO e DIVISÃO de COMPLEXOS

a)- oposto de um complexo

Dado um número (a,b) diz-se oposto deste número, ao número complexo (c,d), tal que somado com (a,b) dá por resultado 0.

Vamos determinar a expressão do complexo (c,d).

Devemos ter: $(a,b) + (c,d) = (0,0)$ ou

$(a+c,b+d) = (0,0)$ ou ainda:

$a+c = 0 \quad e \quad b+d = 0$ portanto:

$$\boxed{a = -c \quad e \quad b = -d}$$

Concluindo-se então que oposto do número complexo (a,b) é dado por $(-a,-b)$.

b)- diferença de complexos

Diferença entre dois números complexos (a,b) e (c,d) é igual à soma do primeiro com o oposto do segundo:

$$(a,b) - (c,d) = (a,b) + (-c,-d)$$

Torna-se agora evidente a consequência c) do §4, isto é, a diferença de dois complexos conjugados é : $(0,2b)$

c)- inverso de um número complexo

Dado o número complexo $(a,b) \neq (0,0)$

diz-se seu inverso ao número (c,d) tal que:

$$(a,b).(c,d) = (1,0) = 1$$

Desta deduzimos

$$ac - bd = 1 \quad e \quad bc + ad = 0,$$

sistema linear não homogêneo de duas equações em duas incógnitas cujo determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \quad \text{é diferente de zero}$$

Temos portanto:

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Logo: "O inverso de um número complexo (a,b) é o número complexo

$$\boxed{(c,d) = \left[\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right]}$$

Dados então dois números complexos (a,b) e $(c,d) \neq (0,0)$, chamaremos cociente dos dois complexos, e escreveremos:

$\frac{(a,b)}{(c,d)}$ ao produto de (a,b) pelo inverso de (c,d):

$$\boxed{\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b).\left[\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2}\right]}$$

O cociente de dois conjugados será:

$$\frac{(a,b)}{(a,-b)} = (a,b).\left[\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right]$$

§6) POTENCIAÇÃO e RADICIAÇÃO

Consideremos inicialmente o caso das potências sucessivas da unidade imaginária $(0,1) = i$

Recordando que $i = \sqrt{-1}$ e observando que $i^2 = -1$, de acôrdo com a propriedade associativa da multiplicação vem:

$i^0 = +1$; $i^1 = +i$; $i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i^1 = (-1)i = -i$; $i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1)$

$i^4 = +1$; $i^5 = i^4.\ i = (1)i = i$

$i^6 = i^4.i^2 = (1).(-1) = -1$

$i^7 = i^4.\ i^3 = (1).(-i) = -i$

$i^8 = i^4\ .\ i^4 = (1)\ .\ (1) = +1$

Observando esses resultados, chegamos a conclusão de que as potências sucessivas de i se reproduzem periòdicamente de quatro em quatro, tomando os seguintes valôres:

1, i, -1, -i

O caso geral seria portanto:

$$i^{4k} = +1\ ;\ i^{4k+1} = +i\ ;\ i^{4k+2} = -1\ ;\ i^{4k+3} = -i$$

onde k é um número real e inteiro.

Do que vimos, resulta, logo que:

$(a,b)^2 = (a+ib)^2 = a^2+2abi+i^2b^2 = a^2-b^2+2abi$

$(a,-b)^2 = (a-ib)^2 = a^2-2abi+i^2b^2 = a^2-b^2-2abi$

$(a+ib)^3 = a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3 =$

$= a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)i$

$(a-ib)^3 = a^3+3ab^2i^2-3a^2bi-b^3i^3 =$

$= a^3-3ab^2-(3a^2b-b^3)i$

De um modo geral, o desenvolvimento de $(a \pm ib)$ para n (positivo ou negativo) inteiro faz-se pelo binômio de Newton tendo-se o cuidado de substituir as potências sucessivas de i pelos seus valôres.

Evidentemente são conservadas tôdas as leis do campo real relativas a potenciação.

Notaremos também que quando n é positivo, o desenvolvimento (a+ib) nos dará um complexo A+iB e o desenvolvimento (a-ib) nos dará um complexo A-iB visto que, A não se altera por que só contém potências pares de b; quanto a B todos os seus têrmos mudarão de sinal, posto que contém b elevado ùnicamente a potências ímpares.

Voltaremos a tratar da potênciação mais adiante no §9).

O estudo da radiciação dos números complexos sob a forma $a \pm ib$ pelas excessivas dificuldades que apresenta não pode ser feito de modo geral nêsse parágrafo.

Limitar-nos-emos a calcular a raiz quadrada do número complexo sob a forma a+ib.

Designando-o por x+iy o complexo cujo quadrado é igual a a+ib vem:

$$\sqrt{a+ib} = x+iy \quad \text{ou} \quad a+ib = x^2-y^2+2xyi$$

Evidentemente devemos ter:

$$x^2-y^2 = a \quad (1) \qquad e \qquad 2xy = b \quad (2)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (1) e (2) e somando as equações obtidas membro a membro temos:

$$a^2 + b^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

Considerando apenas o sinal positivo do radical vem:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (3)$$

De (1) e (3) vem:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \qquad (4) \qquad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2} \qquad (5)$$

Devemos observar que sendo b não nulo vem que $\sqrt{a^2 + b^2} > a$ em valor absoluto

De (4) e (5) temos:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{e} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Os sinais de x e y devem ser tomados de tal maneira que se satisfaça a equação (2)

Para $b > 0$, x e y tomam o mesmo sinal

Para $b < 0$, x e y têm sinais contrários.

Levando em conta o sinal, o complexo x + iy será dado pelas expressões:

1) $b > 0$

$$x + iy = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right]$$

2) $b < 0$

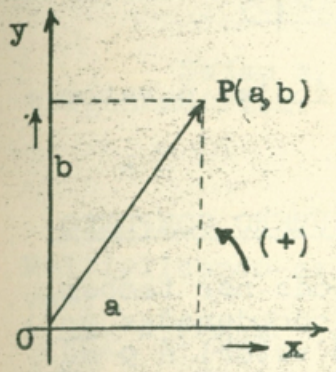
$$x + iy = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right]$$

§7) REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA dos NÚMEROS COMPLEXOS

Introduzindo na álgebra os números reais relativos, quando sôbre uma reta tenha sido prefixada uma origem, um segmento como

unidade de medida e um sentido positivo, resulta determinada uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números relativos A representação dos números complexos mediante um par ordenado de números reais nos permite, recorrendo ao método das coordenadas cartesianas, dar uma sugestiva representação destes números.

Considerados então num plano, dois eixos ortogonais Ox e Oy, um sentido positivo sôbre êstes (de esquerda para direita sôbre Ox e de baixo para cima sôbre Oy), um sentido positivo das rotações (movimento contrário aos ponteiros do relógio) e uma unidade de medida, a todo **número complexo** (a,b), pode-se fazer corresponder um ponto (índice daquele número) que tem a e b como coordenadas.



E reciprocamente a todo ponto, pode-se fazer corresponder um número complexo que tem como abcissa a parte real e como ordenada o coeficiente do imaginário. É evidente então que os números reais têm o índice sôbre o eixo x, e os imaginários puros sôbre o eixo y.

Doutro lado, como sabemos, os infinitos segmentos orientados OP que tem como extremidade comum a origem O e como segundas extremidades os pontos do plano e são caracterizados por um comprimento, um sentido e uma direção, são chamados vetores aplicados de origem O. Podemos concluir então que como índice de um número complexo (a,b), pode-se assumir o vetor aplicado P-O.

Deste modo: 1)- a soma de dois números complexos (a,b) e (c,d), pode ser obtida mediante a conhecida regra da composição dos vetores-aplicados correspondentes (e analogamente

Destas tiramos: $X = \sqrt[n]{\varsigma}$; $\beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}$

Reciprocamente dado um número complexo que tenha módulo e anomalia dados pelas expressões precedentes a potência n-ésima de $X(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$ é igual a $\varsigma(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$

Poderemos então concluir que: A raiz n-ésima dum número complexo não nulo, é fornecida pela fórmula:

$$\sqrt[n]{\varsigma}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \quad (1)$$

Para determinar, quais e quantos são êstes valôres, procuremos dois valôres k_1 e k_2 de k que conduzam ao mesmo resultado. Para que isso aconteça, deve-se ter:

$$\frac{\alpha+2k_1\pi}{n} = \frac{\alpha+2k_2\pi}{n} \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

ou

$$\frac{k_1 - k_2}{n}\,2\pi = 0 \quad \text{ou} \quad k_1 = k_2 \quad (\mathrm{mod}\ n)$$

Para obter então n valores diferentes de (1) bastará dar a k os valôres 0,1,2,...n-1, dois a dois não congruos com n.

Conclue-se então:

A raiz n de um número complexo (fornecida pela (1)) tem n valôres distintos:

$$\sqrt[n]{\varsigma}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, \ldots n-1)$$

Observação: 1) Se o número do qual se quer extrair a raiz é real, o módulo é igual ao valor absoluto do número e $\alpha = 0$ ou π (se o número é negativo).

Verifica-se então fàcilmente de (1) que dos n valôres da raiz n-ésima do número real, dois valôres são reais se o número é positivo e n par; um só valor é real se n é

ímpar e o número é positivo ou negativo; se o número é negativo e n é par não temos nenhum valor real.

2) Em particular a (1) por $\alpha = 0$ e $\varsigma = 1$ fornece

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 1, \ldots n-1)$$

que são as n raizes n-ésimas da unidade.

APÊNDICE - I)

FORMA EXPONENCIAL dos NÚMEROS COMPLEXOS

a)- Desenvolvimento em série de potências da função: $y = \mathrm{sen}\,x$

Calculando as derivadas sucessivas de y=sen x e exprimindo os seus valôres, bem como o valor da função no ponto x = 0 temos:

$f(x) = \mathrm{sen}x$	$f(0) = \mathrm{sen}0^\circ = 0$
$f'(x) = \cos x = \mathrm{sen}(x+\frac{\pi}{2})$	$f'(0) = \mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = 1$
$f''(x) = -\mathrm{sen}x = \mathrm{sen}(x+\pi)$	$f''(0) = \mathrm{sen}\,\pi = 0$
$f'''(x) = -\cos x = \mathrm{sen}(x+\frac{3\pi}{2})$	$f'''(0) = \mathrm{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$
$f''''(x) = \mathrm{sen}x = \mathrm{sen}(x+2\pi)$	$f''''(0) = \mathrm{sen}2\pi = 0$
$f^V(x) = \cos x = \mathrm{sen}(x+\frac{5\pi}{2})$	$f^V(0) = \mathrm{sen}\frac{5\pi}{2} = 1$
$f^{VI}(x) = -\mathrm{sen}x = \mathrm{sen}(x+3\pi)$	$f^{VI}(0) = \mathrm{sen}3\pi = 0$
$f^{VII}(x) = -\cos x = \mathrm{sen}(x+\frac{7\pi}{2})$	$f^{VII}(0) = \mathrm{sen}\frac{7\pi}{2} = -1$
$f^{VIII}(x) = \mathrm{sen}x = \mathrm{sen}(x+4\pi)$	$f^{VIII}(0) = \mathrm{sen}4\pi = 0$

e assim sucessivamente.

NOTA: em todos os casos é para x = 0

Substituindo êsses valôres na fórmula de desenvolvimento em série de Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad (1)$$

$$f(x) = \text{sen}x = 0+x.1+\frac{x^2}{2!}(0)+\frac{x^3}{3!}(-1)+\frac{x^4}{4!}(0)+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}(0)+\frac{x^7}{7!}(-1)+\frac{x^8}{8!}(0)+\ldots$$

E enfim:

(2) $$\boxed{\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots}$$

b)- Desenvolvimento em série de potências da função:

$$y = f(x) = \cos x$$

Procedendo como no caso anterior temos:

$f(x)=\cos x=\text{sen}(x+\frac{\pi}{2})$	$f(0)=\text{sen}\frac{\pi}{2}=1$
$f'(x)=-\text{sen}x=\text{sen}(x+\pi)$	$f'(0)=\text{sen}\,\pi=0$
$f''(x)=-\cos x=\text{sen}(x+\frac{3\pi}{2})$	$f''(0)=\text{sen}\frac{3\pi}{2}=-1$
$f'''(x)=\text{sen}x=\text{sen}(x+2\pi)$	$f'''(0)=\text{sen}2\pi=0$
$f''''(x)=\cos x=\text{sen}(x+\frac{5\pi}{2})$	$f''''(0)=\text{sen}\frac{5\pi}{2}=1$
$f^{V}(x)=-\text{sen}x=\text{sen}(x+3\pi)$	$f^{V}(0)=\text{sen}3\pi=0$
$f^{VI}(x)=-\cos x=\text{sen}(x+\frac{7\pi}{2})$	$f^{VI}(0)=\text{sen}\frac{7\pi}{2}=-1$
$f^{VII}(x)=\text{sen}x=\text{sen}(x+4\pi)$	$f^{VII}(0)=\text{sen}4\pi=0$
$f^{VIII}(x)=\cos x=\text{sen}(x+\frac{9\pi}{2})$	$f^{VIII}(0)=\text{sen}\frac{9\pi}{2}=1$

e assim sucessivamente.

NOTA: sempre para $x = 0$

Substituindo êsses valôres em (1) temos:

$$f(x) = \cos x = 1+x.0+\frac{x^2}{2!}(-1)+\frac{x^3}{3!}.0+\frac{x^4}{4!}.1+\frac{x^5}{5!}.0+\frac{x^6}{6!}(-1)+\frac{x^7}{7!}.0+\frac{x^8}{8!}.1+\frac{x^9}{9!}.0+\frac{x^{10}}{10!}(-1)\ldots$$

donde:

(3) $$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^{12}}{12!}\ldots}$$

c)- Desenvolvimento em série de potências da função exponencial $f(x) = e^x$ (4)

Desenvolveremos esta função nas vizinhanças do ponto $x = 0$ por meio da fórmula de Mac-Laurin.

Assim temos:

$f(x) = e^x$	para $x = 0$	$f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = e^x$	"	$f'(0) = e^0 = 1$
$f''(x) = e^x$	"	$f''(0) = e^0 = 1$

Identicamente teremos:

$$f'''(x) = f''''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$$
$$f'''(0) = f''''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$$

Substituindo êsses valôres em (1) vem:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\frac{x^n}{n!} \quad (5)$$

Fazendo $x = i\phi$, onde $i = \sqrt{-1}$ (unidade imaginária) e substituindo a variável x por ϕi temos da (5) que:

$$e^{i\phi} = 1+i\phi+\frac{\phi^2 i^2}{2!}+\frac{\phi^3 i^3}{3!}+\frac{\phi^4 i^4}{4!}+\frac{\phi^5 i^5}{5!}+\ldots+\frac{\phi^n i^n}{n!}$$

Lembrando a lei de formação das potências sucessivas da unidade imaginária temos:

$$e^{i\phi} = 1+i\phi-\frac{\phi^2}{2!}-\frac{\phi^3 i}{3!}+\frac{\phi^4}{4!}+\frac{\phi^5 i}{5!}-\frac{\phi^6}{6!}-\frac{\phi^7 i}{7!}+\frac{\phi^8}{8!}+\frac{\phi^9 i}{9!}+\ldots$$

Agupando os têrmos que possuem o fator i vem

$$e^{i\phi} = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \frac{\phi^8}{8!} + \ldots + i\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \frac{\phi^9}{9!} - \ldots\right) \quad (6)$$

d)- Forma exponêncial dos números complexos (Eule

Analisando a (6) verificamos que essa expressão pode se reduzir à soma de duas séries de potências, que de acôrdo com (2) e (3) são respectivamente o desenvolvimento do cosϕ e senϕ. Portanto:

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\,\mathrm{sen}\phi} \quad (7)$$

Caso em (6) substituirmos ϕ por $-\phi$ verificaremos que apenas os têrmos de expoente ímpar mudam de sinal de tal forma que todos os têrmos que representam o desenvolvimento em série de potências de cosϕ permanecem os mesmos e os do senϕ mudam de sinal e teremos:

$$e^{-i\phi} = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \frac{\phi^8}{8!} - \ldots + i\left(-\phi + \frac{\phi^3}{3!} - \frac{\phi^5}{5!} + \frac{\phi^7}{7!} - \ldots\right)$$

ou

$$e^{-i\phi} = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \frac{\phi^8}{8!} - \ldots - i\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \ldots\right)$$

Donde finalmente

$$\boxed{e^{-i\phi} = \cos\phi - i\,\mathrm{sen}\phi} \quad (8)$$

Denomina-se então forma exponencial de um número complexo à expressão:

$$\boxed{\rho e^{i\phi} = a + ib} \quad (9)$$

onde ρ é o módulo do número complexo e ϕ é o seu argumento.

APÊNDICE - II)

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

a)- Das relações (7) e (8) (do apêndice I) vão se originar o seno e o cosseno hiperbólicos e daí tôdas as funções hiperbólicas.

Assim se na (7) e (8) (do apêndice I) no lugar de ϕ tivermos $i\phi$ vem:

$$\begin{cases} e^{-\phi} = \cos i\phi + i\,\mathrm{sen}\,i\phi \\ e^{\phi} = \cos i\phi - i\,\mathrm{sen}\,i\phi \end{cases} \quad (1)$$

Do sistema (1) obtemos fàcilmente:

$$\cos i\phi = \cosh\phi = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2} \quad (2) \quad \text{(cosseno hiperbólico)}$$

$$-i\,\mathrm{sen}\,i\phi = \mathrm{senh}\,\phi = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2} \quad (3) \quad \text{(seno hiperbólico)}$$

Por analogia com as funções circulares, a tangente e a cotangente hiperbólicas são obtidas da seguinte forma:

$$\mathrm{tgh}\,\phi = \frac{\mathrm{senh}\,\phi}{\cosh\phi} = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{e^{\phi} + e^{-\phi}} \quad (4)$$

$$\mathrm{cotgh}\,\phi = \frac{\cosh\phi}{\mathrm{senh}\,\phi} = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{e^{\phi} - e^{-\phi}} \quad (5)$$

De (2), (3), (4), e (5) surgem as importantíssimas relações:

$$\cos h^2\phi - \operatorname{sen} h^2\phi = 1 \qquad (6)$$

$$1 - \operatorname{tg} h^2\phi = \frac{1}{\cos h^2\phi} \qquad (7)$$

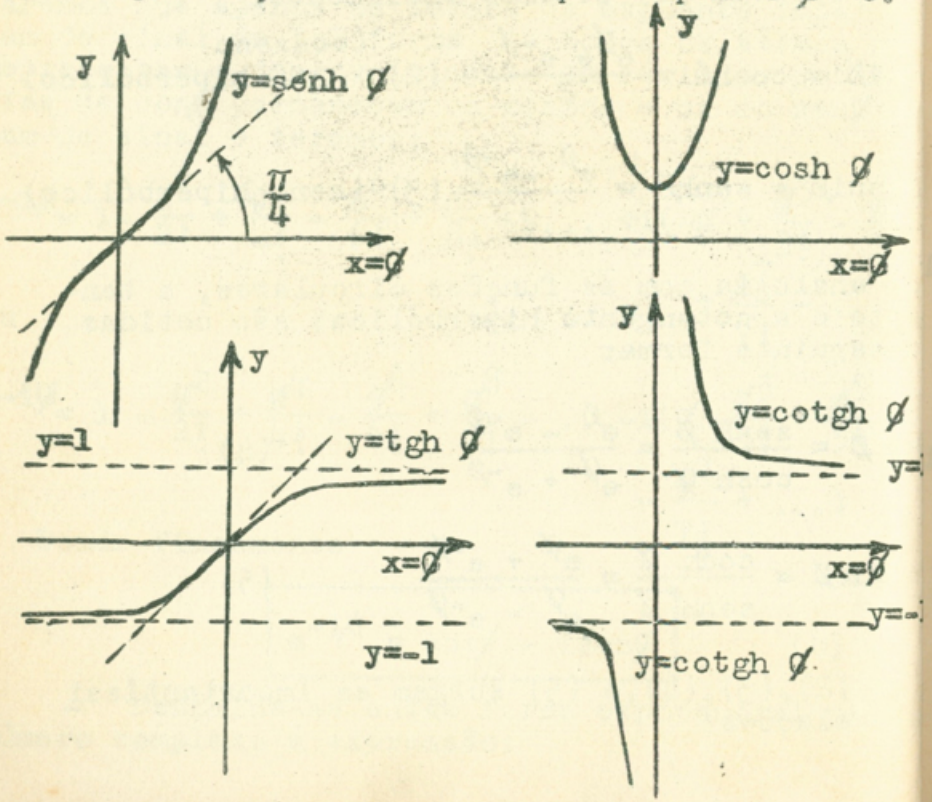
$$\operatorname{cotg} h^2\phi - 1 = \frac{1}{\operatorname{sen} h^2\phi} \qquad (8)$$

As funções hiperbólicas são definidas para todos os valôres reais de ϕ menos para $\phi = 0$ quando a cotg ϕ vai para o infinito.

A função senh ϕ toma todos os valôres possíveis, e cosh ϕ é maior que 1 ou eventualmente igual a 1 quando $\phi = 0$

Os valôres da função tgh ϕ estão no intervalo $-1 \leqslant \operatorname{tgh}\phi \leqslant 1$

Os valôres da função cotgh ϕ são maiores que 1 quando $\phi > 0$ e menores que 1 quando $\phi < 0$.



Como se verifica pelos gráficos as retas $y = 1$ e $y = -1$ servem como assíntotas para as funções $y = \operatorname{tgh}\phi$ e $y = \operatorname{cotgh}\phi$.

As funções hiperbólicas são ligadas por relações análogas àquelas que encontramos na trigonometria plana.

Assim são verídicas as relações:

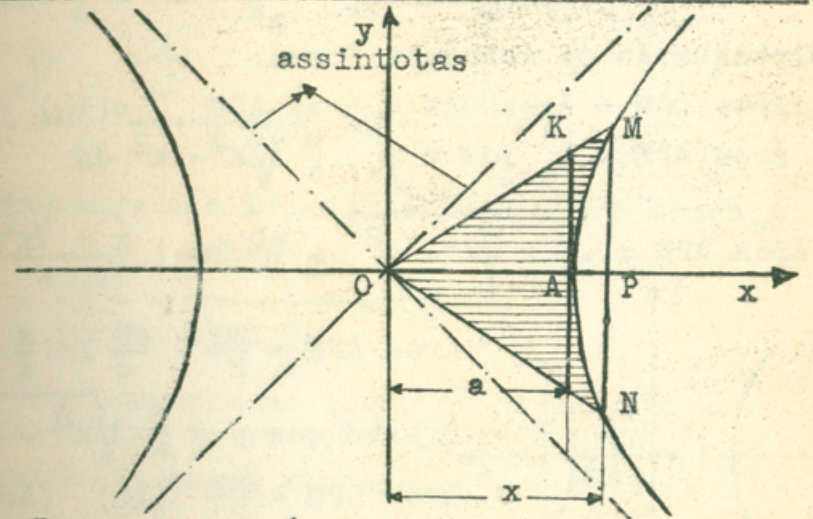
$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y \qquad (9)$$

$$\operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{cotgh} x = 1 \qquad (9a)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{senh} y \qquad (10)$$

$$\operatorname{tgh}(x+y) = \frac{\operatorname{tgh} x + \operatorname{tgh} y}{1 + \operatorname{tgh} x \cdot \operatorname{tgh} y} \qquad (11)$$

b)- Origem da nomenclatura "Funções hiperbólicas"



Tomemos a hipérbole equilátera de equação $x^2 - y^2 = a^2$.

Seja s a área do setor hiperbólico OMN e tomemos para s aquêle sinal que tem o ângulo entre $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OM}$.

Então a relação entre os segmentos orientados $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{AK}$ (construidos para o ponto M de uma forma análoga à que podemos notar no círculo para as linhas seno, cosseno, tangente

em que x=a+ib, y=c+id

28) Responda:

Todo número real positivo tem por módulo ....
e por argumento....
Todo número real negativo tem por módulo.....
e por argumento.....
Todo número imaginário puro tem por módulo...
... e por argumento.....

29) Prove que:
a) Dois complexos têm como índices no plano de Gauss dois pontos simétricos em relação ao eixo real?
b) A soma dos conjugados de dois complexos x e y é o conjugado da soma.
c) O produto dos conjugados de dois complexos x e y é o produto xy dos dois complexos.

30) Sabe-se que $\left|\frac{a+ib}{a-ib}\right|=1$. Se a e b não são reais a expressão é verdadeira?

31) Mostre que multiplicar um número complexo por i, equivale a fazê-lo rodar de 90°, sem que mude seu comprimento.

32) O que acontece quando se multiplica por -i? E quando se multiplica por $\sqrt{i}$?

33) Se n é um número inteiro e z_1 e z_2 são números complexos, qual ponto representa $\frac{z_1+z_2}{2}$?

34) Qual é a condição necessária e suficiente para que tenhamos a+ib = m(c+id)

35) Uma equação algébrica com coeficientes reais do teceiro gráu, admite a solução a+ib. Admitirá ainda raízes complexas? Quantas raízes reais? (Justifique a resposta. E.E.U.M.-1962

ÍNDICE

	página
Introdução Histórica e Bibliografia	1
§.1 Generalidades	2
§.2 Definições e primeiras propriedades..	3
§.3 Condição de Anulamento do Produto....	4
§.4 Complexos conjugados Norma e Módulo..	5
§.5 Subtração e Divisão de Complexos.....	6
§.6 Potenciação e Radiciação.....	8
§.7 Representação Geométrica dos Números Complexos.....	10
§.8 Forma Trigonométrica dos Números Complexos.....	12
§.9 Multiplicação de Números Complexos em forma trigonométrica.....	13
§.10 Divisão de Números Complexos na forma trigonométrica.....	15
§.11 Potenciação de Números Complexos sob a forma trigonométrica-Fórmula de Moivre.....	16
§.12 Raíz Enésima de um Número Complexo...	19
Apêndice I	21
Apêndice II	25
Apêndice III	30
Apêndice IV	32
Apêndice V	37
Apêndice VI	38
Exercícios resolvidos.....	40
Exercícios para resolver	95
Perguntas	117

É VEDADA A REPRODUÇÃO TOTAL
OU PARCIAL DÊSTE TRABALHO
SOB AS PENAS DA LEI

ANDREOTTI 4/64